Introduction à la théorie du micromagnétisme

Feuille d'exercices N. 1

Exercice 1

Le but de cet exercice est de donner le bon cadre variationnel pour résoudre un Laplacien en domaine non borné. C'est typiquement ce qu'il faut faire lorsque l'on veut calculer le potentiel démagnétisant induit par une distribution d'aimantation.

On considère un domaine borné et régulier $\Omega \subset \mathbb{R}^3$, et une distribution d'aimantation $m \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$. Le potentiel démagnétisant $\phi_d(m)$ est une solution de la formulation variationnelle

$$\int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi_d(m) \cdot \nabla \psi \, dx = \int_{\Omega} m \cdot \nabla \psi \, dx \quad (1)$$

pour toute fonction-test $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$.

Sur des domaines bornés l'existence (et l'unicité) de solution à ce type de problème s'obtient en général par l'utilisation du théorème de Lax-Milgram. Ici, la forme bilinéaire

$$a(\phi, \psi) = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla \phi \cdot \nabla \psi \, dx \quad (2)$$

empêche de poser le problème dans $H^1(\mathbb{R}^3)$ (déjà, dans les domaines bornés, on ne peut pas avec une telle forme bilinéaire résoudre des problèmes dans $H^1(\Omega)$ et l'on doit rajouter une condition au bord de type Dirichlet pour pouvoir résoudre. La coercivité dans ce cas se montre grâce à l'inégalité de Poincaré). Dans le domaine non borné $\mathbb{R}^3$, on construit un analogue de H_0^1 . Cet espace s'appelle l'espace de Beppo-Levi, BL^1 que l'on introduit dans cet exercice.

1. Soit $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R})$. Montrer que

$$\int_0^{+\infty} \phi(r)^2 \, dr \leq 4 \int_0^{+\infty} r^2 (\phi'(r))^2 \, dr. \quad (3)$$

On pourra utiliser pour cela une intégration par parties en écrivant $\phi(r)^2 = 1 \times \phi(r)^2$.

2. Montrer que pour $\phi \in \mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$, on a

$$\int_{\mathbb{R}^3} \frac{\phi(x)^2}{1+|x|^2} dx \leq 4 \int_{\mathbb{R}^3} |\nabla\phi(x)|^2 dx. \quad (4)$$

On pourra passer en coordonnées sphériques et utiliser l'estimation de la question précédente.

3. On pose

$$BL^1 = \left\{ \phi \text{ tel que } \frac{\phi}{\sqrt{1+|x|^2}} \in L^2(\mathbb{R}^3) \text{ et } \nabla\phi \in L^2(\mathbb{R}^3) \right\} \quad (5)$$

muni du produit scalaire

$$(\phi, \psi)_{BL^1} = \int_{\mathbb{R}^3} \frac{\phi(x)\psi(x)}{1+|x|^2} dx + \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\phi(x) \cdot \nabla\psi(x) dx. \quad (6)$$

Montrer que BL^1 est un espace de Hilbert. Montrer que $\mathcal{D}(\mathbb{R}^3)$ est dense dans BL^1 .

4. En utilisant les questions précédentes montrer que BL^1 muni du produit scalaire

$$(\phi, \psi)_{\dot{H}^1} = \int_{\mathbb{R}^3} \nabla\phi(x) \cdot \nabla\psi(x) dx \quad (7)$$

est aussi un espace de Hilbert. On montrera que les normes sous-jacentes $\|\cdot\|_{BL^1}$ et $\|\cdot\|_{\dot{H}^1}$ sont en fait équivalentes.

5. Résoudre le problème du potentiel démagnétisant dans $(BL^1, \|\cdot\|_{\dot{H}^1})$.

6. Montrer que $BL^1 \neq H^1(\mathbb{R}^3)$.

Exercice 2

Etant donné un ouvert Ω borné dans $\mathbb{R}^3$, et une distribution d'aimantation $m \in H^1(\Omega)$, montrer que le potentiel démagnétisant $\phi_d(m)$ généré par m et solution du problème (1) vérifie le problème de transmission

$$\begin{cases} \Delta\phi_d(m) = \operatorname{div}m \text{ dans } \Omega, \\ \Delta\phi_d(m) = 0 \text{ dans } \mathbb{R}^3 \setminus \Omega, \\ [\phi_d(m)] = 0 \text{ à travers } \partial\Omega, \\ \left[\frac{\partial\phi_d(m)}{\partial n} \right] = -m \cdot n \text{ à travers } \partial\Omega. \end{cases} \quad (8)$$

On écrira pour cela la formulation variationnelle vérifiée par $\phi_a(m)$ et on utilisera des fonctions test adaptées.

Exercice 3

1. Soit ω un ouvert borné et régulier. On considère aussi $m \in H^1(\Omega, \mathbb{R}^3)$, et l'on étend m en dehors de Ω en posant

$$\bar{m}(x) = \begin{cases} m(x) & \text{si } x \in \Omega, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases} \quad (9)$$

Montrer que

$$\operatorname{div} \bar{m} = \operatorname{div} m \chi_\Omega + m \cdot n \delta_{\partial\Omega} \quad (10)$$

au sens des distributions $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$

Dans l'équation précédente, n est la normale sortante à $\partial\Omega$, χ_Ω est la fonction caractéristique de Ω et $\delta_{\partial\Omega}$ est la mesure 2 dimensionnelle du bord définie comme distribution par

$$\forall \phi \in \mathcal{D}'(\mathbb{R}^3), \quad \langle \delta_{\partial\Omega}, \phi \rangle = \int_{\partial\Omega} \phi(x) d\sigma_x. \quad (11)$$

2. Soit $(\Omega_i)_{i=1, \dots, N}$ des ouverts disjoints tels que $\mathbb{R}^3 = \cup_{i=1}^N \bar{\Omega}_i$. On considère $m_i \in H^1(\Omega_i)$ et on pose

$$\bar{m}(x) = m_i(x) \text{ si } x \in \Omega_i. \quad (12)$$

Calculer $\operatorname{div} \bar{m}$ dans $\mathcal{D}'(\mathbb{R}^3)$.