

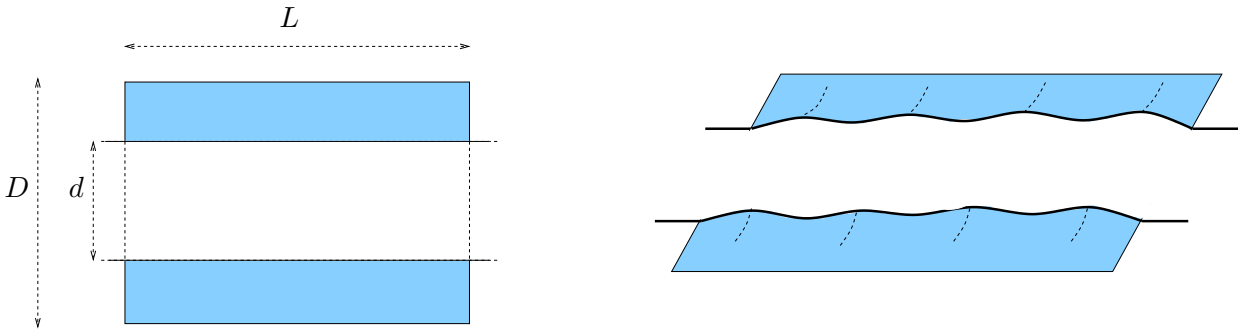
Gravité versus Élasticité

Benoît Merlet, merlet@cmap.polytechnique.fr

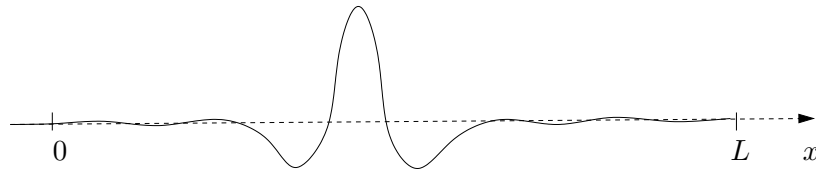
Ce sujet est relié à des recherches réalisées au Laboratoire de mécanique Jean le Rond D'Alembert de l'Université Paris 6. Ils concerne une situation où des forces de gravité et de capillarité agissant sur un fluide sont en compétition avec des forces élastiques. Le sujet porte sur un dispositif particulier mais il pourra être étendu à d'autres situations du même type.

Dispositif experimental

On remplit complètement un bac rectangulaire de longueur L et largeur D avec un fluide très visqueux. On recouvre ensuite parfaitement la surface du fluide avec une membrane fine inextensible plus longue que L et de largeur $d < D$ (Fig. de gauche). Au départ la membrane repose à plat mais on augmente progressivement la longueur de membrane qui repose sur le fluide de sorte qu'elle forme des plis. Lors de ce processus toute la face inférieure de la membrane reste en contact avec le fluide (Fig. de droite).



L'expérience montre que pour $\delta > 0$ petit, les plis forment une suite de vague régulières et périodiques mais que lorsqu'on augmente δ ces plis se localisent avec une plus grande amplitude au centre (figure ci-dessous). Le but du MODAL est de reproduire numériquement ces phénomènes. On commencera par un modèle plus simple (en de dimension 1 et en négligeant le terme capillaire \mathcal{E}_c plus bas).



Modélisation

Notons (x, y) les coordonnées du plan horizontal. Le rectangle occupé par le fluide est $\Omega := \{(x, y) : 0 < x < L, |y| < D/2\}$. On note $h(x, y)$, l'élévation du fluide par rapport à l'équilibre et on impose les conditions $h \equiv 0$ sur $\partial\Omega$.

La surface occupée par membrane se projette sur le rectangle $\omega = \{(x, y) : 0 < x < L, |y| < d/2\}$. Par hypothèse, $h(x, y) = H(x)$ dans ω . On fixe la longueur de membrane reposant sur le fluide à une valeur $L + \delta > L$, c'est-à-dire,

$$\int_0^L \sqrt{1 + [H'(x)]^2} dx = L + \delta.$$

L'énergie minimisée par le système est définie comme la somme de trois termes

1. l'énergie gravitationnelle du fluide, $\mathcal{E}_g := \frac{\rho g}{2} \int_{\Omega} |h|^2.$
2. l'énergie élastique de la membrane, $\mathcal{E}_m := \frac{d\kappa}{2} \int_0^{L+\delta} \theta^2(s) ds,$ où s est l'abscisse curviligne le long de la membrane et $\theta(s)$ est l'angle entre la normale à la membrane et la verticale.
3. l'énergie de tension superficielle sur la surface libre du fluide, $\mathcal{E}_c := \gamma \int_{\Omega \setminus \bar{\omega}} \sqrt{1 + |\nabla h|^2} dx dy.$