

Ecole Polytechnique
MODAL MAP441B-SNE
Méthode de Transformée de Fourier Rapide et
Applications

La transformée de Fourier joue un rôle essentiel dans la résolution d'EDP linéaires ou non-linéaires. Sa version discrète (qui correspond à la décomposition en série de Fourier de fonctions périodiques discrétisée en espace) permet elle aussi de résoudre des approximations numériques d'EDP. Dans ce MODAL, nous proposons d'explorer l'utilisation de la transformée de Fourier discrète pour les approximations numériques d'EDP. Nous proposons d'explorer les pistes suivantes par ordre croissant de difficulté:

- Utilisation et mise en œuvre de la DFT (dicrete Fourier transform)
- DFT et interpolation
- La révolution de la FFT (Fast Fourier Transform)
- La NUFFT (Non uniform FFT) de Rokhlin et Greengard

Sommairement, la DFT consiste, étant donnés un entier N et des valeurs (complexes) $(f_n)_{0 \leq n \leq N-1}$ à calculer $(\hat{f}_k)_{0 \leq k \leq N-1}$ définis par

$$\hat{f}_k = \sum_{n=0}^N \exp\left(-\frac{2i\pi kn}{N}\right) f_n.$$

La formule de tranformation inverse existe également et l'on a

$$f_n = \frac{1}{N} \sum_{k=0}^N \exp\left(\frac{2i\pi kn}{N}\right) \hat{f}_k.$$

Chacune des deux formules peut également s'écrire sous la forme d'un produit matrice-vecteur

$$\hat{F} = AF \text{ et } F = A^{-1}\hat{F}$$

dans lesquelles les coefficients de la matrice A , de taille $n \times n$ sont donnés par les exponentielles complexes. De manière remarquable, la FFT permet d'effectuer les produits matrice-vecteur précédents avec un nombre d'opérations proportionnel à $N \log(N)$ alors que la matrice A contient N^2 termes.