Résolution numérique d'un problème de Poisson avec des éléments finis P^1

13 octobre 2016

1 Problème de Poisson avec conditions de Neumann et coefficients constants

Soit Ω un ouvert borné à frontière polygonale de $\mathbb{R}^2$ et $f \in L^2(\Omega)$. On s'intéresse à la résolution numérique du problème de Poisson avec condition aux limites de Neumann :
Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{ll} u - \Delta u = f & \text{dans } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial n} = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. . \tag{1}$$

Question 1. Ecrire la formulation variationnelle du problème et montrer que le problème est bien posé.

1.1 Discrétisation

Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation du domaine Ω, et V_h l'approximation de $H^1(\Omega)$ par des éléments finis P^1 associés à la triangulation $\mathcal{T}_h$. On note $(T_\ell)_{\ell=1,L}$ les triangles de $\mathcal{T}_h$, $(S_I)_{I=1,N}$ les sommets des triangles et $(w_I)_{I=1,N}$ la base de V_h définie par $w_I(S_J) = \delta_{IJ}$, $1 \leq I, J \leq N$.

Question 2. Quelle est la formulation variationnelle discrète vérifiée par la solution approchée u_h ?

Question 3. Par construction, la solution approchée s'écrit sous la forme

$$u_h(x,y) = \sum_{I=1}^{N} u_h(S_I) w_I(x,y), \qquad \forall\ (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Exprimer la formulation variationnelle discrète sous la forme d'un système linéaire équivalent :

$$(\mathbb{M} + \mathbb{K})\vec{U} = \vec{L}\,, \tag{2}$$

de solution le vecteur $\vec{U} \in \mathbb{R}^N$ dont la $I^{\text{ème}}$ composante vaut $u_h(S_I)$. Ci-dessus, $\mathbb{M}$ est la matrice de masse et $\mathbb{K}$ est la matrice de rigidité.

Quelles sont les propriétés fondamentales des matrices $\mathbb{M}$ et $\mathbb{K}$?

1.2 Maillages

On veut résoudre le problème dans un ouvert Ω qui est carré.

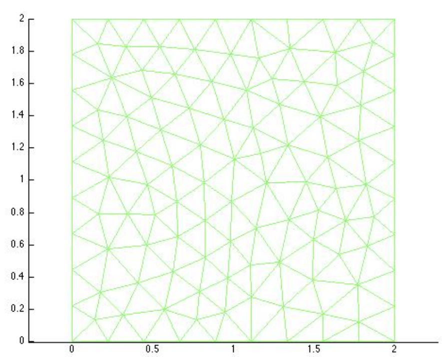

Figure 1 – Domaine Ω.

Pour mailler Ω, on choisit le mailleur `Gmsh`. Pour réaliser les calculs, on s'appuie sur `Matlab`. En `Matlab`, la routine `principal_neumann.m` sera le programme principal pour résoudre (2). Les matrices élémentaires seront codées dans `matK_elem.m` et `matM_elem.m`.

Question 4. Pour créer des maillages de l'ouvert carré, voici la procédure à suivre :

— Modifier le fichier `geomCarre.geo` en l'ouvrant avec un éditeur de texte. Par exemple, pour changer le pas du maillage, modifier la valeur de h. Enregistrer les changements.
— Lancer `Gmsh` dans un terminal et ouvrir le fichier `geomCarre.geo`.
— Dans la fenêtre `Gmsh`, menu du haut, choisir "`Mesh`". Cliquer ensuite sur "`2D`".
— Pour sauvegarder le maillage ainsi créé, choisir "`Save Mesh`" dans le menu "`File`".

Un fichier `geomCarre.msh` a été créé.

Attention : le nom du fichier maillage `.msh` est *par défaut* celui du fichier géométrie `.geo`.

Question 5. Afficher le maillage précédemment créé à l'aide de la routine `affichemaillage.m`.

Question 6. Quelle est la signification des structures de données

`Nbpt,Nbtri,Coorneu,Refneu,Numtri,Reftri,Nbaretes,Numaretes,Refaretes` ?

Les données `Refneu,Nbaretes,Numaretes,Refaretes` ne seront pas utilisées pour l'instant.

1.3 Calcul des Matrices élémentaires

Pour calculer les matrices élémentaires sur un triangle, on peut utiliser les formules ci-dessous. Soit T_ℓ un triangle de sommets $S_1(x_1, y_1)$, $S_2(x_2, y_2)$, et $S_3(x_3, y_3)$, nous pouvons utiliser les formules de quadrature suivantes :

$$\int_{T_\ell} F \, d\Omega = \text{aire}(T_\ell) \, F\left(\frac{S_1 + S_2 + S_3}{3}\right) \qquad \text{pour } F \in \mathbb{P}^0.$$

$$\int_{T_\ell} F \, d\Omega = \frac{\text{aire}(T_\ell)}{3} \, \left(F(S_1) + F(S_2) + F(S_3)\right) \qquad \text{pour } F \in \mathbb{P}^1.$$

$$\int_{T_\ell} F\, d\Omega = \frac{\text{aire}(T_\ell)}{3} \left(F(\frac{S_1+S_2}{2}) + F(\frac{S_1+S_3}{2}) + F(\frac{S_3+S_2}{2})) \right) \qquad \text{pour } F \in \mathbb{P}^2.$$

En déduire pour tout triangle T_ℓ, et toutes fonctions de base w_I et w_J, les intégrales

$$\int_{T_\ell} w_I w_J \, d\Omega \quad \text{et} \quad \int_{T_\ell} \nabla w_I \cdot \nabla w_J \, d\Omega$$

On rappelle que les fonctions de base locales sont égales aux coordonnées barycentriques λ_1, λ_2 et λ_3. En un point (x, y) du triangle, celles-ci sont données par les formules suivantes :

$$\begin{aligned}
\lambda_1(x,y) &= \frac{1}{D}(y_{23}(x-x_3) - x_{23}(y-y_3)) \\
\lambda_2(x,y) &= \frac{1}{D}(y_{31}(x-x_1) - x_{31}(y-y_1)) \\
\lambda_3(x,y) &= \frac{1}{D}(y_{12}(x-x_2) - x_{12}(y-y_2))
\end{aligned}$$

où $x_{ij} = x_i - x_j$, $y_{ij} = y_i - y_j$ pour i et j différents dans $\{1, 2, 3\}$, et $D = x_{23}y_{31} - x_{31}y_{23}$. Notons que D est égal, au signe près, à deux fois la surface du triangle.

Question 7. Soit T_ℓ un triangle de sommets $S_1(x_1, y_1)$, $S_2(x_2, y_2)$ et $S_3(x_3, y_3)$. Compléter les routines `matK_elem.m` et `matM_elem.m` qui à partir des coordonnées des 3 sommets d'un triangle donnent respectivement les matrices élémentaires de rigidité et de masse.

Il est conseillé de vérifier le calcul des matrices élémentaires en le comparant à un calcul fait à la main pour le triangle de référence (composé des sommets $(0,0)$*,* $(1,0)$ *et* $(0,1)$*).*

1.4 Assemblage des matrices

On rappelle l'algorithme d'assemblage

$\mathbb{M} = 0$, $\mathbb{K} = 0$

Pour $\ell = 1, L$

  Détermination des coordonnées des sommets du triangle ℓ

  Calcul des contributions élémentaires $\mathbb{M}^\ell$, $\mathbb{K}^\ell$

  Pour $i = 1, 3$

    $I = \text{local} \to \text{global}(\ell, i)$

    Pour $j = 1, 3$

      $J = \text{local} \to \text{global}(\ell, j)$

      $\mathbb{M}_{IJ} = \mathbb{M}_{IJ} + \mathbb{M}^\ell_{ij}$ et $\mathbb{K}_{IJ} = \mathbb{K}_{IJ} + \mathbb{K}^\ell_{ij}$

    Fin pour j

  Fin pour i

Fin pour ℓ

Question 8. Compléter la partie assemblage des matrices $\mathbb{M}$ et $\mathbb{K}$.

Question 9. Calcul du second membre

Question 9(a) On suppose dans un premier temps que $f = 1$. En remarquant que $1 \in V_h$, calculer le vecteur second membre $\vec{L}$ à partir de la matrice de masse $\mathbb{M}$ et d'un vecteur calculé dans la routine `f.m`.

Question 9(b) Rappeler l'expression du second membre $\vec{L}$ pour une donnée générale $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$. En approchant la donnée f par son interpolation $\pi_h f$ dans la base $(w_I)_{I=1,N}$, donner une approximation du second membre $\vec{L}$ faisant intervenir la matrice de masse.

On admettra que quand on remplace f par son interpolée $\pi_h f$ de V_h, l'approximation par des éléments finis P^1 du problème n'est pas altérée.

1.5 Validation

On veut vérifier que le code calcule une solution approchée u_h correcte. Pour cela, on résout le problème (1) avec une solution u connue égale à $u(x, y) = \cos(\pi x)\, \cos(2\pi y)$, pour $(x, y) \in \overline{\Omega}$.

Question 10. Calculer la donnée f correspondante et modifier la routine `f.m`.

Question 11. En assimilant u à son interpolée $\pi_h u$, donner une estimation de la norme L^2 de l'erreur, $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$, faisant intervenir la matrice de masse $\mathbb{M}$. Comment évolue cette erreur en fonction de h ? On pourra tracer $\log(1/h) \mapsto \log\left(\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}/\|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$ pour différentes valeurs de h.

Question 12. En assimilant u à son interpolée $\pi_h u$, donner une estimation de la semi-norme H^1 de l'erreur, $|u - u_h|_1 = \|\nabla u - \nabla u_h\|_{L^2(\Omega)^2}$, faisant intervenir la matrice de rigidité $\mathbb{K}$. Comment évolue cette erreur en fonction de h ? On pourra tracer $\log(1/h) \mapsto \log\left(|u - u_h|_1/|u|_1\right)$ pour différentes valeurs de h.

2 Problème de Poisson avec conditions de Neumann et coefficients constants

Soit Ω un ouvert borné à frontière polygonale de $\mathbb{R}^2$, A un tenseur qui est uniformément borné et satisfait l'hypothèse de coercivité uniforme

$$\exists\, 0 < c < C,\ \forall x \in \Omega,\ \forall \xi \in \mathbb{R}^2, \quad c|\xi|^2 \leq A(x)\xi \cdot \xi \leq C|\xi|^2$$

et $f \in L^2(\Omega)$. On s'intéresse à la résolution numérique du problème de Poisson avec coefficients variables et condition aux limites de Neumann :
Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

$$\left\{ \begin{array}{ll} u - \nabla \cdot (A(x)\nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ A(x)\nabla u \cdot n = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. . \tag{3}$$

où n est la normale unitaire sortante à Ω

Question 1. Ecrire la formulation variationnelle du problème et montrer que le problème est bien posé.

Question 2. En utilisant l'espace de discrétisation V_h introduit dans la partie précédente, écrire la formuation variationnelle discrète vérifiée par la solution approchée u_h

2.1 Calcul des matrices élémentaires

La routine `principal_periodique.m` est le programme principal pour résoudre le problème (8).

Question 3. Une nouvelle difficulté apparait dans le calcul des matrices élémentaires : la prise en compte des coefficients variables. En effet, les intégrales

$$\int_{T_\ell} A(M)\nabla w_I(M) \cdot \nabla w_J(M)\, d\Omega$$

ne peuvent pas toujours être calculées exactement. Nous allons approcher ces intégrales à l'aide de formules de quadratures dites à N points : pour F une fonction continue par morceaux de T_ℓ

$$\int_{T_\ell} F\, d\Omega \simeq \sum_{q=1}^{N} \omega_\ell^q F(M_\ell^q).$$

où M_ℓ^q sont des points de quadrature dans T_ℓ et ω_ℓ^q les poids positifs associés aux points de quadrature. Il existe de nombreux points de quadrature (Gauss, Gauss-Lobatto,...) qui fournissent des approximations des intégrales. Ces méthodes se différencient par le fait qu'elles intègrent exactement les polynômes d'un ordre donné , ce qui caractérise leur précision. On utilisera ici la formule de quadrature à 7 points de Gauss Lobatto qui est d'ordre 5 et qui est définie sur le triangle de référence $\hat{T}$ par

$\hat{M}^q$	(s_0, s_0)	(s_1, s_1)	(s_1, s_3)	(s_3, s_1)	(s_2, s_2)	(s_2, s_4)	(s_4, s_2)
$\hat{\omega}^q$	ω_0	ω_1	ω_1	ω_1	ω_2	ω_2	ω_2

avec

$$s_0 = \frac{1}{3},\ s_1 = \frac{6-\sqrt{15}}{21},\ s_2 = \frac{6+\sqrt{15}}{21},\ s_3 = \frac{9+2\sqrt{15}}{21},\ s_4 = \frac{9-2\sqrt{15}}{21}$$

et

$$\omega_0 = \frac{9}{80},\ \omega_1 = \frac{155-\sqrt{15}}{2400},\ \omega_2 = \frac{155+\sqrt{15}}{2400}.$$

Pour chaque triangle T_ℓ, nous allons utiliser la transformation géométrique F_ℓ qui envoie le triangle de référence $\hat{T}$ dans T_ℓ. En effectuant le changement de variable $M = F_\ell(\hat{M})$, l'intégrale sur T_ℓ devient

$$(4) \quad \int_{T_\ell} A(M)\nabla w_I(M) \cdot \nabla w_J(M)\, d\Omega =$$
$$\int_{\hat{T}} A(F_\ell(\hat{M}))[dF_\ell(\hat{M})^T]^{-1}\nabla \hat{w}_I(\hat{M}) \cdot [dF_\ell(\hat{M})^T]^{-1}\nabla \hat{w}_J(\hat{M})\, |\det dF_\ell(\hat{M})|\, d\hat{\Omega}$$

où $dF_\ell(\hat{M})$ est la matrice jacobienne en $\hat{M}$.

À l'aide de ces éléments, modifier le calcul de la matrice de rigidité élémentaire.

Question 4. Valider le calcul de la matrice élémenataire dans le cas où A est l'identité puis seulement diagonale, pour le triangle de référence puis pour un triangle quelconque. On pourra comparer au calcul de la matrice élémentaire fait dans la partie précédente.

2.2 Validation du code

On veut vérifier que le code calcule une solution approchée u_h correcte. Pour cela, on résout le problème (3) avec une solution u que vous choisirez.

Question 5. Calculer la donnée f correspondante et modifier la routine `f.m`.

Question 6. En assimilant u à son interpolée $\pi_h u$, tracer $\log(1/h) \mapsto \log\left(\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}/\|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$ pour différentes valeurs de h.

Question 7. En assimilant u à son interpolée $\pi_h u$, tracer $\log(1/h) \mapsto \log\left(|u - u_h|_1/|u|_1\right)$ pour différentes valeurs de h.

3 Problème de Poisson avec conditions de Dirichlet et coefficients variables

Soit Ω un ouvert borné à frontière polygonale de $\mathbb{R}^2$, A un tenseur qui est uniformément borné et satisfait l'hypothèse de coercivité uniforme et $f \in L^2(\Omega)$. On s'intéresse à la résolution numérique du problème de Poisson avec

condition aux limites de Dirichlet :
Trouver $u \in H^1(\Omega)$ *telle que*

$$\left\{ \begin{array}{ll} u - \nabla \cdot (A \nabla u) = f & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{array} \right. . \tag{5}$$

Question 1. Ecrire la formulation variationnelle du problème et montrer que le problème est bien posé dans $H^1_0(\Omega)$.

3.1 Maillages

On veillera à donner une référence particulière aux nœuds du bord.

3.2 Discrétisation

Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation du domaine Ω, et V_h l'approximation de $H^1(\Omega)$ par des éléments finis P^1 associés à la triangulation $\mathcal{T}_h$. On note $(T_\ell)_{\ell=1,L}$ les triangles de $\mathcal{T}_h$, $(M_I)_{I=1,N}$ les sommets des triangles et $(w_I)_{I=1,N}$ la base de V_h définie par $w_I(M_J) = \delta_{IJ}$, $1 \leq I, J \leq N$.

Pour définir une approximation interne de $H^1_0(\Omega)$, on procède de la façon suivante : on suppose que les nœuds de la frontière $\partial\Omega$ sont numérotés de $N_0 + 1$ à N (et que les nœuds à l'intérieur sont numérotés de 1 à N_0). On introduit :

$$V_h^0 \;=\; \text{Vect}\,(w_1, \ldots, w_{N_0})\,.$$

Par construction, $V_h^0 \;\subset\; H^1_0(\Omega)$.

Question 2. Quelle est la formulation variationnelle discrète vérifiée par la solution approchée u_h ?

Question 3. La solution approchée u_h s'écrit sous la forme

$$u_h(x,y) \;=\; \sum_{I=1}^{N_0} u_h(M_I) w_I(x,y), \qquad \forall\ (x,y) \in \overline{\Omega}.$$

Exprimer la formulation variationnelle discrète sous la forme d'un système linéaire équivalent :

$$\mathbb{A}^0 \vec{U}^0 = \vec{L}^0\,, \tag{6}$$

où la $I^{\text{ème}}$ composante du vecteur $\vec{U}^0 \in \mathbb{R}^{N_0}$ vaut $u_h(M_I)$ et où on écrira $\mathbb{A}^0 = \mathbb{M}^0 + \mathbb{K}^0$, avec $\mathbb{M}^0$ la matrice de masse, et $\mathbb{K}^0$ la matrice de rigidité. Quelles sont les propriétés fondamentales de la matrice $\mathbb{A}^0$? Comme pour le problème précédent, pour une donnée $f \in \mathcal{C}^0(\overline{\Omega})$, le second membre $\vec{L}^0$ sera construit à l'aide d'une technique d'interpolation.

Question 4. Dans la pratique, plutôt que de résoudre le système linéaire (6), on préfère résoudre

$$\widetilde{\mathbb{A}}\vec{U} = \widetilde{\vec{L}}, \tag{7}$$

obtenu à l'aide de la technique de *pseudo-élimination*. Cette technique consiste à transformer $\mathbb{A}$ et $\mathbb{L}$ respectivement en (si on suppose que les nœuds de la frontière $\partial\Omega$ sont numérotés de $N_0 + 1$ à N)

$$\begin{pmatrix} \mathbb{A}^0 & 0 \\ 0 & \alpha\,\mathbb{I} \end{pmatrix} \text{ et } \begin{pmatrix} \mathbb{L}^0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

avec $\alpha \in \mathbb{R}$ et $\alpha \neq 0$ (la matrice de masse doit rester inversible).
En général, la numérotation n'est pas aussi simple. Pour savoir si un nœud est sur la frontière ou non, on utilise le tableau `RefNeu`. Ecrire l'algorithme qui permet de pseudo-éliminer dans le cas général les matrices $\widetilde{\mathbb{A}} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ et $\widetilde{\vec{L}} \in \mathbb{R}^N$.

3.3 Assemblage des matrices et vecteur second membre

La routine `principal_dirichlet.m` est le programme principal pour résoudre le problème (5).

Question 5. Reprendre la partie assemblage de l'exercice précédent, permettant de construire la matrice $\mathbb{A} = \mathbb{M} + \mathbb{K}$ et le vecteur $\vec{L}$, *avant la pseudo-élimination*.

Question 6. Ecrire une routine `matlab` dont la syntaxe est

```
[tilde_AA, tilde_LL] = elimine(AA, LL, Refneu)
```

qui réalise la pseudo-élimination des nœuds `i` correspondant à `Refneu(i)=1`.
Insérer un appel à cette routine à un endroit approprié dans `principal_dirichlet.m`.

3.4 Validation du code

On veut vérifier que le code calcule une solution approchée u_h correcte. On veut vérifier que le code calcule une solution approchée u_h correcte. Pour cela, on résout le problème (5) avec une solution u que vous choisirez.

Question 7. Calculer la donnée f correspondante et modifier la routine `f.m`.

Question 8. En assimilant u à son interpolée $\pi_h u$, donner une estimation de la norme L^2 de l'erreur, $\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}$, faisant intervenir la matrice de masse $\mathbb{M}^0$. Tracer $\log(1/h) \mapsto \log\big(\|u - u_h\|_{L^2(\Omega)}/\|u\|_{L^2(\Omega)}\big)$ pour différentes valeurs de h.

Question 9. En assimilant u à son interpolée $\pi_h u$, donner une estimation de la semi-norme H^1 de l'erreur, $|u - u_h|_1 = \|\nabla u - \nabla u_h\|_{L^2(\Omega)^2}$, faisant intervenir la matrice de rigidité $\mathbb{K}^0$. Tracer $\log(1/h) \mapsto \log\big(|u - u_h|_1/|u|_1\big)$ pour différentes valeurs de h.

4 Problème de Poisson dans un carré avec conditions périodiques et coefficients variables

Soit $\Omega = [0, L]^2$ un carré de taille L, A un tenseur qui uniformément borné et satisfait l'hypothèse de coercivité uniforme et $f \in L^2(\Omega)$. On s'intéresse à la résolution numérique du problème de Poisson avec condition aux limites périodique et coefficients variables :

Trouver $u \in H^1(\Omega)$ telle que

(8)

$$\begin{cases} u - \nabla \cdot \big(A(x)\nabla u\big) = f \quad \text{dans } \Omega \\ u|_{x=0} = u|_{x=L} \text{ et } u|_{y=0} = u|_{y=L} \\ A(x)\nabla u \cdot e_x\Big|_{x=0} = A(x)\nabla u \cdot e_x\Big|_{x=L} \text{ et } A(x)\nabla u \cdot e_y\Big|_{y=0} = A(x)\nabla u \cdot e_y\Big|_{y=L} \end{cases} .$$

Question 1. Ecrire la formulation variationnelle du problème et montrer que le problème est bien posé dans $H^1_\#(\Omega)$.

4.1 Discrétisation

Soit $\mathcal{T}_h$ une triangulation **périodique** du domaine Ω, et V_h l'approximation de $H^1(\Omega)$ par des éléments finis P^1 associés à la triangulation $\mathcal{T}_h$. On note $(T_\ell)_{\ell=1,L}$ les triangles de $\mathcal{T}_h$, $(M_I)_{I=1,N}$ les sommets des triangles et $(w_I)_{I=1,N}$ la base de V_h définie par $w_I(M_J) = \delta_{IJ}$, $1 \leq I, J \leq N$. La triangulation est **périodique** si M_I est un noeud appartenant au bord droit (resp. au bord bas) si et seulement si il existe un noeud M_J appartenant au bord gauche (resp. au bord haut) ayant la même abscisse (resp. la même ordonnée).

Pour définir une approximation interne de $H^1_{\#}(\Omega)$, on procède de la façon suivante. Tout d'abord, toutes les fonctions de base correspondant à des nœuds intérieurs sont dans l'espace d'approximation $V_h^{\#}$. Ensuite pour tout noeud M_I de la frontière $x = 0$ (resp. $y = 0$), on sait qu il existe un nœud M_J de la frontière $x = L$ (resp. $y = L$) ayant la même abscisse (resp. la même ordonnée), il suffit alors d'effectuer la somme des 2 fonctions de base correspondantes qui est dans l'espace d'approximation $V_h^{\#}$. Par construction, $V_h^{\#} \subset H^1_{\#}(\Omega)$.

Question 2. Quelle est la formulation variationnelle discrète vérifiée par la solution approchée u_h ?

Question 3. Etendre la technique de pseudo-élimination vue pour les conditions de dirichlet aux conditions périodiques. Ecrire l'algorithme qui permet de pseudo-éliminer dans le cas général les matrices $\widetilde{\mathbb{A}} \in \mathbb{R}^{N\times N}$ et $\widetilde{\vec{L}} \in \mathbb{R}^N$.

4.2 Assemblage des matrices et vecteur second membre

La routine `principal_periodique.m` est le programme principal pour résoudre le problème (8).

Question 4. Reprendre la partie assemblage de la partie 1, permettant de construire la matrice $\mathbb{A} = \mathbb{M}+\mathbb{K}$ et le vecteur $\vec{L}$, *avant la pseudo-élimination.*

Question 5. Ecrire une routine `matlab` dont la syntaxe est

```
[tilde_AA, tilde_LL] = elimine_periodique(AA, LL, Refneu)
```

qui réalise la pseudo-élimination. Insérer un appel à cette routine à un endroit approprié dans `principal_periodique.m`.

Contrairement aux conditions de Dirichlet, après avoir inversé le système linéaire, pour la représentation graphique ,il faut penser à modifier la solution aux niveaux des noeuds qui ont été "pseudo-éliminé".

4.3 Validation du code

On veut vérifier que le code calcule une solution approchée u_h correcte. Pour cela, on résout le problème (8) avec une solution u que vous choisirez.

Question 6. Calculer la donnée f correspondante et modifier la routine `f.m`.

Question 7. En assimilant u à son interpolée $\pi_h u$, tracer $\log(1/h) \mapsto \log\left(\|u-u_h\|_{L^2(\Omega)}/\|u\|_{L^2(\Omega)}\right)$ pour différentes valeurs de h.

Question 8. En assimilant u à son interpolée $\pi_h u$, tracer $\log(1/h) \mapsto \log\left(|u-u_h|_1/|u|_1\right)$ pour différentes valeurs de h.