Descente de l'infini des processus de naissance et mort.

Mathieu Richard
En collaboration avec Sylvie Méléard et Vincent Bansaye.

Centre de Mathématiques Appliquées, Polytechnique

Aussois 2014

1. Définition et premières propriétés
2. Vitesse de descente
3. Application : naissance et mort en environnements fluctuants

- Soit $(X(t), t \geq 0)$ un processus de naissance et mort markovien avec taux de transition

$$\begin{cases} n \to n+1 & \text{à taux } \lambda_n \\ n \to n-1 & \text{à taux } \mu_n \end{cases}$$

et $\lambda_n,\ \mu_n > 0$ si $n \geq 1$ et $\lambda_0 = \mu_0 = 0$.

- On suppose que X s'éteint p.s.

$$\sum_{i \geq 1} \frac{1}{\lambda_i \pi_i} = +\infty$$

avec $\pi_i = \frac{\lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdots \mu_{i-1} \mu_i}$.

- $T_n := \inf\{t \geq 0, X(t) = n\}$.

- Soit $(X(t), t \geq 0)$ un processus de naissance et mort markovien avec taux de transition

$$\begin{cases} n \to n+1 & \text{à taux } \lambda_n \\ n \to n-1 & \text{à taux } \mu_n \end{cases}$$

et $\lambda_n,\ \mu_n > 0$ si $n \geq 1$ et $\lambda_0 = \mu_0 = 0$.

- On suppose que X s'éteint p.s.

$$\sum_{i \geq 1} \frac{1}{\lambda_i \pi_i} = +\infty$$

avec $\pi_i = \frac{\lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdots \mu_{i-1} \mu_i}$.

- $T_n := \inf\{t \geq 0, X(t) = n\}$.

- Soit $(X(t), t \geq 0)$ un processus de naissance et mort markovien avec taux de transition

$$\begin{cases} n \to n+1 & \text{à taux } \lambda_n \\ n \to n-1 & \text{à taux } \mu_n \end{cases}$$

et $\lambda_n,\ \mu_n > 0$ si $n \geq 1$ et $\lambda_0 = \mu_0 = 0$.

- On suppose que X s'éteint p.s.

$$\sum_{i \geq 1} \frac{1}{\lambda_i \pi_i} = +\infty$$

avec $\pi_i = \frac{\lambda_1 \cdots \lambda_{i-1}}{\mu_1 \cdots \mu_{i-1} \mu_i}$.

- $T_n := \inf\{t \geq 0, X(t) = n\}$.

Descente de l'infini

Définition

On dit que X descend de l'infini s'il existe $t > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que

$$\lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}_k(T_m < t) > 0. \tag{CDI}$$

Proposition (van Doorn (91))

Si X s'éteint p.s., on a les équivalences

(i) *X descend de l'infini.*

(ii) $S := \sum_{i \geq 1} \frac{1}{\lambda_i \pi_i} \sum_{j \geq i+1} \pi_j < \infty.$

(iii) $\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}_n[T_0] < \infty.$

(iv) *Pour tout $a > 0$, il existe $m_a \in \mathbb{N}$ tel que* $\sup_{m \geq m_a} \mathbb{E}_m[e^{aT_{m_a}}] < \infty$. *(BMR 2013)*

Descente de l'infini

Définition

On dit que X descend de l'infini s'il existe $t > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que

$$\lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}_k(T_m < t) > 0. \quad \text{(CDI)}$$

Proposition (van Doorn (91))

Si X s'éteint p.s., on a les équivalences

(i) *X descend de l'infini.*

(ii) $S := \sum_{i \geq 1} \frac{1}{\lambda_i \pi_i} \sum_{j \geq i+1} \pi_j < \infty.$

(iii) $\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}_n[T_0] < \infty.$

(iv) *Pour tout $a > 0$, il existe $m_a \in \mathbb{N}$ tel que* $\sup_{m \geq m_a} \mathbb{E}_m[e^{a T_{m_a}}] < \infty$. *(BMR 2013)*

Descente de l'infini

Définition

On dit que X descend de l'infini s'il existe $t > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que

$$\lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}_k(T_m < t) > 0. \tag{CDI}$$

Proposition (van Doorn (91))

Si X s'éteint p.s., on a les équivalences

(i) *X descend de l'infini.*

(ii) $S := \sum_{i \geq 1} \frac{1}{\lambda_i \pi_i} \sum_{j \geq i+1} \pi_j < \infty.$

(iii) $\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}_n[T_0] < \infty.$

(iv) *Pour tout $a > 0$, il existe $m_a \in \mathbb{N}$ tel que* $\sup_{m \geq m_a} \mathbb{E}_m[e^{aT_{m_a}}] < \infty$. *(BMR 2013)*

Descente de l'infini

Définition

On dit que X descend de l'infini s'il existe $t > 0$ et $m \in \mathbb{N}$ tels que

$$\lim_{k\to+\infty} \mathbb{P}_k(T_m < t) > 0. \tag{CDI}$$

Proposition (van Doorn (91))

Si X s'éteint p.s., on a les équivalences

(i) *X descend de l'infini.*

(ii) $S := \sum_{i\geq 1} \frac{1}{\lambda_i \pi_i} \sum_{j\geq i+1} \pi_j < \infty.$

(iii) $\sup_{n\geq 0} \mathbb{E}_n[T_0] < \infty.$

(iv) *Pour tout $a > 0$, il existe $m_a \in \mathbb{N}$ tel que* $\sup_{m\geq m_a} \mathbb{E}_m[e^{aT_{m_a}}] < \infty$. *(BMR 2013)*

Descente de l'infini

Définition

On dit que X descend de l'infini s'il existe $t > 0$ *et* $m \in \mathbb{N}$ *tels que*

$$\lim_{k \to +\infty} \mathbb{P}_k(T_m < t) > 0. \qquad \text{(CDI)}$$

Proposition (van Doorn (91))

Si X s'éteint p.s., on a les équivalences

(i) *X descend de l'infini.*

(ii) $S := \sum_{i \geq 1} \frac{1}{\lambda_i \pi_i} \sum_{j \geq i+1} \pi_j < \infty.$

(iii) $\sup_{n \geq 0} \mathbb{E}_n[T_0] < \infty.$

(iv) *Pour tout* $a > 0$*, il existe* $m_a \in \mathbb{N}$ *tel que* $\sup_{m \geq m_a} \mathbb{E}_m[e^{aT_{m_a}}] < \infty$. *(BMR 2013)*

Proposition (Donnelly (91))

On suppose que X descend de l'infini. Alors $\mathbb{P}_k \underset{k\to\infty}{\Longrightarrow} \mathbb{P}_\infty$ *dans* $\mathbb{D}([0,+\infty),\overline{\mathbb{N}})$. $\mathbb{P}_\infty$ =*"loi de X partant de $+\infty$".*

.

Proposition (BMR 2013)

Si X descend de l'infini,

$$\mathbb{P}_\infty\left(\inf\{t\geq 0,\ X(t)<+\infty\}=0\right)=1.$$

Proposition (Donnelly (91))

On suppose que X descend de l'infini. Alors $\mathbb{P}_k \underset{k\to\infty}{\Longrightarrow} \mathbb{P}_\infty$ *dans* $\mathbb{D}([0,+\infty),\overline{\mathbb{N}})$. $\mathbb{P}_\infty$ =*"loi de X partant de $+\infty$".*

.

Proposition (BMR 2013)

Si X descend de l'infini,

$$\mathbb{P}_\infty\left(\inf\{t\geq 0,\ X(t)<+\infty\}=0\right)=1.$$

- **But :** Étudier le comportement de $X(t)$ quand $t \to 0$ sous $\mathbb{P}_\infty$.
- **Motivations :**
  - ✓ Contrôle de l'évolution de grandes populations (application aux environnements fluctuants).
  - ✓ Résultat similaire pour les Λ-coalescents : Berestycki, Berestycki, Limic (10).

Hypothèses

(H1) $\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} = 0$.

(H2) La suite $(\mu_n)_n$ est à variation régulière d'indice $\rho > 1$:

$$\mu_n \underset{n\to\infty}{\sim} n^\rho l(n)$$

où l une fonction à variation lente.

- (1) et (2) entraînent l'extinction p.s. et la descente de l'infini.

- **But :** Étudier le comportement de $X(t)$ quand $t \to 0$ sous $\mathbb{P}_\infty$.
- **Motivations :**
  - ✓ Contrôle de l'évolution de grandes populations (application aux environnements fluctuants).
  - ✓ Résultat similaire pour les Λ-coalescents : Berestycki, Berestycki, Limic (10).

Hypothèses

(H1) $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} = 0.$

(H2) La suite $(\mu_n)_n$ est à variation régulière d'indice $\rho > 1$:

$$\mu_n \underset{n\to\infty}{\sim} n^\rho l(n)$$

où l une fonction à variation lente.

- (1) et (2) entraînent l'extinction p.s. et la descente de l'infini.

- **But :** Étudier le comportement de $X(t)$ quand $t \to 0$ sous $\mathbb{P}_\infty$.
- **Motivations :**
  - ✓ Contrôle de l'évolution de grandes populations (application aux environnements fluctuants).
  - ✓ Résultat similaire pour les Λ-coalescents : Berestycki, Berestycki, Limic (10).

Hypothèses

(H1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lambda_n}{\mu_n} = 0.$

(H2) La suite $(\mu_n)_n$ est à variation régulière d'indice $\rho > 1$:

$$\mu_n \underset{n\to\infty}{\sim} n^\rho l(n)$$

où l une fonction à variation lente.

- (1) et (2) entraînent l'extinction p.s. et la descente de l'infini.

- **But :** Étudier le comportement de $X(t)$ quand $t \to 0$ sous $\mathbb{P}_\infty$.
- **Motivations :**
  - ✓ Contrôle de l'évolution de grandes populations (application aux environnements fluctuants).
  - ✓ Résultat similaire pour les Λ-coalescents : Berestycki, Berestycki, Limic (10).

Hypothèses

(H1) $\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} = 0.$

(H2) La suite $(\mu_n)_n$ est à variation régulière d'indice $\rho > 1$:

$$\mu_n \underset{n\to\infty}{\sim} n^\rho l(n)$$

où l une fonction à variation lente.

- (1) et (2) entraînent l'extinction p.s. et la descente de l'infini.

- **But :** Étudier le comportement de $X(t)$ quand $t \to 0$ sous $\mathbb{P}_\infty$.
- **Motivations :**
  - ✓ Contrôle de l'évolution de grandes populations (application aux environnements fluctuants).
  - ✓ Résultat similaire pour les Λ-coalescents : Berestycki, Berestycki, Limic (10).

Hypothèses

(H1) $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\lambda_n}{\mu_n} = 0.$

(H2) La suite $(\mu_n)_n$ est à variation régulière d'indice $\rho > 1$:

$$\mu_n \underset{n\to\infty}{\sim} n^\rho l(n)$$

où l une fonction à variation lente.

- (1) et (2) entraînent l'extinction p.s. et la descente de l'infini.

- **But :** Étudier le comportement de $X(t)$ quand $t \to 0$ sous $\mathbb{P}_\infty$.
- **Motivations :**
  - ✓ Contrôle de l'évolution de grandes populations (application aux environnements fluctuants).
  - ✓ Résultat similaire pour les Λ-coalescents : Berestycki, Berestycki, Limic (10).

Hypothèses

(H1) $\lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_n}{\mu_n} = 0.$

(H2) La suite $(\mu_n)_n$ est à variation régulière d'indice $\rho > 1$:

$$\mu_n \underset{n\to\infty}{\sim} n^\rho l(n)$$

où l une fonction à variation lente.

- (1) et (2) entraînent l'extinction p.s. et la descente de l'infini.

Comportement de T_n quand $n \to +\infty$

Théorème (BMR 2013)

Sous (1) *et* (2), $\mathbb{P}_\infty$*-p.s.*

$$\frac{T_n}{\mathbb{E}_\infty(T_n)} \underset{n\to+\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Comportement de $X(t)$ quand $t \to 0$

- Soit $(v(t), t \geq 0)$ la fonction inverse généralisée de $n \mapsto \mathbb{E}_\infty(T_n)$.
- La fonction v est décroissante et $v(0^+) = +\infty$.
- Comme on suppose que μ_n est à variation régulière d'indice $\rho > 1$, on a

$$v(t) \underset{t \to 0}{\sim} t^{\frac{1}{1-\rho}} \tilde{l}(t).$$

Comportement de $X(t)$ quand $t \to 0$

- Soit $(v(t), t \geq 0)$ la fonction inverse généralisée de $n \mapsto \mathbb{E}_\infty(T_n)$.
- La fonction v est décroissante et $v(0^+) = +\infty$.
- Comme on suppose que μ_n est à variation régulière d'indice $\rho > 1$, on a

$$v(t) \underset{t \to 0}{\sim} t^{\frac{1}{1-\rho}} \tilde{l}(t).$$

Comportement de $X(t)$ quand $t \to 0$

- Soit $(v(t), t \geq 0)$ la fonction inverse généralisée de $n \mapsto \mathbb{E}_\infty(T_n)$.
- La fonction v est décroissante et $v(0^+) = +\infty$.
- Comme on suppose que μ_n est à variation régulière d'indice $\rho > 1$, on a

$$v(t) \underset{t \to 0}{\sim} t^{\frac{1}{1-\rho}} \tilde{l}(t).$$

Comportement de $X(t)$ quand $t \to 0$

Théorème (BMR 2013)

- *Sous* (1) *et* (2),

$$\lim_{t \to 0} \frac{X(t)}{v(t)} = 1 \qquad \mathbb{P}_\infty - p.s.$$

- *Si de plus,* $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \frac{\lambda_n}{\mu_n} < \infty$,

$$\sqrt{(2\rho - 1)v(t)} \left(\frac{X(t)}{v(t)} - 1 \right) \underset{t \to 0}{\Longrightarrow} N(0,1).$$

Vitesse de descente de l'infini p.s. similaire à celle de Berestycki et al. pour les Λ-coalescents.

Comportement de $X(t)$ quand $t \to 0$

Théorème (BMR 2013)

- *Sous* (1) *et* (2),

$$\lim_{t\to 0} \frac{X(t)}{v(t)} = 1 \qquad \mathbb{P}_\infty - p.s.$$

- *Si de plus,* $\sum_{n\geq 1} \frac{1}{n}\frac{\lambda_n}{\mu_n} < \infty$,

$$\sqrt{(2\rho - 1)v(t)}\left(\frac{X(t)}{v(t)} - 1\right) \underset{t\to 0}{\Longrightarrow} N(0,1).$$

Vitesse de descente de l'infini p.s. similaire à celle de Berestycki et al. pour les Λ-coalescents.

Comportement de $X(t)$ quand $t \to 0$

Théorème (BMR 2013)

- *Sous* (1) *et* (2),

$$\lim_{t \to 0} \frac{X(t)}{v(t)} = 1 \qquad \mathbb{P}_\infty - p.s.$$

- *Si de plus,* $\sum_{n \geq 1} \frac{1}{n} \frac{\lambda_n}{\mu_n} < \infty$,

$$\sqrt{(2\rho - 1)v(t)} \left(\frac{X(t)}{v(t)} - 1 \right) \underset{t \to 0}{\Longrightarrow} N(0, 1).$$

Vitesse de descente de l'infini p.s. similaire à celle de Berestycki et al. pour les Λ-coalescents.

Extinction rapide

Contrôle de la probabilité d'extinction en temps petit d'une population initiale infinie :

Proposition (BMR 2013)

Sous (1) *et* (2),

$$\frac{\log\left(-\log \mathbb{P}_\infty(T_0 \le t)\right)}{\log t} \xrightarrow[t\to 0]{} \frac{1}{1-\rho}.$$

$$\mathbb{P}_\infty(T_0 \le t) \underset{t\to 0}{\approx} \exp\left(-t^{\frac{1}{1-\rho}}\right).$$

Extinction rapide

Contrôle de la probabilité d'extinction en temps petit d'une population initiale infinie :

Proposition (BMR 2013)

Sous (1) *et* (2),

$$\frac{\log\left(-\log \mathbb{P}_\infty(T_0 \leq t)\right)}{\log t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{1-\rho}.$$

$$\mathbb{P}_\infty(T_0 \leq t) \underset{t\to 0}{\approx} \exp\left(-t^{\frac{1}{1-\rho}}\right).$$

Extinction rapide

Contrôle de la probabilité d'extinction en temps petit d'une population initiale infinie :

Proposition (BMR 2013)

Sous (1) *et* (2),

$$\frac{\log\left(-\log \mathbb{P}_\infty(T_0 \leq t)\right)}{\log t} \underset{t\to 0}{\longrightarrow} \frac{1}{1-\rho}.$$

$$\mathbb{P}_\infty(T_0 \leq t) \underset{t\to 0}{\approx} \exp\left(-t^{\frac{1}{1-\rho}}\right).$$

Naissance et mort en environnements fluctuants.

- La population subit deux environnements différents qui alternent : avec ou sans compétition.

- Sur les intervalles $[a_i + t_i, a_{i+1})$, évolution selon $\lambda_n = bn$, $\mu_n = dn$ avec $b > d$: pas de compétition et surcritique.

- Sur les intervalles $[a_i, a_i + t_i)$, processus de naissance et mort avec taux $(\tilde{\lambda}_n, \tilde{\mu}_n)_n$ tels que $\tilde{\lambda}_n / \tilde{\mu}_n \to 0$ et $(\tilde{\mu}_n)_n$ VR d'indice $\rho > 1$: compétition.

  Exemple : branchement logistique

$$\tilde{\lambda}_n = bn, \quad \tilde{\mu}_n = dn + c\frac{n(n-1)}{2}.$$

Naissance et mort en environnements fluctuants.

- La population subit deux environnements différents qui alternent : avec ou sans compétition.
- Sur les intervalles $[a_i + t_i, a_{i+1})$, évolution selon $\lambda_n = bn$, $\mu_n = dn$ avec $b > d$: pas de compétition et surcritique.
- Sur les intervalles $[a_i, a_i + t_i)$, processus de naissance et mort avec taux $(\tilde{\lambda}_n, \tilde{\mu}_n)_n$ tels que $\tilde{\lambda}_n / \tilde{\mu}_n \to 0$ et $(\tilde{\mu}_n)_n$ VR d'indice $\rho > 1$: compétition.

  Exemple : branchement logistique

$$\tilde{\lambda}_n = bn, \quad \tilde{\mu}_n = dn + c\frac{n(n-1)}{2}.$$

Naissance et mort en environnements fluctuants.

- La population subit deux environnements différents qui alternent : avec ou sans compétition.
- Sur les intervalles $[a_i + t_i, a_{i+1})$, évolution selon $\lambda_n = bn$, $\mu_n = dn$ avec $b > d$: pas de compétition et surcritique.
- Sur les intervalles $[a_i, a_i + t_i)$, processus de naissance et mort avec taux $(\tilde{\lambda}_n, \tilde{\mu}_n)_n$ tels que $\tilde{\lambda}_n/\tilde{\mu}_n \to 0$ et $(\tilde{\mu}_n)_n$ VR d'indice $\rho > 1$: compétition.

Exemple : branchement logistique

$$\tilde{\lambda}_n = bn, \quad \tilde{\mu}_n = dn + c\frac{n(n-1)}{2}.$$

Naissance et mort en environnements fluctuants.

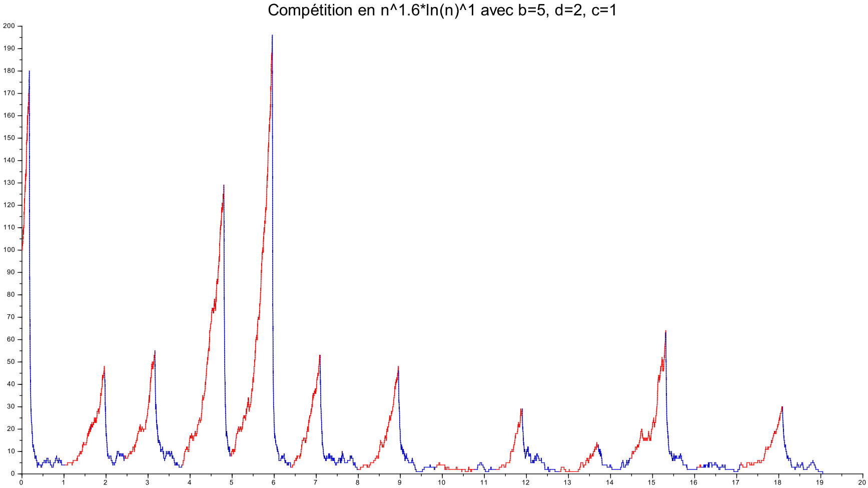
- La population subit deux environnements différents qui alternent : avec ou sans compétition.

- Sur les intervalles $[a_i + t_i, a_{i+1})$, évolution selon $\lambda_n = bn$, $\mu_n = dn$ avec $b > d$: pas de compétition et surcritique.

- Sur les intervalles $[a_i, a_i + t_i)$, processus de naissance et mort avec taux $(\tilde{\lambda}_n, \tilde{\mu}_n)_n$ tels que $\tilde{\lambda}_n / \tilde{\mu}_n \to 0$ et $(\tilde{\mu}_n)_n$ VR d'indice $\rho > 1$: compétition.

  Exemple : branchement logistique

$$\tilde{\lambda}_n = bn, \quad \tilde{\mu}_n = dn + c\frac{n(n-1)}{2}.$$


Compétition en n^1.6*ln(n)^1 avec b=5, d=2, c=1
200
190
180
170
160
150
140
130
120
110
100
90
80
70
60
50
40
30
20
10
0
0 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13 14 15 16 17 18 19 20

Condition d'extinction

Proposition (BMR 2013)

S'il existe $c > 0$ et $\beta < \rho - 1$ tels que pour i assez grand

$$t_i > \frac{c}{(\log i)^\beta},$$

alors la population s'éteint p.s.

Perspectives

- Possibilité de naissances simultanées :

$$\begin{cases} n \to n + k & \text{à taux } \lambda_n \nu(k) \\ n \to n - 1 & \text{à taux } \mu_n \end{cases}$$

où ν mesure de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

- Cadre général englobant les processus de naissance et mort et les Λ-coalescents.

Perspectives

- Possibilité de naissances simultanées :

$$\begin{cases} n \to n + k & \text{à taux } \lambda_n \nu(k) \\ n \to n - 1 & \text{à taux } \mu_n \end{cases}$$

où ν mesure de probabilité sur $\mathbb{N}^*$.

- Cadre général englobant les processus de naissance et mort et les Λ-coalescents.

Merci pour votre attention et pour votre participation à cette école.