LA METHODE D'HOMOGENEISATION POUR L'OPTIMISATION TOPOLOGIQUE DE STRUCTURES ELASTIQUES

Grégoire ALLAIRE
Laboratoire d'Analyse Numérique
Université Paris 6
75252 Paris Cedex 05

1 Introduction

Le problème type de l'optimisation de formes en mécanique des structures est de trouver la forme "optimale" d'une structure, qui soit à la fois de poids minimal et de rigidité maximale. Des problèmes de ce genre se rencontrent fréquemment dans des domaines comme le génie civil, l'aéronautique, ou la construction automobile, pour lesquels toute économie de poids permet à la fois des économies de matière première mais surtout des gains très importants de performance (par exemple, une voiture légère consomme moins de carburant). En pratique, on demande aussi à la forme optimale de satisfaire d'autres contraintes technologiques (par exemple, aérodynamiques ou accoustiques) ou bien de faisabilité industrielle et de coût de fabrication. Mais, pour simplifier le problème et se concentrer sur les difficultés intrinsèques de l'optimisation de formes, on va ne pas tenir compte de ces contraintes supplémentaires dans tout ce qui suit.

Traditionellement, l'ingénieur de bureau d'étude procède par essais successifs, en testant des prototypes dont le design relève de son savoir faire et de son intuition. Cette façon de faire "manuelle" est très coûteuse et imprécise. De plus en plus, elle est remplacée par des logiciels de modélisation mumérique et d'optimisation, qui permettent d'analyser de nombreuses possibilités sans avoir à fabriquer de prototypes et qui automatisent la recherche de la forme optimale. Dans la plupart de ces codes de calcul, cette automatisation est obtenue en représentant la forme par un nombre limité de paramètres descriptifs (généralement des points de contrôle sur les bords), et l'analyse des variations des performances par rapport à ces paramètres permet d'améliorer itérativement une forme initiale. On trouvera dans les ouvrages [11], [24], [26], [30] une présentation systématique de cette approche ainsi que de très nombreuses références.

Cependant cette méthode, dite d'analyse de sensibilité, présente deux inconvénients majeurs. Elle est très coûteuse en temps de calcul car, si la forme s'éloigne trop de la géométrie initiale, il peut être nécessaire de remailler la structure au cours des itérations. D'autre part, et c'est là son plus grave défaut, le résultat obtenu dépend fortement du choix initial et de la finesse de la discrétisation. En effet, les formes successives ne varient que par leur frontière, tandis que leur topologie reste fixe : la structure garde le même nombre de composantes, de bords et de trous, et la taille de ces derniers est limitée par la taille du maillage. Or, de nombreux exemples (aussi bien numériques [13] que théoriques [23]) montrent que des variations de topologie permettent des gains de performance significatifs, et, dans les problèmes industriels complexes, il est impossible de déterminer a priori la topologie optimale.

D'un point de vue mathématique, la forte dépendance du résultat par rapport au choix initial s'interprète par l'existence de nombreux minima locaux, tandis que la non-convergence du résultat par raffinement de maillage est une conséquence du caractère mal posé du problème. Rappelons en effet que, si les formes admissibles doivent satisfaire des hypothèses de "régularité", on peut démontrer l'existence d'une forme optimale [12], alors qu'en l'absence de toute contrainte sur la frontière il n'y a, en général, pas existence d'une forme optimale (cf. les contre-exemples dans [23] et [25]).

On se propose donc de remédier aux inconvénients de la méthode d'analyse de sensibilité en proposant une nouvelle méthode dite d'*optimisation topologique* de formes utilisant la théorie de l'homogénéisation. D'un point de vue pratique cette méthode permet d'optimiser automatiquement une structure sans restriction explicite ou implicite sur sa topologie, et évite les aléas numériques classiques décrits ci-dessus, pour un coût de calcul très compétitif. D'un point de vue mathématique, notre approche remédie à la non-existence générique de formes optimales en relaxant le problème. Cette relaxation s'obtient en généralisant la notion de formes admissibles qui sont désormais constituées de matériaux composites obtenus par microperforation du matériau pur d'origine. La clé de voute de cette approche est la théorie de l'homogénéisation qui permet de calculer et d'optimiser les propriétés effectives des matériaux composites.

Il est juste de considérer les travaux de Murat et Tartar à la fin des années 70 et au début des années 80 comme fondateurs, à plus d'un titre, de la théorie de l'homogénéisation appliquée à l'optimisation de formes (cf. [25] ainsi que des références antérieures reprises dans le volume [14]). D'autres travaux théoriques fondamentaux sur les liens entre l'optimisation de formes et l'homogénéisation ont eu lieu en Russie et aux Etats-Unis (cf. [16], [19], [20], et le volume [14]). De façon surprenante les premiers calculs numériques réalistes en ce domaine ne sont arrivés que plus tard (en particulier, le travail pionnier de Bendsoe et Kikuchi [8] en 1988, puis [3], [4], [18], [29], [31]). Pour se rendre compte du développement extraordinaire de ces méthodes d'homogénéisation on pourra consulter les livres [7] et [9] ainsi que leurs références.

Concluons cette introduction en disant que cet article est une présentation, assez informelle du point de vue mathématique, de travaux plus complets (pour plus de détails, voir notamment [1], [2], [3], [4]).

2 Position du problème

Dans cette section nous donnons la formulation originale du problème d'optimisation de formes auquel nous appliquerons la méthode d'homogénéisation. Pour appliquer en toute rigueur cette méthode, nous supposons que le modèle mécanique sous-jacent est celui de l'élasticité linéaire. Par ailleurs, notre mesure de la rigidité globale d'une pièce mécanique sera la compliance, c'est-à-dire le travail des forces extérieures ou bien encore l'énergie élastique.

Considérons un domaine de référence borné $\Omega \in \mathbb{R}^N$ ($N = 2, 3$ est la dimension de l'espace), occupé par un matériau élastique, linéaire et isotrope, de loi de Hooke A (un tenseur d'ordre 4) définie par

$$A = (\kappa - \frac{2\mu}{N}) I_2 \otimes I_2 + 2\mu I_4, \quad 0 < \kappa, \mu < +\infty, \tag{1}$$

où κ et μ sont respectivement les modules de compression et de cisaillement du matériau. On suppose qu'en l'absence de forces volumiques le domaine Ω n'est soumis qu'à un chargement surfacique, noté f, sur l'ensemble de sa frontière $\partial\Omega$ (f est une fonction de $\partial\Omega$ dans $\mathbb{R}^N$). On aurait pu aussi n'imposer cette force que sur une partie de $\partial\Omega$ et avoir des conditions aux limites de bloquage sur l'autre partie. On demande aux forces surfaciques f de respecter la condition d'équilibre

$$\int_{\partial\Omega} f \cdot u \, ds \;=\; 0,$$

pour tout champ de déplacement $u(x) = b + Mx$ correspondant à une rotation infinitésimale (avec $M = -M^t$ matrice antisymétrique).

Une forme admissible ω est un sous-ensemble du domaine de référence Ω obtenu en pratiquant un ou plusieurs trous dans Ω. Les nouvelles frontières ainsi générées sont libres de toute traction. Pour que ω soit admissible, il faut aussi que sa frontière $\partial\omega$ contienne la partie du bord $\partial\Omega$ où les forces surfaciques f ne sont pas nulles. On note $u_\omega(x)$ le champ de déplacement (une fonction de ω dans $\mathbb{R}^N$), solution des équations de l'élasticité dans ω,

$$\begin{cases} \sigma_\omega = Ae(u_\omega), & e(u_\omega) = \frac{1}{2}(\nabla u_\omega + \nabla^t u_\omega), \\ \operatorname{div} \sigma_\omega = 0, & \text{dans } \omega, \\ \sigma_\omega \cdot n = f, & \text{sur } \partial\Omega, \\ \sigma_\omega \cdot n = 0, & \text{sur } \partial\omega \setminus \partial\Omega. \end{cases} \tag{2}$$

Les matrices symétriques $e(u_\omega)$ et σ_ω sont appelées respectivement tenseur des déformations et tenseur des contraintes. La mesure de la rigidité de la forme ω est donnée par sa compliance définie par

$$c(\omega) = \int_{\partial\Omega} f \cdot u_\omega ds = \int_\omega Ae(u_\omega) \cdot e(u_\omega) dx = \int_\omega A^{-1}\sigma_\omega \cdot \sigma_\omega dx. \tag{3}$$

Le poids de la forme est supposé proportionnel à son volume, noté $|\omega| = \int_\omega dx$. Pour balancer les deux objectifs contradictoires de minimisation du poids et de maximisation de la rigidité, on introduit un multiplicateur de Lagrange positif $\ell > 0$.

Nous nous intéressons alors au problème d'optimisation de formes qui consiste à minimiser, sur l'ensemble des formes admissibles $\omega \subset \Omega$, la somme pondérée de la compliance et du poids. Autrement dit, on cherche une forme optimale qui minimise une fonction objectif $E(\omega)$

$$\inf_{\omega \subset \Omega} \left(E(\omega) = c(\omega) + \ell|\omega| \right). \tag{4}$$

Rappelons (ce qui sera très utile par la suite) que la valeur de la compliance est fournit par le principe de minimisation de l'énergie complémentaire

$$c(\omega) = \int_{\partial\Omega} f \cdot u_\omega ds = \min_{\substack{\operatorname{div} \sigma = 0, \text{dans } \omega \\ \sigma \cdot n = f, \text{sur } \partial\Omega \\ \sigma \cdot n = 0, \text{sur } \partial\omega \setminus \partial\Omega}} \int_\omega A^{-1}\sigma \cdot \sigma dx. \tag{5}$$

3 Formulation homogénéisée

Comme on l'a déjà dit dans l'introduction, il est maintenant bien connu (depuis les premiers contre-exemples de [23] et les constatations numériques de [13]), qu'en l'absence de contraintes supplémentaires sur les formes admissibles ω, la fonction objectif $E(\omega)$ peut ne pas atteindre son minimum, c'est-à-dire qu'il n'existe pas de forme optimale. La raison mécanique de ce phénomène générique de non-existence est qu'il est souvent avantageux de faire beaucoup de très petits trous (plutôt que quelques grand trous) dans une structure donnée afin d'améliorer sa performance par rapport à la fonction $E(\omega)$. Par conséquent, atteindre le minimum peut faire appel à un processus de passage à la limite (lorsque les trous deviennent de plus en plus petits et de plus en plus nombreux) conduisant à une forme "généralisée" (ou homogénéisée) qui est un matériau composite obtenu par microperforation du matériau élastique d'origine.

Afin de prendre en compte ce phénomène mécanique d'optimalité qui n'est pas réalisée par une forme, stricto sensu, mais par un matériau composite, nous devons élargir l'espace des formes admissibles en autorisant, dès le départ, les matériaux composites obtenus par homogénéisation d'un mélange fin du matériau et de vide. Une telle structure composite est déterminée par deux fonctions: $\theta(x)$, sa densité volumique locale de matériau (prenant ses valeurs entre 0 et 1), et $A^*(x)$, sa loi de Hooke effective correspondant à sa microstructure. Bien entendu, il faut aussi trouver une définition adéquate de la fonction objective homogénéisée $\tilde{E}(\theta, A^*)$ qui généralise $E(\omega)$ pour ces structures composites.

Ce procédé de généralisation des formes admissibles est appelé relaxation, ou, dans ce cas particulier, homogénéisation. Il est essentiel de noter que cette relaxation ne change pas la physique du problème. En effet, une forme optimale composite est simplement une moyenne (ou une équivalence en un certain sens) de formes classiques proches de l'optimalité. Mathématiquement, une forme composite optimale n'est que la limite au sens de l'homogénéisation d'une suite minimisante de formes classiques. Intrinsèquement, le problème d'optimisation de formes n'est donc pas modifié. En particulier, toute solution possible du problème original est aussi solution du problème homogénéisé. Pour calculer cette formulation relaxée ou homogénéisée de l'optimisation de formes, on fait appel à la théorie de l'homogénéisation (voir par exemple [10], [28]). L'objectif final est double : d'une part prouver un résultat d'existence pour la formulation relaxée du problème d'optimisation de forme, et d'autre part trouver un nouvel algorithme numérique pour le calcul des formes optimales.

L'utilisation de l'homogénéisation dans ce contexte est assez technique (notamment à cause de la dégénérescence du problème causée par la présence de trous), et nous nous contentons de donner le résultat obtenu (pour plus de détails voir [3], [4]). On note G_θ l'ensemble de toutes les lois de Hooke correspondant à des matériaux composites de densité θ, c'est-à-dire obtenus en perforant le matériau original A par des trous en proportions $(1-\theta)$. La fonctionnelle homogénéisée ou relaxée est alors donnée par

$$\min_{\substack{0\leq\theta\leq 1\\ A^*\in G_\theta}} \left\{ \tilde{E}(\theta, A^*) = \tilde{c}(\theta, A^*) + \lambda \int_\Omega \theta(x)dx \right\}. \tag{6}$$

où $\tilde{c}(\theta, A^*)$ est la compliance associée au problème homogénéisé d'élasticité dans le domaine Ω pour le tenseur effectif A^*. Rappelons que, comme dans (5), cette compliance s'écrit comme le minimum de l'énergie élastique complémentaire

$$\tilde{c}(\theta, A^*) = \min_{\substack{\text{div } \sigma=0, \text{dans } \Omega\\ \sigma\cdot n=f, \text{sur } \partial\Omega}} \int_\Omega A^*(x)^{-1}\sigma\cdot\sigma dx. \tag{7}$$

Cette formulation relaxée n'est pas encore entièrement explicite puisque la définition précise de l'ensemble G_θ est inconnue ! Cependant, le choix particulier de la compliance dans la fonction objectif permet de la minimiser explicitement en A^*. Remarquons tout d'abord que l'ordre des minimisations en σ et (θ, A^*) est indifférent et que, l'homogénéisation étant un phénomène local, la minimisation en (θ, A^*) est à effectuer de façon indépendante en chaque point x du domaine. On peut alors réécrire (6) sous la forme

$$\min_{\substack{0\leq\theta\leq 1\\ A^*\in G_\theta}} \tilde{E}(\theta, A^*) \;=\; \min_{\substack{div\sigma=0,\text{dans } \Omega\\ \sigma\cdot n=f,\text{sur } \partial\Omega}} \left\{ \int_\Omega \min_{\substack{A\in G_\theta\\ 0\leq\theta\leq 1}} \left(A^{*-1}\sigma\cdot\sigma + \lambda\theta\right) dx \right\}.$$

Or, pour un tenseur des contraintes admissible fixé, σ, la minimisation de l'énergie complémentaire $A^{*-1}\sigma\cdot\sigma$ sur G_θ est un problème classique en homogénéisation qu'on désigne sous le nom de problème de bornes optimales sur les propriétés effectives des matériaux composites. Il existe une vaste litérature sur ce sujet : citons entre autres [5], [6], [15], [16], [17], [22], et leurs références. Décrivons brièvement la solution de cette optimisation locale. On désigne par L_θ une classe particulière de matériaux composites dans G_θ qu'on appelle les laminés séquentiels. Ces matériaux sont obtenus par mise en couches successives du matériau A et du vide dans des directions et avec des proportions données (voir figure 1). Dans ce processus A joue le rôle d'une matrice et le vide celui d'inclusions ou de trous. L'intérêt essentiel de ces matériaux laminés séquentiels est que leur loi de Hooke est donnée par une formule explicite (cf. [15]). Soit $p \geq 1$ le rang du laminé (c'est-à-dire le nombre de laminations successives qu'il faut faire pour le construire), soient $(e_i)_{1\leq i\leq p}$ les vecteurs de directions des laminations, et soient $(m_i)_{1\leq i\leq p}$, tels que $0 \leq m_i \leq 1$ et $\sum_{i=1}^p m_i = 1$, les proportions du matériau A à chaque étape de lamination. La loi de Hooke A^* de ce laminé séquentiel de rang p est donnée par

$$A^{*-1} = A^{-1} + \frac{1-\theta}{\theta}\left(\sum_{i=1}^{p} m_i f_A^c(e_i)\right)^{-1},$$

où $f_A^c(e_i)$ est un tenseur d'ordre 4 défini, pour toute matrice ξ, par la forme quadratique

$$f_A^c(e_i)\xi\cdot\xi = A\xi\cdot\xi - \frac{1}{\mu}|A\xi e_i|^2 + \frac{\mu+\lambda}{\mu(2\mu+\lambda)}((A\xi)e_i\cdot e_i)^2,$$

avec $(\mu, \lambda = \kappa - 2\mu/N)$ les coefficients de Lamé de A. On a alors

$$\min_{A^*\in G_\theta} A^{*-1}\sigma\cdot\sigma \;=\; \min_{A^*\in L_\theta} A^{*-1}\sigma\cdot\sigma,$$

et le laminé séquentiel optimal est de rang N (la dimension d'espace) avec comme directions de lamination les directions principales $(e_i)_{1\leq i\leq N}$ du tenseur σ. Si on note $(\sigma_i)_{1\leq i\leq N}$ les valeurs propres du tenseur σ, alors les proportions du laminé optimal sont en 2-D

$$m_1 = \frac{|\sigma_2|}{|\sigma_1|+|\sigma_2|},\; m_2 = \frac{|\sigma_1|}{|\sigma_1|+|\sigma_2|}, \tag{8}$$

et en 3-D, en ordonnant les valeurs propres de σ de telle façon que $|\sigma_1| \leq |\sigma_2| \leq |\sigma_3|$, et en supposant que $\lambda = 0$ pour simplifier l'exposition,

$$m_1 = \frac{|\sigma_3|+|\sigma_2|-|\sigma_1|}{|\sigma_1|+|\sigma_2|+|\sigma_3|},\;\; m_2 = \frac{|\sigma_1|-|\sigma_2|+|\sigma_3|}{|\sigma_1|+|\sigma_2|+|\sigma_3|},\;\; m_3 = \frac{|\sigma_1|+|\sigma_2|-|\sigma_3|}{|\sigma_1|+|\sigma_2|+|\sigma_3|}, \tag{9}$$

si $|\sigma_3| \leq |\sigma_1| + |\sigma_2|$, et sinon

$$m_1 = \frac{|\sigma_2|}{|\sigma_1|+|\sigma_2|},\;\; m_2 = \frac{|\sigma_1|}{|\sigma_1|+|\sigma_2|},\;\; m_3 = 0. \tag{10}$$

La microstructure laminée optimale s'aligne automatiquement avec les directions principales du tenseur des contraintes. On retrouve ainsi des principes mécaniques bien connus comme

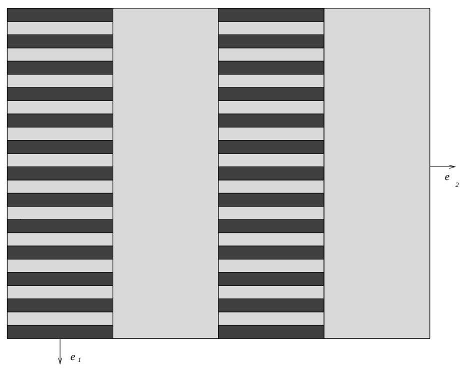

Figure 1: *Microstructure d'un composite laminé séquentiel de rang 2. Le matériau est en clair, les trous sont foncés.*

celui d'optimalité des structures réticulées de Michell [21]. On peut en fait montrer que la théorie des treillis de barres de Michell [21] (cf. par exemple [27] pour une présentation moderne de cette théorie) est un cas limite de la méthode d'homogénéisation en 2-D lorsque le volume de matière tends vers zéro.

Après cette étape cruciale, la minimisation par rapport à la densité θ est aisément faite à la main, ce qui termine le calcul explicite des paramètres de la forme composite optimale pour un tenseur de contraintes donné σ. Citons simplement pour l'exemple la valeur optimale de la densité en 2-D

$$\theta_{opt} = \min\left(1, \sqrt{\frac{\kappa+\mu}{4\mu\kappa\ell}}\,(|\sigma_1|+|\sigma_2|)\right). \tag{11}$$

Seule la minimisation en σ reste à faire numériquement par une méthode d'éléments finis. On peut alors démontrer le théorème suivant (cf. [4] pour le cas 2-D, et [3] pour le cas 3-D)

Théorème *La formulation homogénéisée (6) est la relaxation du problème d'optimisation de formes (4) au sens où,* **(i)** *il existe, au moins, une forme optimale composite (θ, A^*) qui minimise (6),* **(ii)** *toute suite minimisante de formes classiques ω pour (4) converge, au sens de l'homogénéisation, vers un minimisateur (θ, A^*) de (6),* **(iii)** *les valeurs des minima de l'énergie originale et homogénéisée coincident*

$$\inf_{\omega\subset\Omega} E(\omega) = \min_{\substack{A^*\in G_\theta\\ 0\leq\theta\leq 1}} \tilde{E}(\theta, A^*).$$

4 Algorithme numérique d'optimisation de formes

Plus encore que le théorème d'existence de solutions relaxées, l'intérêt de cette méthode d'homogénéisation provient de l'algorithme numérique d'optimisation qu'on en déduit. Le principe de la méthode proposée est de calculer une forme composite optimale pour la formulation homogénéisé (6), plutôt que d'essayer de trouver une forme classique quasi-optimale pour la formulation originale (4). En effet, rappelons que ce problème (4) est mal posé et n'admet pas en général de solution classique. Numériquement, cela veut dire que la minimisation de (4) est très difficile à cause de la présence de nombreux minima locaux : les résultats numériques dépendent alors fortement des conditions initiales et du maillage choisis. Au contraire le problème homogénéisé (6) admet un minimum global. De plus, l'homogénéisation transforme un difficile problème d'optimisation discrète (du type 0/1 selon qu'au point $x \in \Omega$ il y a, ou non, du matériau) en un problème beaucoup plus simple d'optimisation continue (la densité de matériau varie continuement entre 0 et 1). Les calculs sont donc effectués sur un maillage fixe du domaine de travail Ω sur lequel la forme optimale sera capturée par notre algorithme.

Le problème homogénéisé (6) d'optimisation de formes est, comme on l'a vu, une double minimisation par rapport aux paramètres de formes (θ, A^*) et aux tenseurs des contraintes statiquement admissibles σ. Notre algorithme, dit des "directions alternées" (cf. [3]), se propose de minimiser alternativement et itérativement dans chacune de ces variables :

- intialisation de la forme (θ_0, A_0^*)
- itérations $n \geq 1$ jusqu'à convergence
  - étant donnée une forme $(\theta_{n-1}, A_{n-1}^*)$, on calcule les contraintes σ_n par résolution d'un problème d'élasticité linéaire (par une méthode d'éléments finis)
  - étant donné ce tenseur des contraintes σ_n, on calcule les nouveaux paramètres de forme (θ_n, A_n^*) avec les formules explicites d'optimalité (8)-(11) faisant intervenir σ_n.

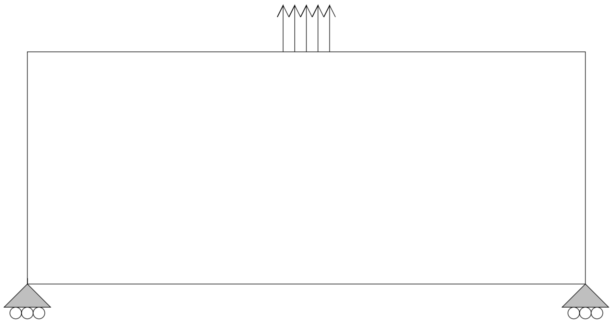

Figure 2: *Chargement d'une poutre 2-D.*

Comme chaque étape de ce procédé itératif est une minimisation partielle, la valeur de la fonction objectif décroit toujours, ce qui assure la convergence de la méthode. La partie d'optimisation des paramètres de formes est locale et facile grâce aux formules explicites. Tout l'effort de calcul porte donc sur la résolution d'une succession de problèmes d'élasticité linéaire. De nombreux calculs ont été effectués avec cet algorithme qui converge très vite indépendemment du choix initial (θ_0, A_0^*) et qui est stable par raffinement du maillage. Nous présentons ici un exemple du type "poutre en flexion" (cf. figure 2).

Evidemment, notre algorithme calcule des formes composites (dont on trace la densité sur la figure 3) alors que dans la pratique on préfère obtenir de vraies formes classiques. Le problème est donc de faire disparaitre les zones composites (en gris sur les figures) pour retrouver une forme nette (image blanc et noir). Pour cela on introduit une technique de pénalisation des densités intermédiaires qui force la densité à ne prendre que les valeurs 0 ou 1. La stratégie est la suivante : après convergence de l'algorithme vers une forme

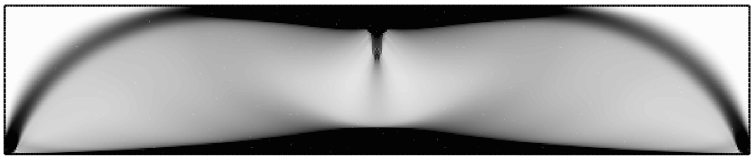

Figure 3: *Poutre composite optimale.*

composite optimale, on effectue encore quelques itérations de l'algorithme en pénalisant les densités intermédiaires. On obtient alors une forme classique capturée sur le maillage fixe. La raison du succès (un peu surprenant au premier abord, cf. figure 4) de cette étape de pénalisation est que la forme composite optimale est aussi caractérisée par une microstructure de perforations à l'échelle sous-maille (c'est-à-dire homogénéisée). Le fait de pénaliser les zones composites conduit l'algorithme à reproduire, au moins partiellement, cette microstructure à l'échelle du maillage. La pénalisation apparait donc comme une projection des formes composites sur des formes classiques. Bien sûr, cette forme classique quasi-optimale ainsi obtenue par projection est très dépendante du maillage. Plus ce dernier sera fin et plus elle incluera de détails liés à l'échelle du maillage. Mais du moins, cette forme classique reste proche du minimum global atteint par la forme composite optimale.

Une des propriétés les plus intéressantes de cette méthode est qu'elle permet d'obtenir des topologies très complexes de formes optimales sans aucune connaissance a priori de la solution. Notre algorithme permet donc de capturer sur un maillage fixe une forme optimale dont la topologie n'est pas fixée ni dictée par le choix des conditions initiales. Bien sûr, les contours de la forme ne sont pas très précis car ils ne coincident pas avec le maillage. Dans ces conditions cette méthode d'optimisation topologique apparait comme un préprocesseur qui peut s'utiliser avant un algorithme classique d'optimisation par variations de frontières. Il n'y a donc pas concurrence, mais plutôt complémentarité, entre ces deux approches.

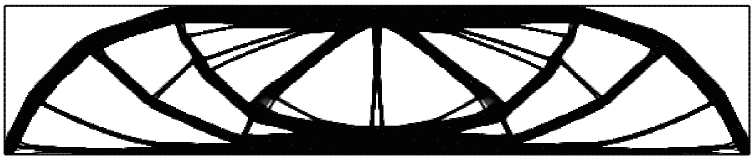

Figure 4: *Poutre optimale après pénalisation.*

Nous renvoyons à [3], [4] pour tous les (nombreux) détails techniques numériques (par exemple, il faut tronquer la densité près de 0 pour éviter une singularité de la loi de Hooke homogénéisée). On peut aussi réintroduire les contraintes technologiques de faisabilité dans l'étape de pénalisation (voir par exemple [7], [29]). Par rapport au travail initial de Bendsoe et Kikuchi [8] qui utilisait comme microstructure une cellule périodique carrée percé d'un trou rectangulaire, notre approche se distingue (entre autres) par l'utilisation de microstructures optimales, à savoir les laminés séquentiels. Il existe de nombreuses généralisations du problème modèle présenté ici. Citons entre autres l'optimisation multi-chargements (avec plusieurs équations d'état), l'optimisation de fréquences propres de vibration, l'optimisation de modèles de plaques (voir par exemple les références dans [7]).

Remerciements Le travail décrit ici a été effectué en grandes parties avec la collaboration de E. Bonnetier, G. Francfort, F. Jouve, et R. Kohn. Qu'ils soient donc remerciés pour leur aide et leur amitié. Je remercie particulièrement François Jouve qui a développé le code

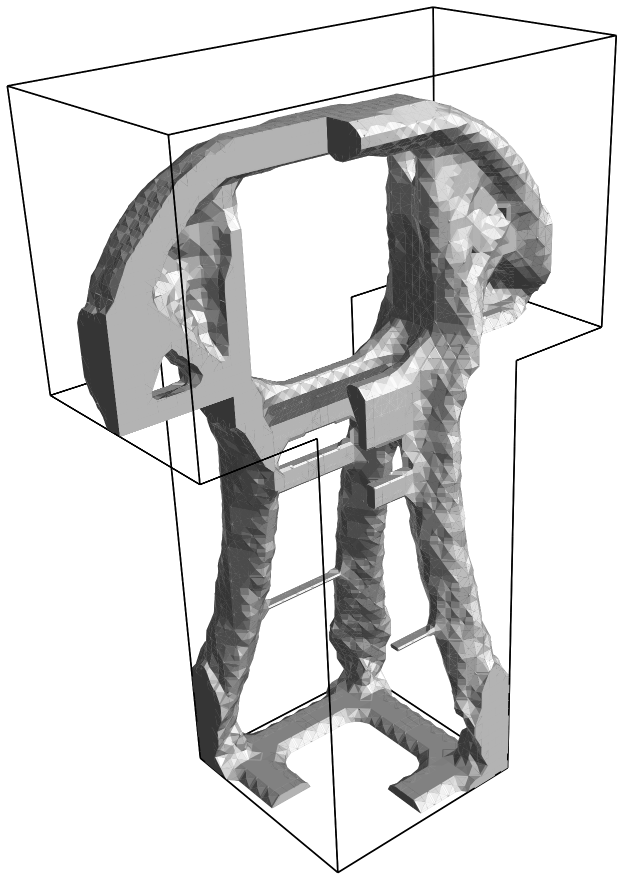

Figure 5: *Pylône optimal en 3-D (déplacements nuls aux quatre coins en bas, forces ponctuelles dirigées vers le bas aux points d'ancrage des cables).*

avec lequel les résultats numériques présentés ici ont été obtenus. Enfin, ce travail a été principalement effectué alors que j'étais chercheur au Commissariat à l'Energie Atomique (CEA DRN/DMT à Saclay).

References

[1] G. Allaire, *Relaxation of structural optimization problems by homogenization,* "Trends in Applications of Mathematics to Mechanics", M.M.Marques and J.F.Rodrigues Eds., Pitman monographs and surveys in pure and applied mathematics 77, pp.237-251, Longman, Harlow (1995).

[2] G. Allaire, Z. Belhachmi, F. Jouve, *The homogenization method for topology and shape optimization. Single and multiple loads case,* Revue Européenne des Eléments Finis, 5, pp.649-672 (1996).

[3] G. Allaire, E. Bonnetier, G. Francfort, F. Jouve, *Shape optimization by the homogenization method,* Numerische Mathematik 76, pp.27-68 (1997).

[4] G. Allaire, R.V. Kohn, *Optimal design for minimum weight and compliance in plane stress using extremal microstructures,* Europ. J. Mech. A/Solids 12, 6, 839-878 (1993).

[5] G. Allaire, R.V. Kohn, *Optimal bounds on the effective behavior of a mixture of two well-ordered elastic materials,* Quat. Appl. Math. 51, 643–674 (1993).

[6] M. Avellaneda, *Optimal bounds and microgeometries for elastic two-phase composites,* SIAM J. Appl. Math., 47, 6, 1216-1228 (1987).

[7] M. Bendsoe, *Methods for optimization of structural topology, shape and material,* Springer Verlag (1995).

[8] M. Bendsoe, N. Kikuchi, *Generating Optimal Topologies in Structural Design Using a Homogenization Method,* Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 71, 197–224 (1988).

[9] M. Bendsoe, C. Mota Soares, Editors, *Topology optimization of structures,* Kluwer Academic Press, Dordrecht (1993).

[10] A. Bensoussan, J.L. Lions, G. Papanicolaou, *Asymptotic analysis for periodic structures,* North-Holland, Amsterdam (1978).

[11] J. Céa, *A numerical method for the computation of an optimal domain,* Lecture Notes in Computer Sciences 41, Springer, New York (1976).

[12] D. Chenais, *On the existence of a solution in a domain identification problem,* J. Math. Anal. Appl. 52, pp.189-289 (1975).

[13] G. Cheng, N. Olhoff, *An investigation concerning optimal design of solid elastic plates,* Int. J. Solids Struct. 16, pp.305-323 (1981).

[14] A. Cherkaev, R. Kohn, Editors, *Topics in the mathematical modelling of composite materials,* Progress in Nonlinear Differential Equations and their Applications, 31, Birkhaüser, Boston (1997).

[15] G. Francfort, F. Murat, *Homogenization and Optimal Bounds in Linear Elasticity,* Arch. Rat. Mech. Anal., 94, 307–334 (1986).

[16] L. Gibianski, A. Cherkaev, *Design of composite plates of extremal rigidity,* (1984), *Microstructures of composites of extremal rigidity and exact bounds of the associated energy density,* Ioffe Physicotechnical Institute preprints (1987).

[17] Z. Hashin, S. Shtrikman, *A variational approach to the theory of the elastic behavior of multiphase materials,* J. Mech. Phys. Solids, 11, 127–140 (1963).

[18] C. Jog, R. Haber, M. Bendsoe, *Topology design with optimized, self-adaptative materials,* Int. Journal for Numerical Methods in Engineering 37, 1323–1350 (1994).

[19] R. Kohn, G. Strang, *Optimal Design and Relaxation of Variational Problems I-II-III,* Comm. Pure Appl. Math., 39, 113–137, 139–182, 353–377 (1986).

[20] K. Lurie, A. Cherkaev, A. Fedorov, *Regularization of Optimal Design Problems for Bars and Plates I,II,* J. Optim. Th. Appl. 37, pp.499-521, 523-543 (1982).

[21] A. Michell, *The limits of economy of material in frame-structures,* Phil. Mag., 8, 589–597 (1904).

[22] G. Milton, *On characterizing the set of possible effective tensors of composites: the variational method and the translation method,* Comm. Pure Appl. Math., XLIII, pp.63-125 (1990).

[23] F. Murat, *Contre-exemples pour divers problèmes où le contrôle intervient dans les coefficients,* Ann. Mat. Pura Appl., 112, 49–68 (1977).

[24] F. Murat, J. Simon, *Studies on optimal shape design problems,* Lecture Notes in Computer Science 41, Springer Verlag, Berlin (1976).

[25] F. Murat, L. Tartar, *Calcul des Variations et Homogénéisation,* Les Méthodes de l'Homogénéisation Théorie et Applications en Physique, Coll. Dir. Etudes et Recherches EDF, Eyrolles, 319–369 (1985).

[26] O. Pironneau, *Optimal shape design for elliptic systems,* Springer-Verlag, New York (1984).

[27] G. Rozvany, *Structural design via optimality criteria,* Kluwer Academic Publishers, Dordrecht (1989).

[28] E. Sanchez-Palencia, *Non homogeneous media and vibration theory,* Lecture notes in physics 127, Springer Verlag (1980).

[29] O. Sigmund, *Design of material structures using topology optimization,* PhD thesis, report S 69, Dept. of Solid Mechanics, Technical University of Denmark (1994).

[30] J. Sokolowski, J.-P. Zolezio, *Introduction to shape optimization. Shape sensitivity analysis,* Springer Verlag (1992).

[31] K. Suzuki, N. Kikuchi, *A homogenization method for shape and topology optimization,* Comp. Meth. Appl. Mech. Eng., 93, 291–318 (1991).