Binary trees, exploration processes, and an extented Ray–Knight Theorem

M. Ba (Marseille I)   É. Pardoux (Marseille I)   A. B. Sow (UGB)

Rencontre ANR, Marseille

October 19, 2010

Resumé

On étudie la bijection entre arbres de Galton Watson à temps continu et leur processus d'exploration dans les deux cas: sous-critique et sur-critique. On procéde à une renormalisation de notre arbre de Galton-Watson et du processus d'exploration pour obtenir une preuve rigoureuse du théorème de Delmas généralisant le théorème Ray-Knigh qui établit l'égalite en loi du temps local d'un brownien réflèchi à l'instant où le temps local en 0 atteint $x > 0$ et un processus de Feller critique. Ici on montre aussi que le même résultat est vrai dans le cas sous critique (resp sur critique) où le mouvement brownien est remplacé par un brownien avec drift.

Introduction

- On décrit une certaine bijection et on montre dans le cas sous critique, que l'arbre obtenu en dessous d'une trajectoire d'un processus d'exploration a la même loi qu'un arbre de Galton Watson. Le résultat a été deja établi dans le cas critique par Le Gall, et dans le cas sous-critque par Pitman-Winkel, Geiger-Kersting, Lambert où les processus d'exploration considérés sont des processus de sauts alors que ceux considérés ici sont continus.
- Dans le cas surcritique on établit aussi la bijection entre arbres binaires de Galton Watson tuè à un niveau $a > 0$ et les processus d'exploration réflèchis en dessous de a.
- On donne des résultats de convergence de certains processus considérés.

Introduction

- On décrit une certaine bijection et on montre dans le cas sous critique, que l'arbre obtenu en dessous d'une trajectoire d'un processus d'exploration a la même loi qu'un arbre de Galton Watson. Le résultat a été deja établi dans le cas critique par Le Gall, et dans le cas sous-critque par Pitman-Winkel, Geiger-Kersting, Lambert où les processus d'exploration considérés sont des processus de sauts alors que ceux considérés ici sont continus.
- Dans le cas surcritique on établit aussi la bijection entre arbres binaires de Galton Watson tuè à un niveau $a > 0$ et les processus d'exploration réflèchis en dessous de a.
- On donne des résultats de convergence de certains processus considérés.

Introduction

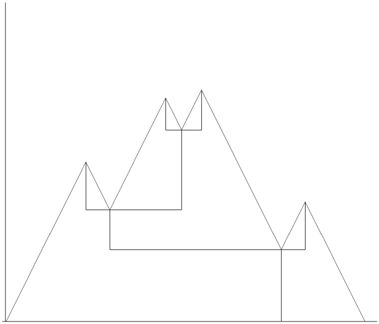
- On décrit une certaine bijection et on montre dans le cas sous critique, que l'arbre obtenu en dessous d'une trajectoire d'un processus d'exploration a la même loi qu'un arbre de Galton Watson. Le résultat a été deja établi dans le cas critique par Le Gall, et dans le cas sous-critque par Pitman-Winkel, Geiger-Kersting, Lambert où les processus d'exploration considérés sont des processus de sauts alors que ceux considérés ici sont continus.
- Dans le cas surcritique on établit aussi la bijection entre arbres binaires de Galton Watson tuè à un niveau $a > 0$ et les processus d'exploration réflèchis en dessous de a.
- On donne des résultats de convergence de certains processus considérés.

Preliminaires

On note par $\mathcal{H}_{p,m}$ l'ensemble des fonctions $H : s \mapsto H(s)$ de $[0, T_m]$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$, lineaire par morceaux avec des pentes alternatives de p et $-p$, qui partent de (0,0) avec une pente p, réflèchi dès qu'elle touche zero, et arrête au premier instant T_m où elle retouche zéro pour m–ieme fois, qu'on suppose être fini. On ajoute aussi l'hypothése qu'il ne peut y avoir deux mimimas locaux au même niveau. On écrit $\mathcal{H}_p$ pour $\mathcal{H}_{p,1}$.
On note ègalement par $\mathcal{T}$ l'ensemble des arbres binaires enracinés finis et par $\mathcal{T}_m$ l'ensemble des forêts d'arbres qui sont union de m éléments de $\mathcal{T}$.
Il est bien connu qu'on a une bijection Φ_p entre $\mathcal{H}_p$ et $\mathcal{T}$ qui a tout processus d'exploration associe un arbre binaire. On définit des mesures de probabilités sur $\mathcal{H}_p$ (resp. $\mathcal{H}_{p,m}$) et $\mathcal{T}$ (resp. $\mathcal{T}_m$).

Bijection

1



Processus d'exploration

Soit $0 < \mu \leq \lambda$ deux parametres. On définit un processus stochastique à trajectoires dans $\mathcal{H}_p$ comme suit. Soient $\{U_k,\ k \geq 1\}$ et $\{V_k,\ k \geq 1\}$ deux suites mutuellement independantes de variables i.i.d de lois exponentielles de parametres respectifs λ et μ. On définit $Z_k = U_k - V_k$, $k \geq 1$. La hauteur du premier maxima local est U_1 et et celle du premier minima local $(Z_1)^+$. Si $Z_1 = 0$, le processus est arrête. Sinon, la hauteur du deuxieme maxima local est $Z_1 + U_2$, et celle du deuxieme minima est $(Z_1 + Z_2)^+$, etc.
On note par $\mathbb{P}_{\lambda,\mu}$ la loi du processus.

Arbre binaire Galton Watson

On considére un arbre binaire de Galton Watson sous critique de taux de mort λ et de taux de naissance μ. On note par $\mathbb{Q}_{\lambda,\mu}$ la loi de cet élément aléatoire à valeurs dans $\mathcal{T}$.

Cas sous critique

Theorem

$$\mathbb{Q}_{\lambda,\mu} = \mathbb{P}_{\lambda,\mu}\Phi_p^{-1}.$$

Le théorème dit que l'arbre associé au processus d'exploration $\{\mathrm{H}_s,\ 0 \leq s\}$ est un arbre binaire aléatoire de taux de mort λ et de taux de naissance μ et vice versa.

Quelques résultats utiles pour la preuve du Théorème

Lemme

Soit $(T_k)_{k\geq 0}$ *un processus ponctuel de Poisson sur* $\mathbb{R}_+$ *d'intensité* μ, *M une* $v.a.$ *positive, indépendant de* $(T_k)_{k\geq 0}$ *et*

$$R_M = \sup_{k\geq 0} \{T_k; T_k \leq M\}.$$

Alors $M - R_M$ *a la même loi que* $V \wedge M$, *où* V *est une* $v.a.$ *indépendante de* M *de loi exponentielle de paramétre* μ.

Quelques résultats utiles pour la preuve du Théorème 1

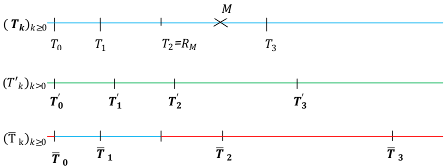
Lemme

Soit $(T_k)_{k\geq 0}$ un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité μ. M une v.a. positive indépendante de $(T_k)_{k\geq 0}$. Soit la variable aléatoire entière K telle que $T_K = R_M$. Et soit $(T'_k)_{k\geq 0}$ un second processus ponctuel de Poisson d'intensité μ, conjointement indépendant du premier et de M. Alors $\left(\bar{T}_k\right)_{k\geq 0}$ défini par:

$$\bar{T}_k = \begin{cases} T_k & si\ k < K \\ T_K + T'_{k-K+1} & si\ k \geq K \end{cases}$$

est un processus ponctuel de Poisson sur $\mathbb{R}_+$ d'intensité μ et indépendant de R_M.

Lemme



$(T_k)_{k\geq 0}$
M
T_0
T_1
$T_2=R_M$
T_3
$(T'_k)_{k>0}$
T'_0
T'_1
T'_2
T'_3
$(\overline{T}_k)_{k\geq 0}$
$\overline{T}_0$
$\overline{T}_1$
$\overline{T}_2$
$\overline{T}_3$

Processus de branchement

Considérons le processus d'exploration $(H_s)_{s\geq 0}$ défini plus haut avec $p = 2$ qui est réfléchi en zéro et arrêté au premier instant $s > 0$ où il retouche zéro pour la m-ième fois.
Soit $(Z_t^m)_{t\geq 0}$ le processus de branchement à temps continu donnant la taille de la population à l'instant t des m arbres recouverts par le processus d'exploration.

Temps local

On définit le temps local $L_s(t)$ du processus d'exploration $(H_s)_{s\geq 0}$ au niveau t à l'instant s par la formule:

$$L_s(t) = \lim_{\varepsilon \downarrow 0} \frac{1}{\varepsilon} \int_0^s \mathbf{1}_{\{t \leq H_r < t+\varepsilon\}} dr. \tag{1}$$

Représentation discrete à la Ray Knight

Soit

$$\tau_m = \inf\{s > 0 : L_s(0) \geq m\}.$$

Lemme

$$\{L_{\tau_m}(t),\ t \geq 0\} \equiv \{Z_t^m,\ t \geq 0\}.$$

Renormalisation

On pose $m = [Nx]$, $x > 0$. Soit $\left(Z_t^N\right)_{t \geq 0}$ le processus de branchement donnant la taille de la population constituée des $[Nx]$ arbres binaires de taux de naissance $\mu_N = 2N + \alpha$ et de taux de mort $\lambda_N = 2N + \delta$, avec $0 < \alpha < \delta$. On pose

$$X^N(t) = \frac{Z^N(t)}{N}.$$

Soit H^N le processus d'exploration associé à Z^N de pentes $\pm 2N$ et $L_s^N(t)$ le temps local de H^N à l'instant s au niveau t défini comme précédemment. $L_s^N(t)$ compte le nombre de paires de branches qui coupent le niveau t entre l'instant 0 et s divisé par N.

Renormalisation

$$\tau_x^N = \inf\left\{s > 0 : L_s^N(0) \geq \frac{[Nx]}{N}\right\}.$$

On a egalement

Lemme

$$\left\{L^N_{\tau_x^N}(t),\ t \geq 0\right\} \equiv \left\{X_t^N,\ t \geq 0\right\}.$$

Cas surcritique

On suppose que $\mu > \lambda$. Pour tout $a > 0$, on considere un processus $\{H_t^a,\ t \geq 0\}$ defini comme precedemment avec des pentes $\pm p$, mais reflechi entre [0,a], arrete au premier instant où il atteint zero.
On note par $\mathbb{P}_{\lambda,\mu,a}$ la loi du processus H^a et $\mathbb{Q}_{\lambda,\mu,a}$ la loi d'un arbre de Galton Watson de parametres (λ, μ), tué au temps $t = a$.

Proposition

Pour tout $a, \lambda, \mu > 0$,

$$\mathbb{Q}_{\lambda,\mu,a} = \mathbb{P}_{\lambda,\mu,a}\Phi_p^{-1}.$$

Cas surcritique

Pour tout $b > a > 0$, on définit l'application $\Pi^{a,b}$ transforme les trajectoires de $\mathcal{H}_p$ à valeurs dans $[0, b]$ à des trajectories à valeurs dans $[0, a]$ comme suit. Soit $\rho : \mathbb{R} \mapsto \mathbb{R}$ une fonction telle que:

$$\rho(0) = 0; \qquad \frac{d\rho}{ds} = \mathbf{1}_{\{H^b > a\}}(s),$$

$$\Pi^{a,b}(H^b)(s) = H^b_{s-\rho(s)}$$

Lemma

$$\Pi^{a,b}(H^b) \stackrel{(d)}{=} H^a.$$

Temps local (cas surcritique)

Pour tout $a > 0$, $m \geq 1$, on définit le temps d'arret

$$\tau_m^a = \inf\{s > 0;\ L_s^a(0) \geq m\},$$

En vertu du lemme, pour tout $b > a > 0$, $m \geq 0$:

$$(L^b_{\tau^b_m}(t), 0 \leq t \leq a) \stackrel{(d)}{=} (L^a_{\tau^a_m}(t), 0 \leq t \leq a),$$

Par conséquent, pour tout m on peut définir la limite projective, qui est un processus $\{\mathcal{L}_m(t), t \geq 0\}$ à valeurs dans $\mathbb{R}_+$ tel que pour tout $a > 0$,

$$\{\mathcal{L}_m(t), 0 \leq t \leq a\} \stackrel{(d)}{=} \{L^a_{\tau^a_m}(t), 0 \leq t \leq a\}.$$

On a la représentation à la Ray Knigh suivante:

Lemme

$$\{\mathcal{L}_m(t), t \geq 0, m \geq 1\} \stackrel{(d)}{=} \left\{Z_t^{m,a},\ t \geq 0, m \geq 0\right\}.$$

En procédant à la même renormalisation que dans le cas souscritique, on obtient aussi le lemme suivant.

Lemme

$$\{\mathcal{L}_x^N(t), t \geq 0, x \geq 0\} \stackrel{(d)}{=} \left\{X_t^{N,x}, t \geq 0, x \geq 0\right\}.$$

Convergence dans D

Considérons une suite $\{X_t^n,\ t \geq 0\}_{n\geq 1}$ de semi martingales unidimensionnelles, qui est telle que pour tout $n \geq 1$,

$$X_t^n = X_0^n + \int_0^t \varphi_n(X_s^n)ds + M_t^n,\ 0 \leq t \leq T;$$
$$\langle M^n \rangle_t = \int_0^t \psi_n(X_s^n)ds,\ t \geq 0;$$

où pour tout $n \geq 1$, $M_\cdot^n$ est une martingale locale de carré integrable, φ_n sont ψ_n sont des fonctions boreliennes de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$ et $\mathbb{R}_+$ respectivement.

Critere de tension dans D

Proposition

Une condition suffisante pour que la suite $\{X_t^n,\ t \geq 0\}_{n\geq 1}$ *soit tendue dans* $D([0,\infty))$ *est:*

- *la suite de v.a* $\{X_0^n,\ n \geq 1\}$ *est tendue;*
- *pour tout* $T > 0$*, il existe un* $p > 1$*,*

$$\textit{la suite de v.a}\{\int_0^T [|\varphi_n(X_t^n)| + \psi_n(X_t^n)]^p dt,\ n \geq 1\} \textit{ est tendue.} \quad (2)$$

Si de plus, pour tout $T > 0$*, quand* $n \to \infty$*,*

$$\sup_{0\leq t\leq T} |M_t^n - M_{t^-}^n| \to 0 \quad \textit{en probabilité,}$$

alors toute limite X *d'une sous suite convergente de la suite* $\{X^n\}_{n\geq 1}$ *est p. s. continue.*

Dynamique de H^N

$H_0^N = 0$, $V_0^N = 1$. V^N est un processus à valeurs dans $\{-1, 1\}$.

$$\frac{dH_s^N}{ds} = 2NV_s^N,$$
$$dV_s^N = 2\mathbf{1}_{\{V_{s-}^N = -1\}} dP_s^+ - 2\mathbf{1}_{\{V_{s-}^N = +1\}} dP_s^- + 2NdL_s^N(0); \qquad (3)$$

où $\{P_s^+,\ s \geq 0\}$ et $\{P_s^-,\ s \geq 0\}$ deux processus de Poisson mutuellement independants d'intensités respectifs $4N^2 + 2\alpha N$ et $4N^2 + 2\beta N$.

Théorème 2

Théorème

1. $X^N \Longrightarrow X$ *où* X *vérifie*

$$X_t^x = x + (\alpha - \beta) \int_0^t X_r^x dr + 2 \int_0^t \sqrt{X_r^x} dB_r, \;\; t \geq 0$$

2. $H^N \Longrightarrow H$ *où* H *vérifie*

$$H_s = \frac{\alpha - \beta}{2} s + B_s + \frac{1}{2} L_s(0)$$

3. $H^{N,a} \Longrightarrow H^a$ *où* H^a *vérifie*

$$H_s^a = \frac{(\alpha - \beta)}{2} s + B_s + \frac{1}{2} L_s^a(0) - \frac{1}{2} L_s^a(a^-),$$

Théorème 2

Théorème

1. $X^N \Longrightarrow X$ *où* X *vérifie*

$$X_t^x = x + (\alpha - \beta)\int_0^t X_r^x dr + 2\int_0^t \sqrt{X_r^x} dB_r, \;\; t \geq 0$$

2. $H^N \Longrightarrow H$ *où* H *vérifie*

$$H_s = \frac{\alpha - \beta}{2} s + B_s + \frac{1}{2} L_s(0)$$

3. $H^{N,a} \Longrightarrow H^a$ *où* H^a *vérifie*

$$H_s^a = \frac{(\alpha - \beta)}{2} s + B_s + \frac{1}{2} L_s^a(0) - \frac{1}{2} L_s^a(a^-),$$

Théorème 2

Théorème

1. $X^N \Longrightarrow X$ *où* X *vérifie*

$$X_t^x = x + (\alpha - \beta)\int_0^t X_r^x dr + 2\int_0^t \sqrt{X_r^x} dB_r, \;\; t \geq 0$$

2. $H^N \Longrightarrow H$ *où* H *vérifie*

$$H_s = \frac{\alpha - \beta}{2} s + B_s + \frac{1}{2} L_s(0)$$

3. $H^{N,a} \Longrightarrow H^a$ *où* H^a *vérifie*

$$H_s^a = \frac{(\alpha - \beta)}{2} s + B_s + \frac{1}{2} L_s^a(0) - \frac{1}{2} L_s^a(a^-),$$

Extension du théorème de Ray Knight

$$\tau_x = \inf\{s > 0; L_s(0) > x\},$$

$$\tau_x^a = \inf\{s > 0,\ L_s^a(0) > x\}.$$

Comme précédemment pour tout $x > 0$, on peut définir un processus $\{\mathcal{L}_x(t),\ t \geq 0\}$ tel que pout tout $a > 0$,

$$\{\mathcal{L}_x(t),\ 0 \leq t \leq a\} \overset{(d)}{=} \{L^a_{\tau_x^a}(t),\ 0 \leq t \leq a\}.$$

Theorem (Generalized Ray Knight theorem)

$$\{\mathcal{L}_x(t),\ t \geq 0, \geq 0\} \overset{(d)}{=} \{X_t^x,\ t \geq 0, \geq 0\},$$

X^x est une diffusion de Feller , solution de l'EDS

$$X_t^x = x + (\alpha - \beta)\int_0^t X_r^x dr + 2\int_0^t \sqrt{X_r^x} dB_r,\ t \geq 0.$$

Esquisse de la preuve

En appliquant la formule du temps d'occupation au processus H^N, on a pour tout $g \in C(\mathbb{R}_+)$ à support compact dans [0,a],

$$\int_0^{\tau_x^{N,a}} g(H_r^{N,a})dr = \int_0^\infty g(t)L_{\tau_x^{N,a}}^{N,a}(t)dt$$
$$= \int_0^a g(t)X_t^{N,x}dt \qquad (4)$$

Esquisse de la preuve

Puisque $X^{N,x} \Longrightarrow X^x$, on a

$$\int_0^a g(t) X_t^{N,x} dt \Longrightarrow \int_0^a g(t) X_t^x dt. \tag{5}$$

Pour démontrer le théorème il suffit de montrer que

$$\int_0^{\tau_x^N} g(H_r^N) dr \Longrightarrow \int_0^{\tau_x} g(H_r) dr. \tag{6}$$

Par ailleurs on a

$$\int_0^{\tau_x^a} g(H_r^a) dr = \int_0^a g(t) L^a_{\tau_x^a}(t) dt. \tag{7}$$

Esquisse de la preuve

De (4), (5), (6),(7) et du fait *p.s* les processus $(X_t^x, t \geq 0)$ et $(\mathcal{L}_x(t), t \geq 0)$ sont continus, on déduit le résultat.
Le résultat (6) découle du fait que

$$(H^N, \tau_x^N) \Longrightarrow (H, \tau_x).$$

ce qui demontre bien le theoreme.

Merci pour votre attention