



Transfert radiatif en milieu hétérogène

J-F.Clouët
CEA, Bruyères le Châtel

Journée EDP/probas
IHP, Septembre 2008



- Motivations: transfert radiatif dans les plasmas
 - (Applications astrophysiques)
 - Applications pour les cibles de fusion par confinement inertiel
 - Mise en évidence expérimentale de l'effet d'hétérogénéité dans l'expérience de P.Keiter

- Modélisation
 - Equation du transport des photons
 - Modèles de milieux aléatoires
 - Mise en évidences des grandeurs caractéristiques

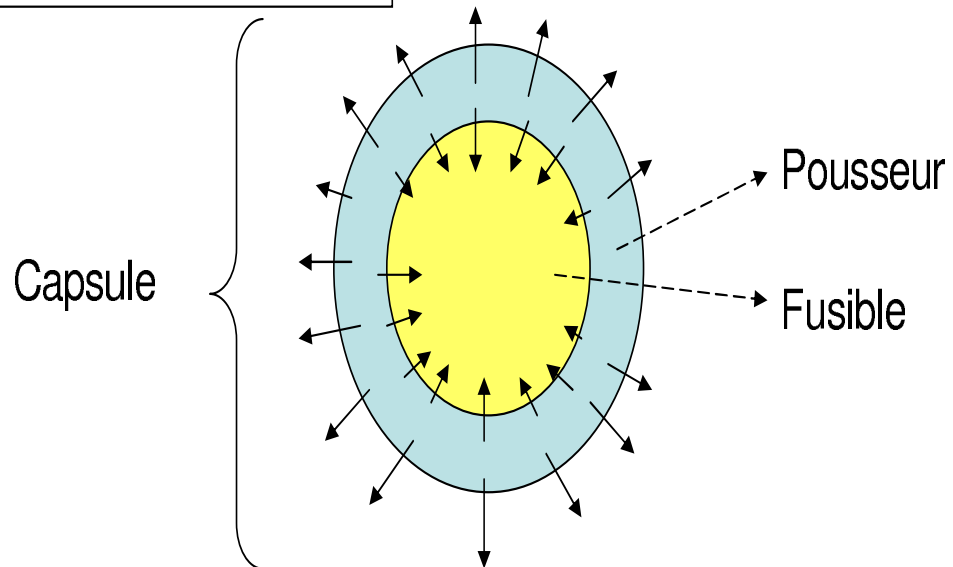
- Questions mathématiques
 - Validité de l'approximation par la diffusion
 - Calcul effectif des coefficients de transport dans le mélange

- Problèmes ouverts
 - Lien avec les problèmes de billards
 - Prise en compte des non-linéarités
 - Prise en compte de l'hydrodynamique



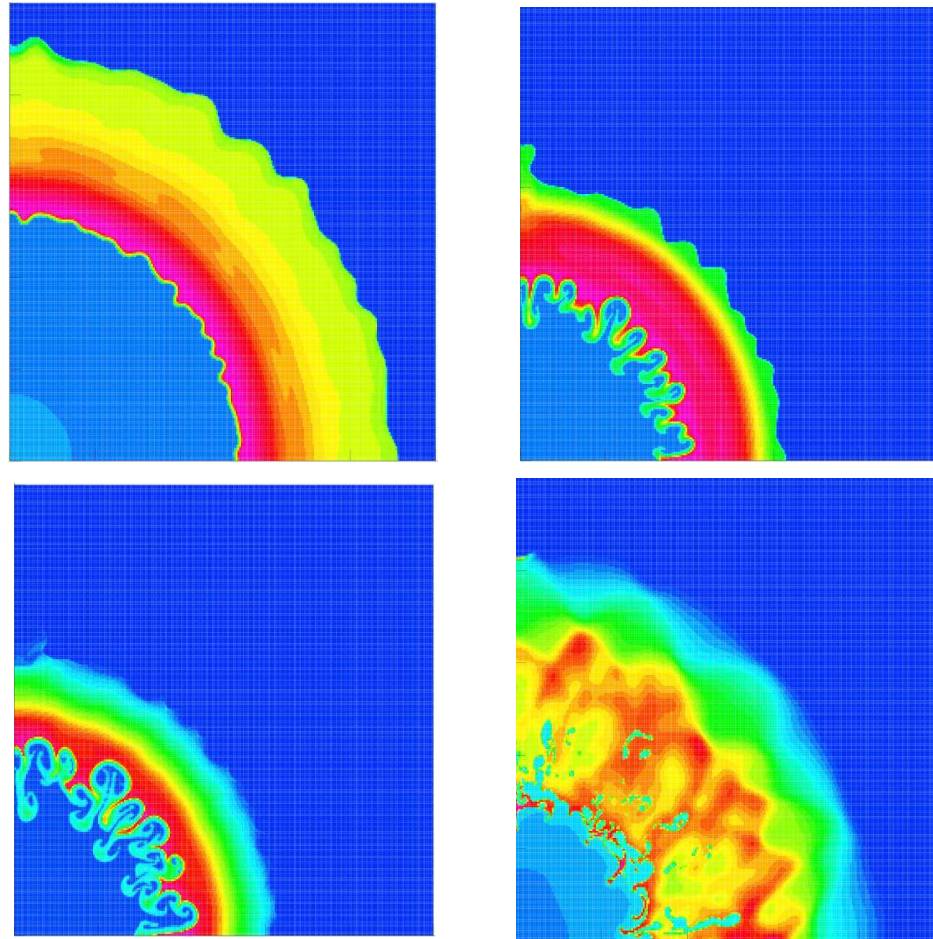
La fusion par confinement inertiel
consiste à mettre en condition un fusible
(DT) par implosion d'une coquille de
matériau plus lourd (CH, Or, ...)

Rayonnement Laser ou X



Cette implosion est hydrodynamiquement instable:

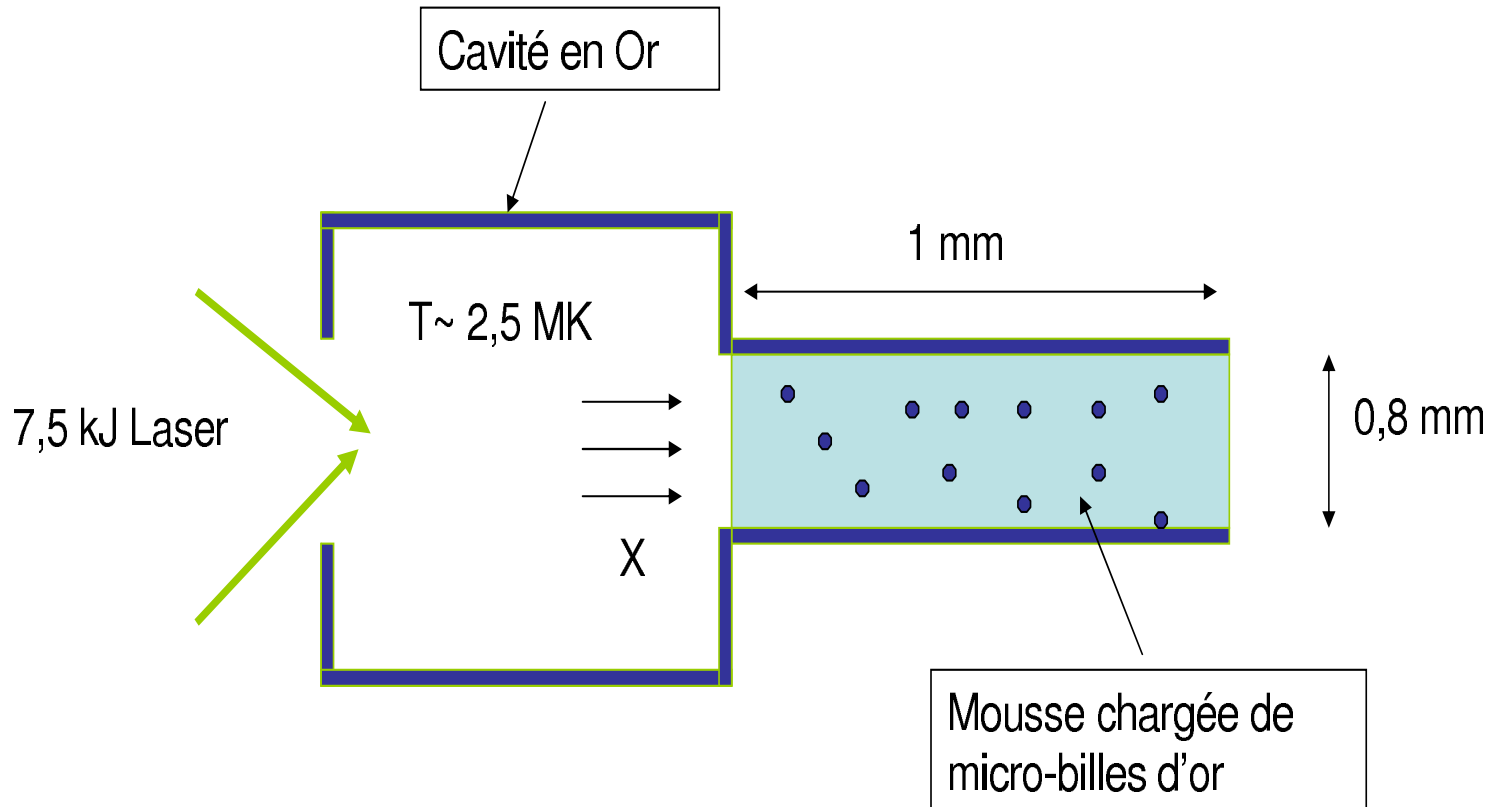
Perturbations d'interfaces → amplification linéaire puis non-linéaire des défauts
→ transition vers un mélange +/- turbulent



Carte de densité pendant l'implosion et la combustion
(Simulation de J-P.Leidinger, CEA)

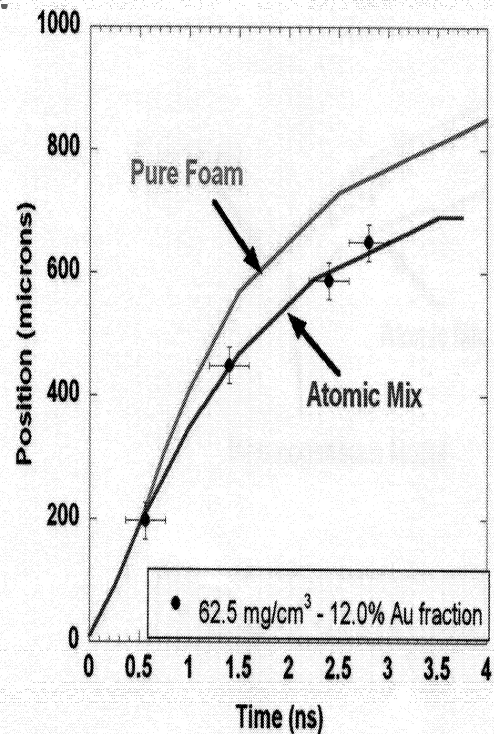
⇒ besoin de modèles simples de transport de rayonnement dans le mélange Pousseur/Fusible en alternative à la simulation directe. 4

Expérience de Paul Keiter et al. (Physics of Plasma, 15, (2008))

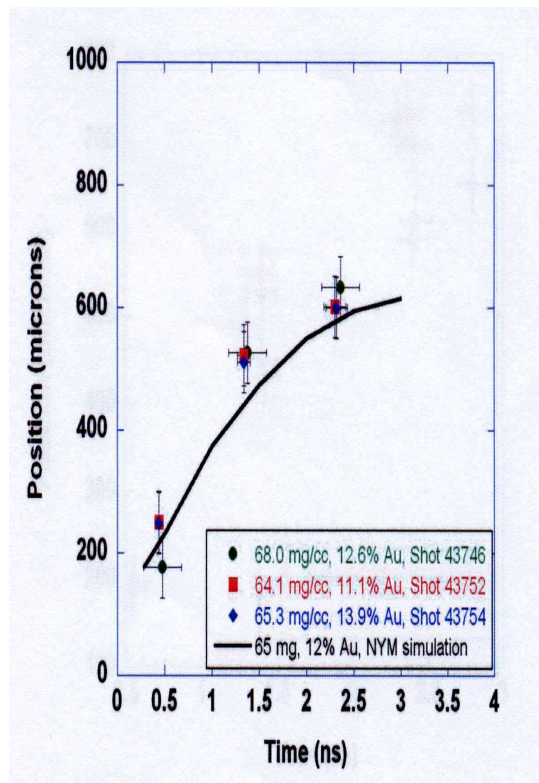


- Mesure de la position de l'onde radiative dans le tuyau
- Série d'expériences différentielles sur la distribution de grains

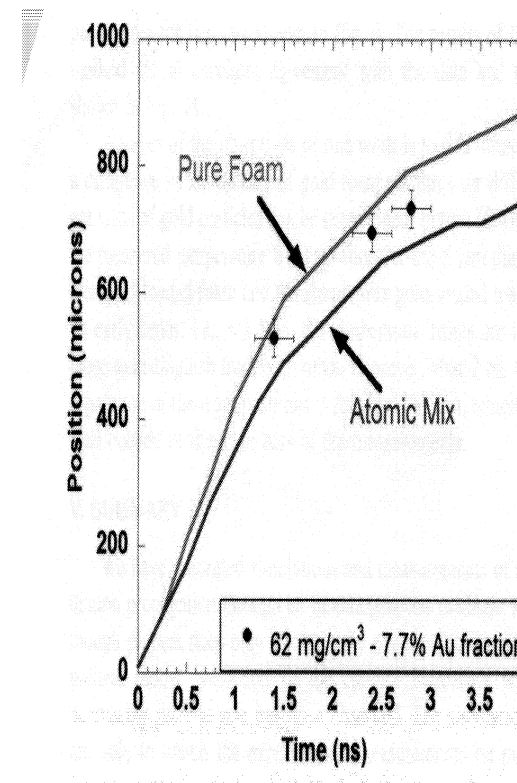
La simulation numérique de P.Keiter et al. met en évidence un effet de la taille des grains sur la vitesse de propagation de l'onde radiative.



mélange atomique



billes de 1 μm



billes de 5 μm

Modélisation

A hydrodynamique figée, l'intensité radiative $I(x, \Omega, \nu, t)$ est solution de



$$\begin{cases} \frac{1}{c} \partial_t I + \Omega \cdot \nabla I + \sigma_\nu(T) I = \sigma_\nu(T) c \frac{B_\nu(T)}{4\pi} & \text{transport du rayonnement} \\ \partial_t E(T) + \int d\nu d\Omega \sigma_\nu(T) \left(c \frac{B_\nu(T)}{4\pi} - I \right) = 0 & \text{bilan d'énergie matière-rayonnement} \end{cases}$$

B_ν est la fonction de Planck (distribution d'équilibre des photons) et σ_ν l'opacité.

Pour simplifier le problème

- on néglige les variations de températures: $T = \text{constante}$.
- On néglige la dépendance de l'opacité vis-à-vis de la fréquence (hypothèse grise).

et on se ramène à l'équation intégral-différentielle ($c = 1$)

$$\partial_t \phi + \Omega \cdot \nabla \phi + \sigma(x) \left(\phi - \int \phi \frac{d\Omega}{4\pi} \right) = 0$$

avec $\sigma(x) = \sigma_f$ dans le fusible et $\sigma(x) = \sigma_p$ dans le pousseur

Interprétation probabiliste

Conditions initiales: $\phi(x, \Omega, t)_{t=0} = \phi_0(x, \Omega)$

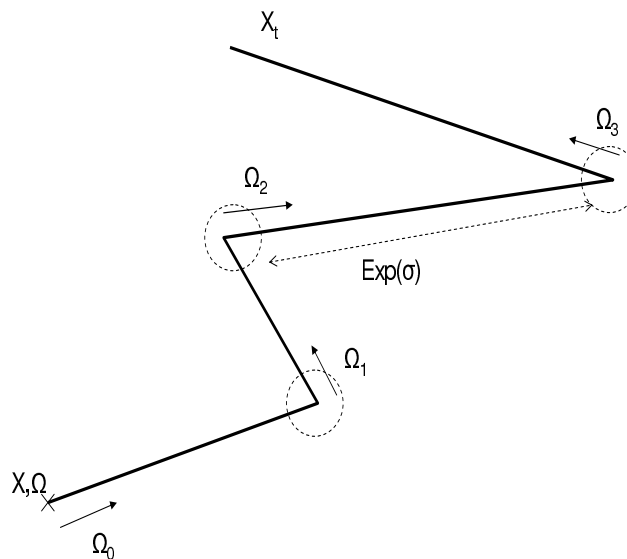
Milieu homogène infini

Alors

$$\phi(x, \Omega, t) = \mathbb{E}\phi_0(X_t^{x, \Omega}, \Omega_t^{x, \Omega})$$

où $X_t^{x, \Omega}, \Omega_t^{x, \Omega}$ est un processus de Markov sur $\mathbb{R}^3 \times \mathcal{S}_2$ $\left\{ \begin{array}{l} X_0^{x, \Omega} = x \\ \Omega_0^{x, \Omega} = \Omega \end{array} \right.$ et

$$\left\{ \begin{array}{l} \frac{dX_t^{x, \Omega}}{dt} = \Omega_t^{x, \Omega} \\ \Omega_t^{x, \Omega} = \text{processus de saut uniforme sur } \mathcal{S}_2 \text{ d'intensité } \sigma \end{array} \right.$$



Description du milieu hétérogène

La structure exacte du milieu n'est pas connue (taille et répartition des grains d'or, couche de mélange, ...): \implies hypothèse de milieu aléatoire.

Fonctions aléatoires $\chi_f(x, \eta)$ et $\chi_p(x, \eta) = 1 - \chi_f(x, \eta)$

$$\chi_f(x, \eta) = 1, \text{ si } x \text{ est dans le fusible et } 0 \text{ sinon}$$

Objectif: modèle de sous-maille \implies les propriétés statistiques de χ varient lentement $\implies \chi$ champ aléatoire homogène.

Moments de la distribution:

● fraction volumique $c_f = \int \chi_f(x, \eta) P(d\eta)$

● longueur caractéristique

● longueur de corrélation

$$d(\Omega) = \int_0^\infty \left(\int (\chi_f(x, \eta) - c_f)(\chi_f(x + \Omega h, \eta) - c_f) P(d\eta) \right) dh$$

● corde moyenne $l_f(\Omega) (\neq l_p(\Omega))$

● "lineal-path function" $L_f(\Omega) = \mathbb{P}([x, x + \Omega z] \in f)$

Si le milieu est isotrope $d(\Omega)$ et $l_f(\Omega)$ sont indépendants de Ω .

Hypothèse technique: existence d'un groupe de transformations τ_x préservant la mesure du champ aléatoire

Milieux binaires

En supposant l'ergodicité, on remplace les moyennes statistiques par des moyennes d'ensemble .



$$c_f = \lim_{V \rightarrow R^3} \frac{1}{|V|} \int_V \chi_f(x, \eta) dx$$

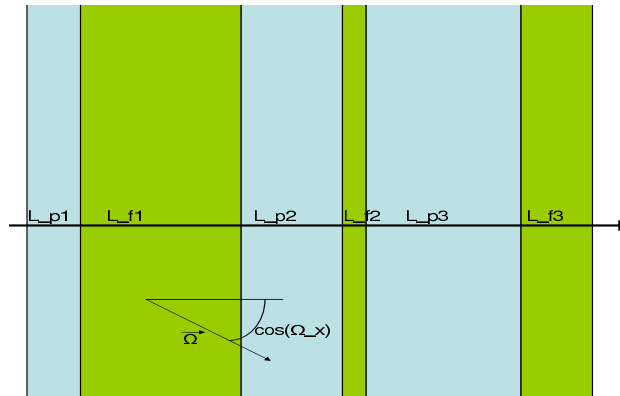
$$d = \lim_{V \rightarrow R^3} \frac{1}{|V|} \int_0^\infty \left(\int_V (\chi_f(x, \eta) - c_f)(\chi_f(x + \Omega h, \eta) - c_f) dx \right) dh$$

On a alors

$$c_f = \frac{l_f}{l_f + l_p}, \quad c_p = \frac{l_p}{l_f + l_p}.$$

Exemple de milieu binaire

L'exemple le plus simple est un milieu stratifié



Si $(L_p^i)_i$ sont des variables i.i.d. de moyenne $\mathbb{E}L_p$ (idem pour $(L_f^i)_i$ de moyenne $\mathbb{E}L_f$) alors le champ aléatoire $\chi(x, \eta)$ est ergodique mais non isotrope

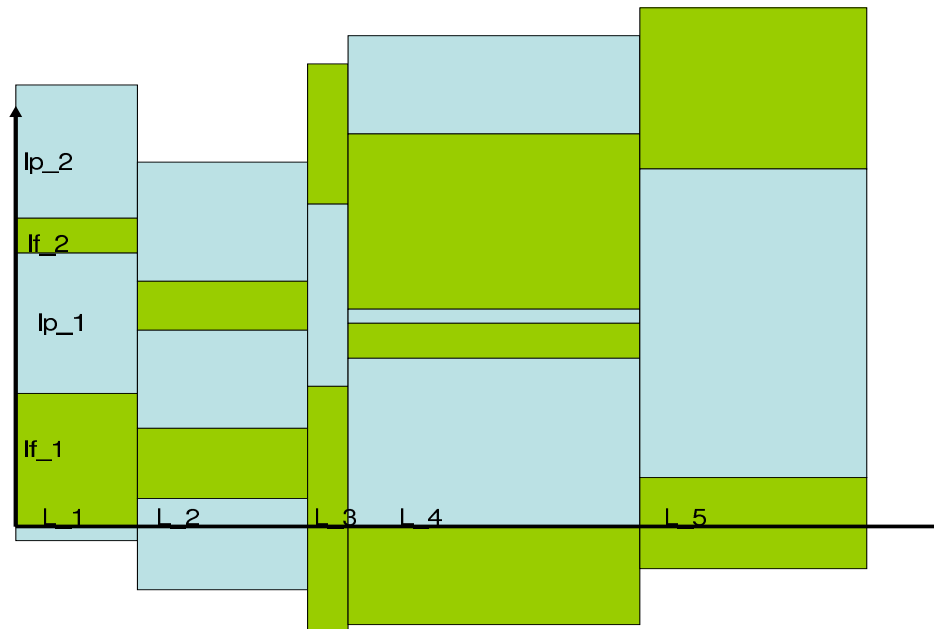
$$c_f = \frac{\mathbb{E}L_f}{\mathbb{E}L_f + \mathbb{E}L_p}, \quad c_p = \frac{\mathbb{E}L_p}{\mathbb{E}L_f + \mathbb{E}L_p}, \quad l_f(\Omega) = \frac{\mathbb{E}L_f}{\cos(\Omega_x)}.$$

C'est le modèle de base pour appliquer les techniques de renouvellement. Si les variables exponentielles, le milieu est markovien et on peut calculer la longueur de corrélation

$$d(\Omega_x) = \frac{(c_p c_f)^2}{\cos(\Omega_x)} (\mathbb{E}L_f + \mathbb{E}L_p)$$

Exemple de milieu binaire

On peut combiner plusieurs processus pour construire un milieu markovien multi-dimensionnel



En 2D, la corde moyenne est $l_f = \frac{\mathbb{E}L\mathbb{E}l_f}{\cos \Omega_x \frac{\mathbb{E}l_f \mathbb{E}l_p}{\mathbb{E}l_f + \mathbb{E}l_p} + \sin \Omega_x \mathbb{E}L\mathbb{E}l_f}$.

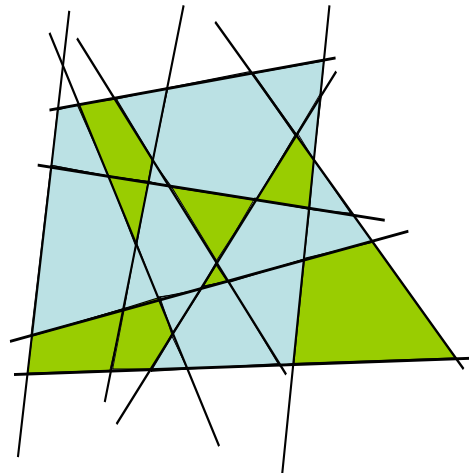
Le milieu est markovien, ergodique mais non isotrope.

Exemple de milieu binaire

Switzer (Ann.Math.Stat, Vol 36, (1965)) a donné en 2D un construction d'un milieu isotrope à statistique markovienne



1. Etant donné un disque de rayon R , on tire $n = \frac{\pi R}{\lambda}$ couples (θ_i, ρ_i) uniformément dans $(0, \pi) \times (-R, R)$ ($R \gg \lambda$).
2. Les n lignes $x \cos(\theta_i) + y \sin(\theta_i) = \rho_i$ définissent des polygones aléatoires de corde moyenne λ .
3. On remplit chaque polygone du milieu p ou f en selon la fraction volumique
4. La corde moyenne résultante est $l_f = \frac{\lambda}{c_p}$

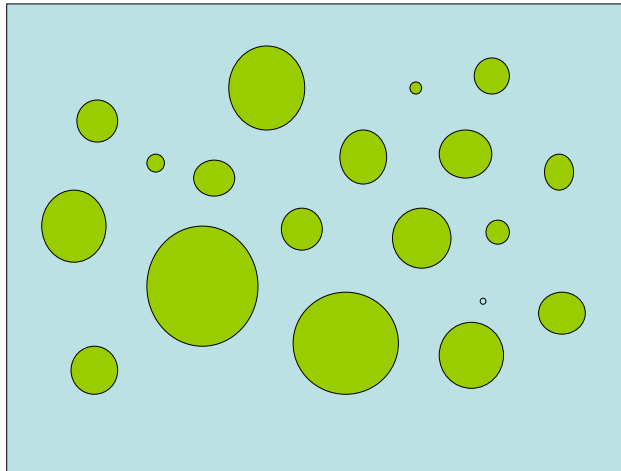


Exemple de milieu binaire

La modélisation la plus fréquente et qui se prête bien à la simulation numérique consiste à inclure des sphères dans un milieu infini



- Les centres des sphères sont distribués selon un processus de Poisson
- Les rayons sont des variables aléatoires de distribution $F(r)$ et de moyenne $\mathbb{E}r$.



Si les sphères se recouvrent, la corde moyenne dans le substrat est exponentielle (torquato Phys.Rev.E, Vol 47, No 4, (1993)).

Si les sphères ne se recouvrent pas, la corde moyenne est approximativement exponentielle (olson, jqsrt, 2002) et la distribution des cordes dans les sphères est

$$d(r) = \frac{r}{4\mathbb{E}r} \int_{r/2}^{\infty} \frac{F(s)}{\sqrt{s^2 - (r/2)^2}}$$

Marche aléatoire en milieu aléatoire

L'équation de transport se réécrit



$$\partial_t \phi + \Omega \cdot \nabla \phi + (\sigma_p \chi_p(\tau_x \eta) + \sigma_f \chi_f(\tau_x \eta)) (\phi - \int \phi \frac{d\Omega}{4\pi}) = 0.$$

- Validité de l'approximation par la diffusion de l'équation de transport (Convergence en loi vers un brownien)
- Validité de l'homogénéisation (calcul effectif du coefficient de diffusion)

Méthode de séparation des échelles:

- longueur de corrélation faible devant la taille de l'objet $\varepsilon = \frac{d}{L} \ll 1$.
- Fort contraste d'opacité entre les deux matériaux $q = \frac{\sigma_f}{\sigma_p} \ll 1$.

On obtient

$$\partial_t \phi^{\varepsilon, q} + \Omega \cdot \nabla \phi^{\varepsilon, q} + \left(\frac{\sigma_p}{q} \chi_p(\tau_{x/\varepsilon} \eta) + \sigma_f \chi_f(\tau_{x/\varepsilon} \eta) \right) (\phi^{\varepsilon, q} - \int \phi^{\varepsilon, q} \frac{d\Omega}{4\pi}) = 0.$$

et on fait $\varepsilon, q \rightarrow 0$

Premier cas $\varepsilon \ll q$

On applique d'abord des techniques d'homogénéisation (Dumas et Golse ,SIAM J.Appl.Math. 2000).



$$\phi^q \rightarrow \phi^q, \quad \partial_t \phi^q + \Omega \cdot \nabla \phi^q + \tilde{\sigma}(\phi^q - \int \phi^q \frac{d\Omega}{4\pi}) = 0.$$

avec l'opacité effective $\tilde{\sigma} = \frac{\sigma_p}{q} c_p + \sigma_f c_f$. Ensuite, on renormalise le temps et l'espace $t \rightarrow t/q, x \rightarrow x/q^2$ pour obtenir la convergence vers une équation de diffusion:

$$\tilde{\phi}^q(t) = \phi^q(t/q) \rightarrow \Phi, \quad \partial_t \Phi = \frac{1}{3c_p \sigma_p} \Delta \Phi.$$

La preuve est très classique: $\tilde{\phi}^q$ est solution de

$$\partial_t \tilde{\phi}^q + \frac{\Omega}{q} \cdot \nabla \tilde{\phi}^q + \frac{\tilde{\sigma}}{q^2} (\tilde{\phi}^q - \int \tilde{\phi}^q \frac{d\Omega}{4\pi}) = 0.$$

On introduit un développement asymptotique dans l'équation

$$\tilde{\phi}^q = \tilde{\phi}^0 + q\tilde{\phi}^1 + q^2\tilde{\phi}^2 + \dots$$

Opérateur de diffusion angulaire



$$\mathcal{A}f = f - \int f \frac{d\Omega}{4\pi}$$

$$\text{Ordre 0: } \mathcal{A}\tilde{\phi}^0 = 0$$

$$\text{Ordre 1: } \mathcal{A}\tilde{\phi}^1 = -\frac{\Omega}{\tilde{\sigma}} \cdot \nabla \tilde{\phi}^0$$

$$\text{Ordre 2: } \mathcal{A}\tilde{\phi}^2 = -\frac{1}{\tilde{\sigma}} (\partial_t \tilde{\phi}^0 + \Omega \cdot \nabla \tilde{\phi}^1)$$

- 1 On construit un développement asymptotique formel en résolvant l'équation aux trois premiers ordre
- 2 On montre que le développement est une approximation d'ordre q^2 de la solution en utilisant un principe du maximum pour l'équation de transport.

Propriétés de \mathcal{A}



- L'alternative de Fredholm est satisfaite: l'équation $\mathcal{A}f = g$ a une solution si et seulement si $\int g d\Omega = 0$ et la solution est unique à une fonction indépendante de Ω près.
- Interprétation probabiliste

$$f(\Omega) = \int_0^\infty \mathbb{E}(g(\Omega_t) / \Omega_0 = \Omega) dt$$

où $(\Omega_t)_{t \geq 0}$ est le processus ponctuel de saut sur \mathcal{S}^2 de générateur infinitésimal \mathcal{A} (densité uniforme, intensité 1), partant de Ω

Ordre 0: $\tilde{\phi}^0$ indépendante de Ω

$$\text{Ordre 1: } \tilde{\phi}^1 = - \frac{\int_0^\infty \mathbb{E}(\Omega_t / \Omega_0 = \Omega) dt}{\tilde{\sigma}} \cdot \nabla \tilde{\phi}^0.$$

Ordre 2: Pour que l'équation ait une solution, il faut que le second membre soit de moyenne nulle

$$\int d\Omega \left(\partial_t \tilde{\phi}^0 + \Omega \cdot \nabla \tilde{\phi}^1 \right) = 0$$

$$\partial_t \tilde{\phi}^0 = \frac{\int d\Omega \Omega \cdot \nabla \int_0^\infty \mathbb{E}(\Omega_t / \Omega_0 = \Omega) dt}{\tilde{\sigma}} \cdot \nabla \tilde{\phi}^0$$

Calcul du coefficient de diffusion

La matrice de diffusion est diagonale: on se ramène au calcul d'un coefficient



$$d_{xx} = \int \Omega^x \cdot \nabla \int_0^\infty \mathbb{E}(\Omega_t^x / \Omega_0 = \Omega) dt d\Omega = \int_0^\infty \mathbb{E} \Omega_0^x \Omega_t^x dt$$

Soient $(T_1, T_2, \dots, T_n, \dots)$ les temps de saut du processus (Ω_t) , on a

$$\begin{aligned} d_{xx} &= \sum_i \mathbb{E} \int_{T_i}^{T_{i+1}} \Omega_0^x \Omega_t^x dt \\ &= \sum_i \mathbb{E}(T_{i+1} - T_i) \Omega_0^x \Omega_{T_i}^x, \\ &= \mathbb{E}(T_1) (\Omega_0^x)^2, \\ &= \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Remarque: on avait trivialement $\tilde{\phi}^1 = -\frac{\Omega}{\tilde{\sigma}} \cdot \nabla \tilde{\phi}^0$.

Finalement

$$\partial_t \tilde{\phi}^0 = \frac{1}{3\tilde{\sigma}} \Delta \tilde{\phi}^0.$$

Deuxième cas $q \ll \varepsilon$

On applique d'abord une technique d'approximation diffusion dans le milieu optiquement épais sans renormalisation en temps (Sentis Asympt.Analysis, 1991).

$\phi^{\varepsilon, q} \sim \chi_p(\tau_{x/\varepsilon}\eta)\phi_p^q + \chi_f(\tau_{x/\varepsilon}\eta)\phi_f$ où (ϕ_f, ϕ_p^q) sont solutions d'un système couplé

$$\begin{cases} \partial_t \phi_f + \Omega \cdot \nabla \phi_f + \sigma_f \left(\phi_f - \int \phi_f \frac{d\Omega}{4\pi} \right) = 0 \text{ dans } f \\ \partial_t \phi_p^q = \frac{q}{3\sigma_p} \Delta \phi_p^q \text{ dans } p \end{cases}$$

avec des conditions limites de type Robin aux interfaces. Il faut ensuite faire $\varepsilon \rightarrow 0$: problème analogue aux problèmes de billards.

Troisième cas $q \sim \varepsilon$

Il faut étudier les deux limites simultanément

(Bensoussan-Lions-Papanicolaou, J. Publ. RIMS, 1979). Après renormalisation en temps, on écrit

$$\partial_t \phi^\varepsilon + \frac{\Omega}{\varepsilon} \cdot \nabla \phi^\varepsilon + \left(\frac{\sigma_p}{\varepsilon^2} \chi_p(\tau_{x/\varepsilon} \eta) + \frac{\sigma_f}{\varepsilon} \chi_f(\tau_{x/\varepsilon} \eta) \right) (\phi^\varepsilon - \int \phi^\varepsilon \frac{d\bar{\Omega}}{4\pi}) = 0.$$

et on introduit le développement asymptotique formel

$$\phi^\varepsilon = \phi^0(x, \bar{\Omega}, \tau_{x/\varepsilon} \eta, t) + \varepsilon \phi^1(x, \bar{\Omega}, \tau_{x/\varepsilon} \eta, t) + \varepsilon^2 \phi^2(x, \bar{\Omega}, \tau_{x/\varepsilon} \eta, t) + \dots$$

On applique la même technique que dans le cas homogène: besoins d'hypothèses fortes sur le champ aléatoire.

- Existence d'une "dérivation" par rapport à η

$$Df(\eta) = \nabla_x f(\tau_x \eta)_{x=0} \Rightarrow \Omega \cdot \nabla_x f(x, \tau_{x/\varepsilon} \eta) = \left(\Omega \cdot \nabla_x + \frac{1}{\varepsilon} \Omega \cdot D \right) f(x, \tau_y \eta) \Big|_{y=\frac{x}{\varepsilon}}$$

- "horizon fini": toutes les particules traversent le milieu opaque

$$L(t, y, \Omega) = \text{mes}([y, y + t\Omega] \cap \{x, \chi_p(\tau_x \eta) = 1\}), \\ \exists \tilde{L} > 0, \tilde{t} < \infty, \mathbb{P}\{L(\tilde{t}, y, \Omega) > \tilde{L}, p.p. \text{ in } (\Omega, y)\} = 1.$$



variable rapide $y : \phi^\varepsilon = \phi^\varepsilon(x, \vec{\Omega}, \tau_y \eta, t)_{y=x/\varepsilon}$

Ordre 0: $\mathcal{A}\phi^0 = 0$

Ordre 1: $\mathcal{A}\phi^1 = -(\Omega \cdot \nabla \phi^0 + \sigma_f \chi_f(\tau_y \eta)(\phi^0 - \int \phi^0 \frac{d\vec{\Omega}}{4\pi}))$

Ordre 2 : $\mathcal{A}\phi^2 = -(\partial_t \phi^0 + \Omega \cdot \nabla \phi^1 + \sigma_f \chi_f(\tau_y \eta)(\phi^1 - \int \phi^1 \frac{d\vec{\Omega}}{4\pi}))$

avec $\mathcal{A}f = \Omega \cdot Df + \sigma_p \chi_p(\eta)(f - \int f \frac{d\vec{\Omega}}{4\pi})$

Les propriétés de \mathcal{A} peuvent être établies à partir de sa représentation probabiliste:

\mathcal{A} est le générateur infinitésimal d'un processus (η_t, Ω_t) défini par

● $\partial_t Y_t = \Omega_t$

● $\eta_t = \tau_{Y_t} \eta_0$

● (Ω_t) est un processus de saut ponctuel sur \mathcal{S}^2 uniforme et la probabilité d'occurrence d'un saut entre t et $t + h$ est

$$P = \int_t^{t+h} \chi_p(\eta_s) \sigma_p e^{-\sigma_p s} ds$$



- L'alternative de Fredholm est satisfaite: l'équation $\mathcal{A}f = g$ a une solution si et seulement si $\mathbb{E} \int g d\Omega = 0$ et la solution est unique à une fonction déterministe indépendante de Ω près.
- Interprétation probabiliste

$$f(\Omega, \eta) = \int_0^\infty \mathbb{E}(g(\Omega_t, \eta_t) / \Omega_0 = \Omega, \eta_0 = \eta) dt$$

où l'espérance conditionnelle est prise sur les trajectoires du processus et non les réalisations du milieu aléatoire.

Ordre 0: ϕ^0 déterministe et indépendante de Ω .

Ordre 1: $\phi^1(x, \Omega, \tau_y \eta, t) = - \int_0^\infty \mathbb{E}(\Omega_t / \Omega_0 = \Omega, \eta_0 = \tau_y \eta) dt \cdot \nabla \phi^0$

Ordre 2: Pour que l'équation ait une solution, il faut que le second membre soit de moyenne nulle

$$\partial_t \phi^0 = \nabla_x \mathbb{E} \int_0^\infty \Omega_0 \Omega_t dt \cdot \nabla_x \phi^0 \left(= \frac{1}{3\tilde{\sigma}} \Delta \phi^0 \right)$$

Calcul du coefficient de diffusion



- On génère un échantillon de taille L
- On résout le problème de cellule avec des conditions au bord périodiques

$$\vec{\Omega} \cdot \nabla \vec{g} + \sigma_p \chi_p(y) (\vec{g} - \int \vec{g} \frac{d\vec{\Omega}}{4\pi}) = \vec{\Omega},$$
$$3\tilde{\sigma} = \left(\frac{1}{|T|} \int_T dy \int \vec{g}_i \cdot \vec{\Omega}_i \frac{d\vec{\Omega}}{4\pi} \right)^{-1}$$

- On fait $L \rightarrow \infty$

Conséquence: calculer le coefficient est aussi coûteux que résoudre le problème complet.

⇒ nécessité de formules simplifiées.

Les milieux 1D

C'est le seul cas où il y a une solution exacte et simple.

Le problème périodique est



$$\mu \partial_y g + \sigma(y) \left(g - \int_{-1}^1 g \frac{d\mu}{2} \right) = \mu,$$
$$3\tilde{\sigma} = \left(\frac{1}{|T|} \int_T dy \int_{-1}^1 \mu g \frac{d\mu}{2} \right)^{-1}$$

- On intègre par rapport à μ : $\partial_y \int_{-1}^1 \mu g d\mu = 0 \Rightarrow \int_{-1}^1 \mu g d\mu$ does not depend on y .
- On multiplie par μ : $\mu^2 \partial_y g + \sigma(y) \left(\mu g - \mu \int_{-1}^1 g \frac{d\mu}{2} \right) = \mu^2$
- On intègre par rapport à μ : $\int_{-1}^1 \mu^2 \partial_y g d\mu + \sigma(y) \int_{-1}^1 \mu g d\mu = \frac{2}{3}$
- On intègre par rapport à y : $\tilde{\sigma} = \frac{1}{|T|} \int_T \sigma(y) dy = \langle \sigma \rangle$

En 1D, l'opacité effective est toujours la moyenne arithmétique des constituants du mélange pondéré par leur fraction de présence.

Les géométries 3D

Dans le cas général, on peut faire des simulations Monte-Carlo

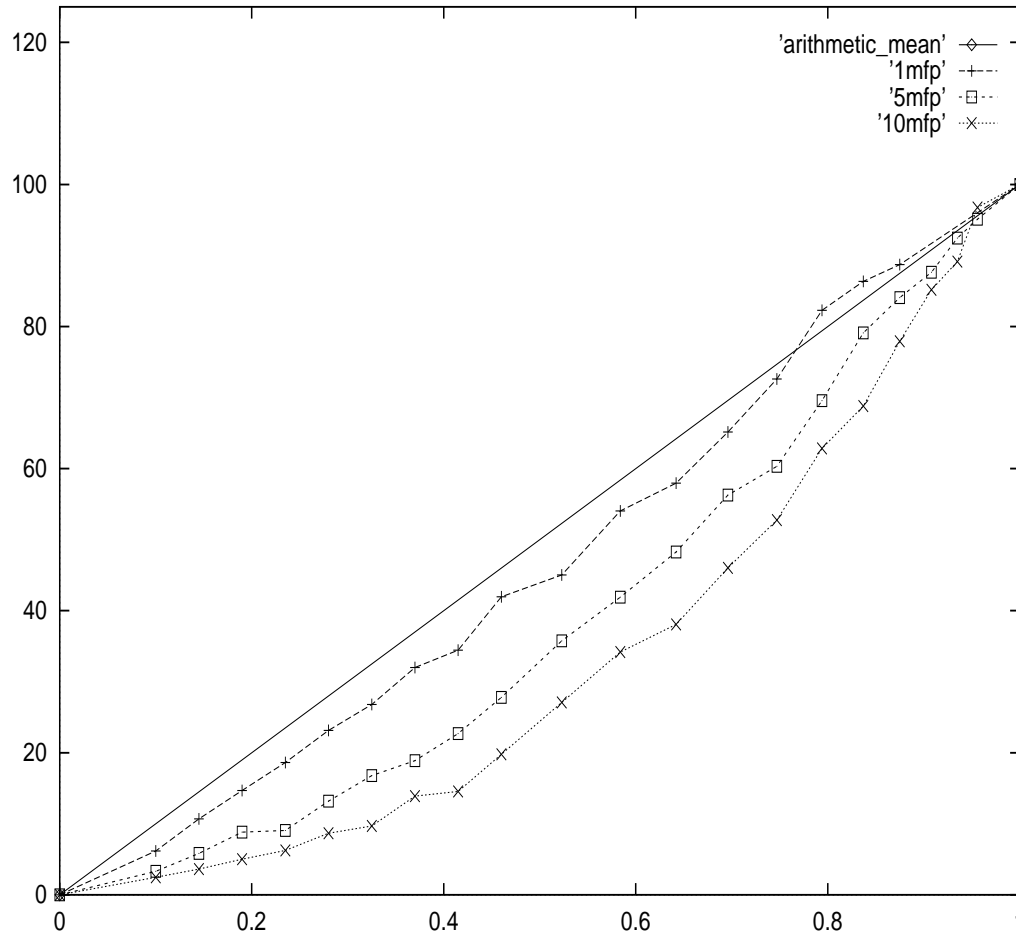


$$\frac{dX(t)}{dt} = \vec{\Omega}(t) \quad \vec{\Omega}(t) \text{ processus de saut d'intensité } \sigma(X(t))$$

$$\text{et } \tilde{D} = \frac{1}{3} \int_0^\infty \mathbb{E}(\vec{\Omega}(0) \cdot \vec{\Omega}(t)) dt = \lim_{t \rightarrow \infty} \frac{\mathbb{E}X_i(t)^2}{2t}$$

$$\begin{aligned} \mathbb{E}X_i(t)^2 &= \int_0^t \int_0^t \mathbb{E}\mathbb{E}(\vec{\Omega}_i(s) \vec{\Omega}_i(u)) ds du = 2 \int_0^t \int_0^s \mathbb{E}\mathbb{E}(\vec{\Omega}_i(s) \vec{\Omega}_i(u)) ds du \\ &= 2t \int_0^t \mathbb{E}(\vec{\Omega}(0)_i \vec{\Omega}_i(s)) ds - 2 \int_0^t s \mathbb{E}(\vec{\Omega}_i(0) \vec{\Omega}_i(s)) ds \end{aligned}$$

Simulations numériques



Opacité effective en fonction de la fraction volumique pour des inclusions de sphères de différentes profondeurs optiques

⇒ mise en évidence de l'importance du paramètre $\sigma_p r$: profondeurs optiques des sphères.

Bornes

Dans le cas général, on peut démontrer une borne inférieure sur l'opacité (clouet, SIAM J.App.Math 1998) en décomposant la trajectoire en série de segments

$$\begin{aligned} D &= \int_0^\infty \mathbb{E} \Omega_0 \Omega_t dt = \sum_i \mathbb{E}(\Omega_0 \Omega_i (T_{i+1} - T_i)) \\ &= \mathbb{E}(\Omega_0)^2 T_0 + \sum_{i>0} \mathbb{E}(\Omega_0 \Omega_i (T_{i+1} - T_i)) \end{aligned}$$

qu'on peut réécrire

$$D = D_0 - f_p \sigma_p \mathbb{E} \sum_{n=0}^{\infty} F(\kappa_0) F(\kappa_n) \quad \left\{ \begin{array}{l} (\kappa_n)_{n \geq 0} \text{ Chaîne de Markov ergodique} \\ F \text{ variable aléatoire centrée} \end{array} \right.$$

Dans le cas périodique

• $(\kappa_n)_{n \geq 0} \Rightarrow (Y_n)_{n \geq 0}$ est la suite des lieux où le processus change de direction.

$$• \quad F(y) = \int \frac{d\Omega}{4\pi} \Omega \int_0^\infty dt e^{-\int_0^t \sigma_p \chi_p(y + \Omega s) ds}$$

L'intérêt est double:



• on a

$$2\mathbb{E} \sum_{n=0}^{\infty} F(\kappa_0)F(\kappa_n) = \mathbb{E}F(\kappa_0)^2 + \lim_{N \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left(\frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=0}^N F(\kappa_n) \right)^2 \geq 0$$

donc $D \geq D_0$.

• D_0 peut être calculé analytiquement pour les milieux markoviens (Vanderhaegen, JQSRT, 1988)

$$D_0 = \int \frac{d\vec{\Omega}}{4\pi} \int P(d\eta) \int_0^{\infty} dt e^{-\int_0^t \sigma_p \chi_p(\tau \vec{\Omega}_s \eta) ds}.$$

Comme l'intégration n'a lieu que sur des lignes droites, si on connaît les distributions des cordes, on peut faire le calcul par des techniques de renouvellement.

Calcul dans un milieu markovien

On pose $D_0 = \frac{1}{3\sigma_{vdh}}$ et on suppose que les distributions des cordes sont identiques dans toutes les directions.

Alors

$$\sigma_{vdh} = \left(\int_0^\infty \mathbb{E} e^{-\int_0^s \sigma(y) dy} ds \right)^{-1}$$

On définit $g_f(x) = \mathbb{E}(e^{-\int_0^x \sigma(y) dy} / 0 \in f)$, $g_p(x) = \mathbb{E}(e^{-\int_0^x \sigma(y) dy} / 0 \in p)$.

On alors

$$D_0 = c_f \int_0^\infty g_f(x) dx + c_p \int_0^\infty g_p(x) dx = c_f \hat{g}_f(0) + c_p \hat{g}_p(0) \quad (\text{Transformées de Laplace})$$

On écrit les équations du renouvellement le long d'une trajectoire (pour une statistique markovienne)

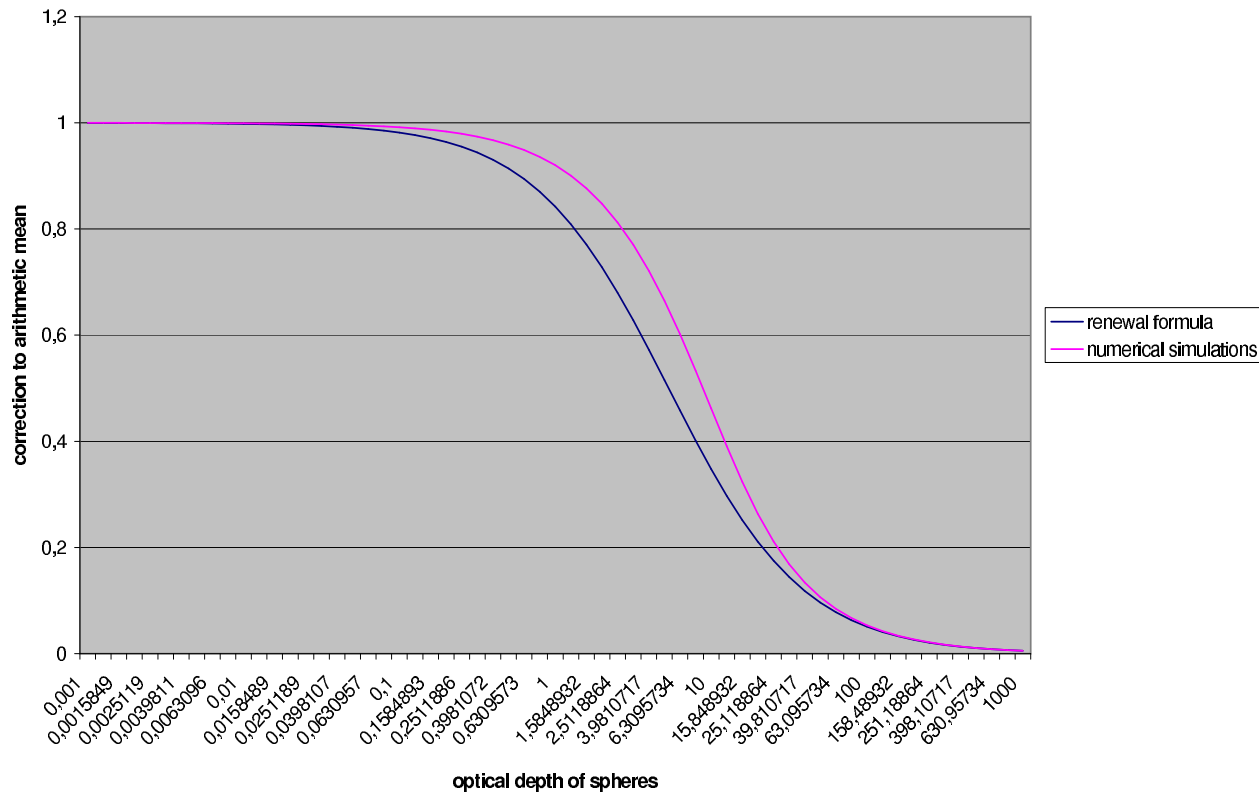
$$\begin{cases} g_f(x) = \int_0^x g_p(x-y) e^{-\sigma_f y} \frac{e^{-y/l_f}}{l_f} dy + \frac{e^{-(\sigma_f + 1/l_f)x}}{l_f(\sigma_f + 1/l_f)} \\ g_p(x) = \int_0^x g_f(x-y) e^{-\sigma_p y} \frac{e^{-y/l_p}}{l_p} dy + \frac{e^{-(\sigma_p + 1/l_p)x}}{l_p(\sigma_p + 1/l_p)} \end{cases}$$

On prend les transformées de Laplace et on résout:



$$\sigma_{vdh} = \frac{\langle \sigma \rangle + c_f l_p \sigma_p \sigma_f}{1 + c_f l_p (\sigma_f + \sigma_p - \langle \sigma \rangle)}.$$

En pratique, cette formule donne une excellente approximation des résultats de simulation numérique excepté quand la profondeur optique dans les sphères est d'ordre 1



Extension au transfert radiatif

Plusieurs différences de difficultés croissantes



- Système à deux équations (T_m, T_r)
- Dépendance non-linéaire des opacités par rapport à la température
- Prise en compte de l'hydrodynamique

Pour le problème linéaire gris ($\theta_m = T_m^4, \theta_r = T_r^4$):

$$\begin{cases} \partial_t I^\varepsilon + \Omega \nabla_x I^\varepsilon + \sigma^\varepsilon(x)(I^\varepsilon - \theta^\varepsilon) = 0 \\ \gamma^\varepsilon(x) \partial_t \theta^\varepsilon + \sigma^\varepsilon(x)(\theta^\varepsilon - I^\varepsilon) = 0 \end{cases}$$

On a uniquement une convergence dans un sens faible (Clouet, JQSRT, 1997) en introduisant deux températures matières distinctes (θ_p, θ_f) dans les deux composants du mélange

$$\begin{cases} \partial_t \theta_r + \sigma_p c_p (\theta_r - \theta_p) + \sigma_f c_f (\theta_r - \theta_f) = \frac{1}{3\tilde{\sigma}} \Delta \theta_r \\ \gamma_p \partial_t \theta_p + \sigma_p (\theta_p - \theta_r) = 0 \\ \gamma_f \partial_t \theta_f + \sigma_f (\theta_f - \theta_r) = 0 \end{cases}$$

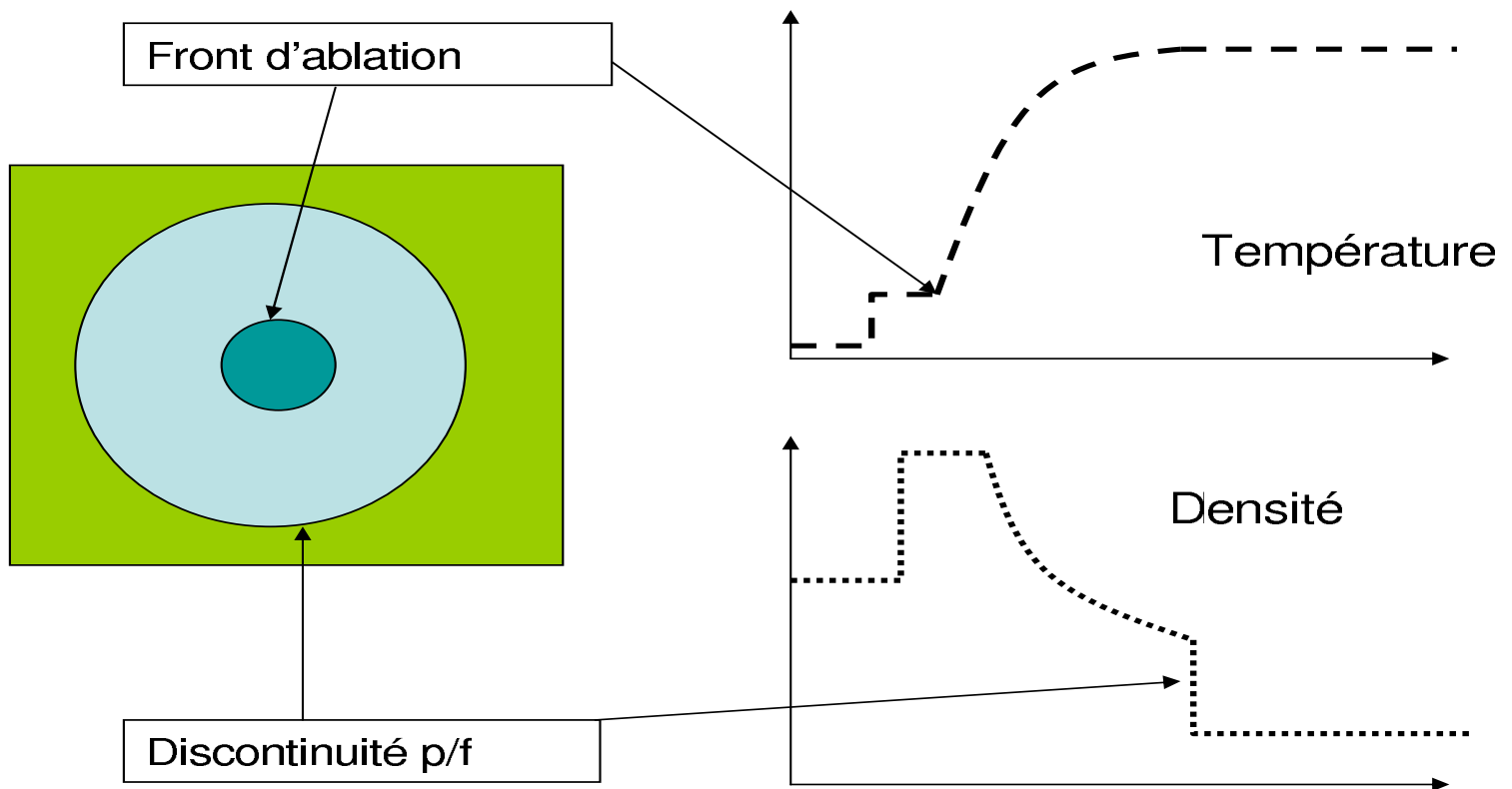
Prise en compte de l'hydrodynamique



- Loi de mélange isobare-non isotherme entre les deux composants à partir lois d'état $P(\rho, T)$, $e(\rho, T)$ dans chaque matériau

$$\begin{cases} P_p(\rho_p, \theta_p) = P_f(\rho_f, \theta_f) \\ c_p \rho_p + c_f \rho_f = \rho \end{cases}$$

- Couplage à une loi d'ablation analytique du matériau optiquement épais



Conclusions



- Les régimes limites des équations de transport linéaires en milieu aléatoire sont bien compris.
- Le coefficient de transport moyen proposé par D.Vanderhaegen est une bonne approximation de la solution du problème homogénéisé.

$$\sigma_{vdh} = \frac{\langle \sigma \rangle + c_f l_p \sigma_p \sigma_f}{1 + c_f l_p (\sigma_f + \sigma_p - \langle \sigma \rangle)}, \quad \langle \sigma \rangle = c_p \sigma_p + c_f \sigma_f$$

- Pour le transfert radiatif des difficultés subsistent liées à la prise en compte de l'hydrodynamique.