Ecole Polytechnique
MODAL MAP441B-SNE-SNA
Equation de la chaleur et résolution Monte-Carlo multi-niveaux (pour binôme mixte SNA-SNE)

De nombreux phénomènes physiques sont décrits par un modèle mathématique, constitué souvent d'équations aux dérivées partielles (EDP), qui de façon remarquable ont une représentation probabiliste. Par exemple en *thermique*, la répartition stationnaire de la température u dans un milieu thermiquement conducteur est décrite par la loi de Fourier $q = -K\nabla u$ reliant le flux de chaleur q au gradient de température (K étant la conductivité thermique du milieu). La conservation de l'énergie s'exprime en fonction des sources de chaleur c par $\mathrm{div}(q) = c$, ce qui donne au final une équation de type

$$-\mathrm{div}(K\nabla u) = c. \tag{1}$$

Il convient d'adjoindre à cette équation des conditions aux limites du milieu $D \subset \mathbb{R}^d$ (la dimension physique est $d = 3$), imposant par exemple que la température au bord ∂D est égale à g, soit

$$u = g \text{ sur } \partial D. \tag{2}$$

Nous supposons ici une conductivité thermique constante K: ainsi les équations aboutissent à l'*équation de chaleur* avec *condition au bord de Dirichlet*

$$\frac{1}{2}\triangle u = f \text{ dans } D, \qquad u = g \text{ sur } \partial D, \tag{3}$$

où $f := -\frac{c}{2K}$ et où l'écriture avec le facteur $\frac{1}{2}$ est choisie par convention en vue de la représentation probabiliste qui suit. Depuis les années 50 et notamment les travaux de Kac [Kac49], on sait représenter la solution $(u(x); x \in D)$ comme l'espérance d'une fonctionnelle de la trajectoire du mouvement brownien[1]$W = (W_t)_{t\geq 0}$ partant de $x \in D$ en $t = 0$ et arrêté au premier instant τ où il touche la frontière ∂D. Cela s'écrit

$$u(x) = \mathbb{E}_x\left(g(W_\tau) - \int_0^\tau f(W_s)ds\right). \tag{4}$$

Cette représentation, qui porte le nom de formule de Feynman-Kac, permet alors d'évaluer ponctuellement $u(x)$ à l'aide d'un grand nombre de simulations Monte-Carlo des trajectoires browniennes.

[1]processus W continu d-dimensionnel, à composantes indépendantes, dont chaque composante $W^{(k)}$ est à accroissements indépendants avec $W_t^{(k)} - W_s^{(k)}$ ($t > s$) de loi gaussienne centrée de variance $t - s$.

Objectifs. Il s'agit de tester un algorithme Monte-Carlo qui calcule $u(x)$ en tout point, à l'aide de la méthode multi-niveaux exposée dans [Hei01]: cette approche combine un procédé d'approximation de fonction sur des grilles de points de D et des simulations de trajectoires partant de ces points, le tout étant couplé via un raffinement progressif[2] des grilles. Les points à aborder

- s'approprier les outils et résultats développés dans [Hei01],
- comparer avec une méthode de discrétisation d'EDP (partie SNE).

Pour le choix du domaine, on pourra prendre une géométrie simple (approximativement rectangulaire), inspirée par exemple d'un *casert d'élève* ou d'une *salle de cours*. La source de chaleur décrite par la fonction f sera par exemple celle d'un radiateur ou d'une fenêtre ouverte vers l'extérieur froid. On pourra commencer les tests en dimension $d = 2$ avant de poursuivre en dimension 3.

La simulation des temps de sortie du mouvement brownien pourra s'inspirer de discrétisation simple du mouvement brownien ou de procédures plus avancées comme décrites dans [GM10][Gob3A].

References

[Hei01] S. Heinrich. Multilevel Monte Carlo Methods. In *LSSC '01 Proceedings of the Third International Conference on Large-Scale Scientific Computing*, volume 2179 of *Lecture Notes in Computer Science*, pages 58–67. Springer-Verlag, 2001.

[GM10] E. Gobet and S. Menozzi. Stopped diffusion processes: boundary corrections and overshoot. *Stochastic Processes and Their Applications*, 120:130–162, 2010.

[Gob3A] E. Gobet. *Méthodes de Monte-Carlo et processus stochastiques: du linéaire au non-linéaire*. Cours de l'Ecole Polytechnique, MAP564, 3A.

[Kac49] M. Kac. On distributions of certain Wiener functionals. *Trans. Amer. Math. Soc.*, 65:1–13, 1949.

[2] par niveaux