MASTER M2 MATHEMATIQUES DE LA MODÉLISATION
UNIVERSITE PIERRE ET MARIE CURIE - ECOLE POLYTECHNIQUE
Cours de G. Allaire "systèmes hyperboliques de lois de conservation"
Examen écrit du 18 Janvier 2018 (3 heures)

Important: La notation des copies prendra en compte la clarté et la qualité de la rédaction. Le barême est donné à titre indicatif et est censé refléter la difficulté relative de chacune des parties.

---

1 Dynamique des gaz isentropiques (7 points)

On considère les équations d'Euler de la dynamique des gaz isentropiques en coordonnées Lagrangiennes et en une dimension d'espace

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x p(\tau) = 0, \end{array} \right. \tag{1}$$

où τ est le volume spécifique, u la vitesse et p la pression donnée par une loi de pression vérifiant, pour tout $\tau > 0$,

$$p(\tau) > 0 \quad p'(\tau) < 0 \quad p''(\tau) > 0. \tag{2}$$

1. Montrer que le système (1) est strictement hyperbolique pour $\tau > 0$ et $u \in \mathbb{R}$.
2. Montrer que les deux champs caractéristiques sont vraiment non linéaires (VNL).
3. Donner un invariant de Riemann pour chaque champ.
4. Soit la fonction
$$S(\tau, u) = \frac{1}{2} u^2 + E(\tau),$$
où E est une primitive de $-p(\tau)$, c'est-à-dire que $E'(\tau) = -p(\tau)$. Montrer que $S(\tau, u)$ est une fonction convexe et que c'est une entropie du système (1). On donnera la forme du flux d'entropie (qui est très simple).
5. Pour cette question, on choisit la loi de pression $p(\tau) = 1/(3\tau^3)$. Calculer la forme des ondes de détente pour chaque champ. Tracer dans le plan (τ, u) la courbe de détente pour chaque champ, c'est-à-dire l'ensemble des états à droite (τ_R, u_R) qui peuvent être reliés à un état à gauche donné (τ_L, u_L).
6. Rappeler brièvement quelle est la structure de la solution du problème de Riemann pour (1) lorsque les états à droite (τ_R, u_R) et à gauche (τ_L, u_L) sont proches.

2 Système relaxé (13 points)

On considère une version **relaxée** de (1) qui se révèle utile pour la résolution numérique du problème de Riemann. Pour un petit paramètre $\epsilon > 0$, il s'agit d'un système de 3 équations avec un terme source

$$\left\{ \begin{array}{l} \partial_t \tau - \partial_x u = 0, \\ \partial_t u + \partial_x \pi(\tau, V) = 0, \\ \partial_t V = \frac{1}{\epsilon}(\tau - V), \end{array} \right. \tag{3}$$

où V est une nouvelle variable, dite de relaxation, et la fonction π est définie, pour un nombre fixé $a > 0$, par

$$\pi(\tau, V) = p(V) + a^2(V - \tau). \tag{4}$$

1. Montrer formellement que, si le paramètre ϵ tend vers 0, alors le système (3) redonne (1) à la limite.

2. Soit la fonction

   $$S^\epsilon(\tau, u, V) = \frac{1}{2}u^2 + E(V) + \frac{\pi^2 - p^2(V)}{2a^2},$$

   où E est une primitive de $-p$, c'est-à-dire que $E'(V) = -p(V)$. Montrer que $S^\epsilon(\tau, u, V)$ est une entropie "relaxée" du système (3) au sens où, pour une solution régulière,

   $$\partial_t S^\epsilon + \partial_x(\pi u) = -\frac{1}{\epsilon}(a^2 + p'(V))(\tau - V)^2. \tag{5}$$

   En déduire que si a est suffisamment grand, l'entropie relaxée est dissipée par (3).

3. Désormais, pour toutes les questions qui suivent, **on ignore le terme source** (non différentiel) dans la 3ème équation de (3) qui devient simplement $\partial_t V = 0$. Montrer que le système (3) est strictement hyperbolique pour $\tau > 0$ et $u, V \in \mathbb{R}$.

4. Montrer que les trois champs caractéristiques sont linéairement dégénérés (LD). Quel type d'onde est associé à ces champs LD ?

5. Donner deux invariants de Riemann (indépendants) pour chacun des champs caractéristiques. Quelle est la propriété des invariants de Riemann dans les ondes associées à ces champs LD ?

6. Tracer dans le plan (π, u) les courbes d'ondes pour les champs 1 et 3 (comme d'habitude les champs sont numérotés par ordre croissant des valeurs propres). Que peut-on dire de la courbe d'onde pour le champ 2 dans le plan (π, u) ? On rappelle que la courbe d'onde est l'ensemble des états à droite (π_R, u_R, V_R) qui peuvent être reliés à un état à gauche donné (π_L, u_L, V_L).

7. Que peut-on dire sur la condition d'entropie pour les champs LD du système (3) ?

8. On considère le problème de Riemann pour (3) pour des états à droite (π_R, u_R, V_R) et à gauche (π_L, u_L, V_L). A l'aide de l'intersection des courbes d'onde dans le plan (π, u), montrer que la solution du problème de Riemann est constitué de 4 états constants séparés par 3 ondes (au plus) dont on donnera les valeurs (états et vitesses d'onde) exactes.

9. En déduire une méthode numérique pour la résolution de (3).