Théorèmes limites pour des "splittings trees" avec immigration

Mathieu Richard

Laboratoire de Probabilités et Modèles Aléatoires, Paris 6

Journée ANR MANEGE, 18 octobre 2010

1. Le modèle
   - Splitting trees
   - Immigration
   - Résultats
2. Preuve du Théorème I
   - Convergence de $(X(t), t \geq 0)$
   - Convergence de la population totale
   - Calcul de la loi du vecteur limite
3. Modèle 2
   - Résultat
   - Preuve

Splittings trees

Les splittings trees sont des arbres aléatoires satisfaisant :

- les individus se comportent indépendamment les uns des autres et ont des durées de vie i.i.d.,
- conditionnellement à sa date de naissance α et à sa durée de vie ζ, chaque individu se reproduit selon un processus ponctuel de Poisson d'intensité b sur $(\alpha, \alpha + \zeta)$,
- les naissances arrivent séparement.

Splittings trees

Les splittings trees sont des arbres aléatoires satisfaisant :

- les individus se comportent indépendamment les uns des autres et ont des durées de vie i.i.d.,
- conditionnellement à sa date de naissance α et à sa durée de vie ζ, chaque individu se reproduit selon un processus ponctuel de Poisson d'intensité b sur $(\alpha, \alpha + \zeta)$,
- les naissances arrivent séparement.

Splittings trees

Les splittings trees sont des arbres aléatoires satisfaisant :

- les individus se comportent indépendamment les uns des autres et ont des durées de vie i.i.d.,
- conditionnellement à sa date de naissance α et à sa durée de vie ζ, chaque individu se reproduit selon un processus ponctuel de Poisson d'intensité *b* sur $(\alpha, \alpha + \zeta)$,
- les naissances arrivent séparement.

Splittings trees

Les splittings trees sont des arbres aléatoires satisfaisant :

- les individus se comportent indépendamment les uns des autres et ont des durées de vie i.i.d.,
- conditionnellement à sa date de naissance α et à sa durée de vie ζ, chaque individu se reproduit selon un processus ponctuel de Poisson d'intensité *b* sur $(\alpha, \alpha + \zeta)$,
- les naissances arrivent séparement.

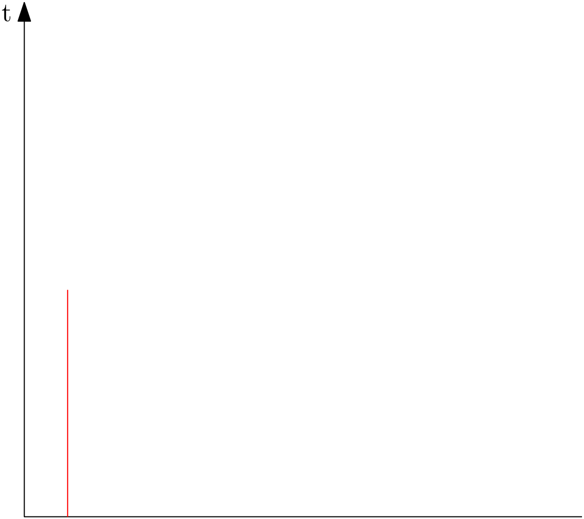


FIGURE: Un exemple de "splitting tree". Le temps est en ordonnées et l'axe horizontal représente la filiation.

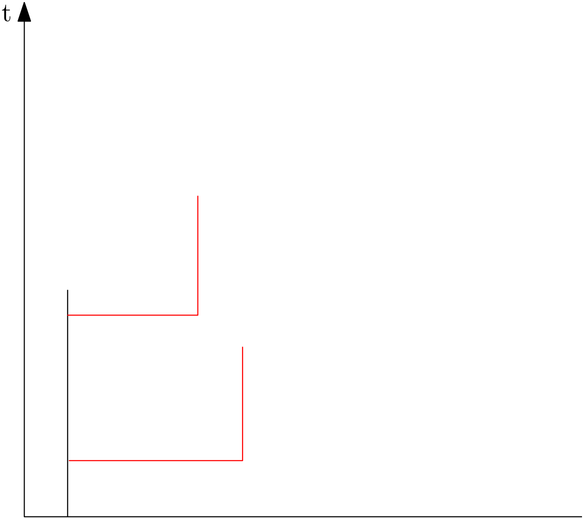


FIGURE: Un exemple de "splitting tree". Le temps est en ordonnées et l'axe horizontal représente la filiation.

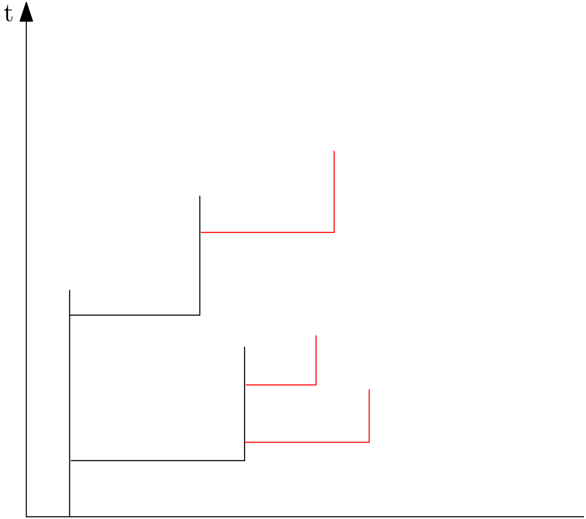


FIGURE: Un exemple de "splitting tree". Le temps est en ordonnées et l'axe horizontal représente la filiation.

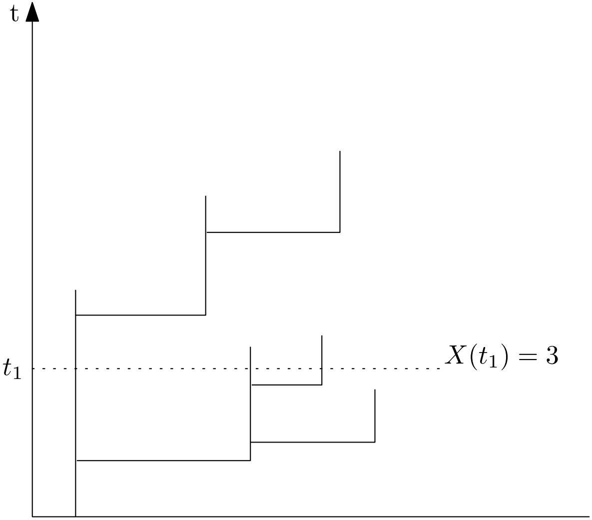


FIGURE: Un exemple de "splitting tree". Le temps est en ordonnées et l'axe horizontal représente la filiation.

- On note $\Lambda(\cdot)/b$ la loi commune des durées de vie où Λ est une mesure positive sur $(0,\infty)$ de masse b.
- On ne considère que des arbres surcritiques :

$$m := \int_{(0,\infty)} r\Lambda(dr) > 1.$$

- Si $X(t)$ désigne le nombre d'individus vivant au temps t, le processus $(X(t), t \geq 0)$ est un processus de Crump-Mode-Jagers (CMJ) (ou processus de branchement général) qui est binaire (une naissance à la fois) et homogène (taux constant des naissances).
- Ce processus n'est en général pas Markovien sauf si les durées de vie sont des exponentielles de paramètre d ; dans ce cas X est un processus de vie et de mort avec taux de naissance b et de mort d.

- On note $\Lambda(\cdot)/b$ la loi commune des durées de vie où Λ est une mesure positive sur $(0,\infty)$ de masse b.
- On ne considère que des arbres surcritiques :

$$m := \int_{(0,\infty)} r\Lambda(dr) > 1.$$

- Si $X(t)$ désigne le nombre d'individus vivant au temps t, le processus $(X(t), t \geq 0)$ est un processus de Crump-Mode-Jagers (CMJ) (ou processus de branchement général) qui est binaire (une naissance à la fois) et homogène (taux constant des naissances).

- Ce processus n'est en général pas Markovien sauf si les durées de vie sont des exponentielles de paramètre d ; dans ce cas X est un processus de vie et de mort avec taux de naissance b et de mort d.

- On note $\Lambda(\cdot)/b$ la loi commune des durées de vie où Λ est une mesure positive sur $(0,\infty)$ de masse b.
- On ne considère que des arbres surcritiques :

$$m := \int_{(0,\infty)} r\Lambda(dr) > 1.$$

- Si $X(t)$ désigne le nombre d'individus vivant au temps t, le processus $(X(t), t \geq 0)$ est un processus de Crump-Mode-Jagers (CMJ) (ou processus de branchement général) qui est binaire (une naissance à la fois) et homogène (taux constant des naissances).
- Ce processus n'est en général pas Markovien sauf si les durées de vie sont des exponentielles de paramètre d ; dans ce cas X est un processus de vie et de mort avec taux de naissance b et de mort d.

- On note $\Lambda(\cdot)/b$ la loi commune des durées de vie où Λ est une mesure positive sur $(0, \infty)$ de masse b.
- On ne considère que des arbres surcritiques :

$$m := \int_{(0,\infty)} r\Lambda(dr) > 1.$$

- Si $X(t)$ désigne le nombre d'individus vivant au temps t, le processus $(X(t), t \geq 0)$ est un processus de Crump-Mode-Jagers (CMJ) (ou processus de branchement général) qui est binaire (une naissance à la fois) et homogène (taux constant des naissances).
- Ce processus n'est en général pas Markovien sauf si les durées de vie sont des exponentielles de paramètre d ; dans ce cas X est un processus de vie et de mort avec taux de naissance b et de mort d.

Immigration

- Soient $T_1 < T_2 < \cdots$ les points d'un processus de Poisson d'intensité $\theta > 0$. A chaque temps T_i, un individu immigre sur l'île et fonde une nouvelle population qui évolue comme X et indépendamment des autres populations.
- Plus précisément, si $(Z^i(t), t \geq 0)$ désigne la i-ème plus vieille famille (celle débutée au temps T_i), alors

$$Z^i(t) = X_i(t - T_i)\mathbb{1}_{\{t \geq T_i\}}$$

où $X_1, X_2, \ldots$ sont des copies de X indépendantes de $(T_i, i \geq 1)$.

- On notera $(Z^{(i)}(t), t \geq 0)$ la i-ème plus vieille famille parmi celles qui survivent et $T^{(i)}$ sa date de naissance.
- Soit $I(t)$ la population totale au temps t

$$I(t) = \sum_{i \geq 1} Z^i(t).$$

Immigration

- Soient $T_1 < T_2 < \cdots$ les points d'un processus de Poisson d'intensité $\theta > 0$. A chaque temps T_i, un individu immigre sur l'île et fonde une nouvelle population qui évolue comme X et indépendamment des autres populations.
- Plus précisément, si $(Z^i(t), t \geq 0)$ désigne la i-ème plus vieille famille (celle débutée au temps T_i), alors

$$Z^i(t) = X_i(t - T_i)\mathbf{1}_{\{t \geq T_i\}}$$

où $X_1, X_2, \ldots$ sont des copies de X indépendantes de $(T_i, i \geq 1)$.
- On notera $(Z^{(i)}(t), t \geq 0)$ la i-ème plus vieille famille parmi celles qui survivent et $T^{(i)}$ sa date de naissance.
- Soit $I(t)$ la population totale au temps t

$$I(t) = \sum_{i \geq 1} Z^i(t).$$

Immigration

- Soient $T_1 < T_2 < \cdots$ les points d'un processus de Poisson d'intensité $\theta > 0$. A chaque temps T_i, un individu immigre sur l'île et fonde une nouvelle population qui évolue comme X et indépendamment des autres populations.
- Plus précisément, si $(Z^i(t), t \geq 0)$ désigne la i-ème plus vieille famille (celle débutée au temps T_i), alors

$$Z^i(t) = X_i(t - T_i)\mathbf{1}_{\{t \geq T_i\}}$$

  où $X_1, X_2, \ldots$ sont des copies de X indépendantes de $(T_i, i \geq 1)$.
- On notera $(Z^{(i)}(t), t \geq 0)$ la i-ème plus vieille famille parmi celles qui survivent et $T^{(i)}$ sa date de naissance.
- Soit $I(t)$ la population totale au temps t

$$I(t) = \sum_{i \geq 1} Z^i(t).$$

Immigration

- Soient $T_1 < T_2 < \cdots$ les points d'un processus de Poisson d'intensité $\theta > 0$. A chaque temps T_i, un individu immigre sur l'île et fonde une nouvelle population qui évolue comme X et indépendamment des autres populations.
- Plus précisément, si $(Z^i(t), t \geq 0)$ désigne la i-ème plus vieille famille (celle débutée au temps T_i), alors

$$Z^i(t) = X_i(t - T_i)\mathbf{1}_{\{t \geq T_i\}}$$

  où $X_1, X_2, \ldots$ sont des copies de X indépendantes de $(T_i, i \geq 1)$.
- On notera $(Z^{(i)}(t), t \geq 0)$ la i-ème plus vieille famille parmi celles qui survivent et $T^{(i)}$ sa date de naissance.
- Soit $I(t)$ la population totale au temps t

$$I(t) = \sum_{i \geq 1} Z^i(t).$$

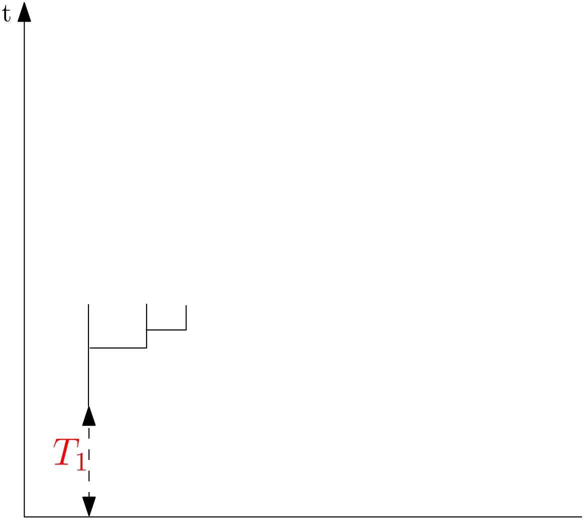


FIGURE: Splitting trees avec immigration. Le temps est en ordonnées et l'axe horizontal représente la filiation. Au temps t_1, trois populations sont vivantes.

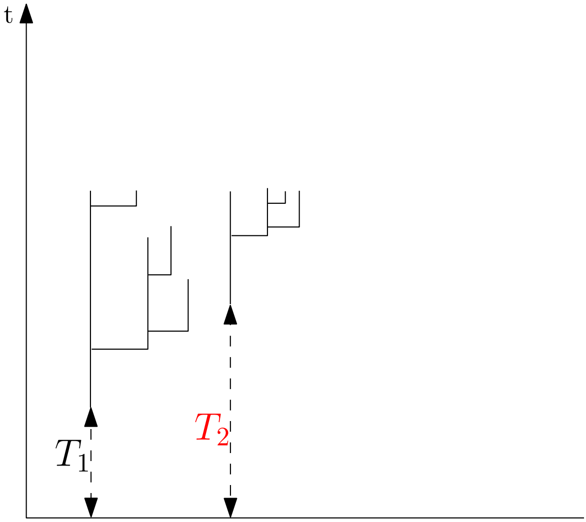


FIGURE: Splitting trees avec immigration. Le temps est en ordonnées et l'axe horizontal représente la filiation. Au temps t_1, trois populations sont vivantes.

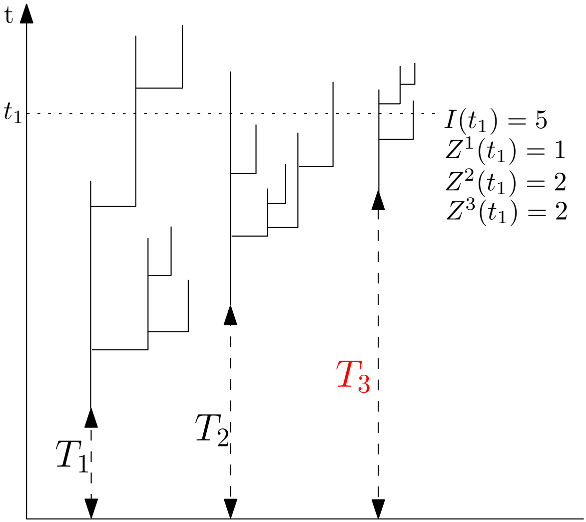


FIGURE: Splitting trees avec immigration. Le temps est en ordonnées et l'axe horizontal représente la filiation. Au temps t_1, trois populations sont vivantes.

Types

On fait différentes hypothèses sur les types des immigrants.

Modèle 1 : Quand un immigrant arrive, il est d'un type différent de ceux des individus précedemment arrivés.

Modèle 2 : Un nouvel immigrant est de type i avec probabilité p_i. Dans ce modèle, pour $i \geq 1$, on notera $I_i(t)$ le nombre d'individus de type i au temps t.

Types

On fait différentes hypothèses sur les types des immigrants.

Modèle 1 : Quand un immigrant arrive, il est d'un type différent de ceux des individus précedemment arrivés.

Modèle 2 : Un nouvel immigrant est de type i avec probabilité p_i. Dans ce modèle, pour $i \geq 1$, on notera $I_i(t)$ le nombre d'individus de type i au temps t.

Types

On fait différentes hypothèses sur les types des immigrants.

Modèle 1 : Quand un immigrant arrive, il est d'un type différent de ceux des individus précedemment arrivés.

Modèle 2 : Un nouvel immigrant est de type i avec probabilité p_i. Dans ce modèle, pour $i \geq 1$, on notera $I_i(t)$ le nombre d'individus de type i au temps t.

Types

On fait différentes hypothèses sur les types des immigrants.

Modèle 1 : Quand un immigrant arrive, il est d'un type différent de ceux des individus précedemment arrivés.

Modèle 2 : Un nouvel immigrant est de type i avec probabilité p_i. Dans ce modèle, pour $i \geq 1$, on notera $I_i(t)$ le nombre d'individus de type i au temps t.

Abondances asymptotiques pour le Modèle 1

Théorème (I)

On a avec probabilité 1

$$\lim_{t\to\infty} I(t)^{-1}(Z^{(1)}(t), Z^{(2)}(t), \cdots) = (P_1, P_2, \cdots)$$

où $(P_1, P_2, \dots)$ *est de loi GEM de paramètre* θ/b*, c'est à dire*

$$P_i \stackrel{(d)}{=} B_i \prod_{j=1}^{i-1}(1 - B_j)$$

avec $(B_i)_{i\geq 1}$ *une suite de v.a. i.i.d. de loi Beta*$(1,\theta/b)$*.*

On remarque que la limite ne dépend que du ratio immigration-naissance θ/b mais pas de la loi de durée de vie $\Lambda(\cdot)$.

Abondances asymptotiques pour le Modèle 1

Théorème (I)

On a avec probabilité 1

$$\lim_{t\to\infty} I(t)^{-1}(Z^{(1)}(t), Z^{(2)}(t), \cdots) = (P_1, P_2, \cdots)$$

où $(P_1, P_2, \ldots)$ *est de loi* GEM *de paramètre* θ/b*, c'est à dire*

$$P_i \overset{(d)}{=} B_i \prod_{j=1}^{i-1}(1 - B_j)$$

avec $(B_i)_{i\geq 1}$ *une suite de v.a. i.i.d. de loi* $Beta(1,\theta/b)$*.*

On remarque que la limite ne dépend que du ratio immigration-naissance θ/b mais pas de la loi de durée de vie $\Lambda(\cdot)$.

Bibliographie

- Le modèle considéré est une généralisation à des temps de vie quelconques du modèle île-continent de *S. Karlin et J. McGregor (1967)*
- *S. Tavaré (1987)* a démontré le Théorème I dans le cas d'un processus de naissance pure avec immigration : $\Lambda(dr) = b\delta_{\infty}(dr)$.

Bibliographie

- Le modèle considéré est une généralisation à des temps de vie quelconques du modèle île-continent de *S. Karlin et J. McGregor (1967)*
- *S. Tavaré (1987)* a démontré le Théorème I dans le cas d'un processus de naissance pure avec immigration : $\Lambda(dr) = b\delta_\infty(dr)$.

Notations

Pour $\lambda \geq 0$, on définit

$$\psi(\lambda) := \lambda - \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-\lambda r}) \Lambda(dr).$$

La fonction ψ est convexe, dérivable sur $(0, \infty)$, $\psi(0^+) = 0$ et $\psi'(0^+) = 1 - \int_0^\infty r\Lambda(dr) < 0$.
Il existe donc un unique $\eta > 0$ tel que $\psi(\eta) = 0$. C'est le paramètre Malthusien associé à X, c'est à dire que $X(t)$ se comporte comme $e^{\eta t}$ lorsque t tend vers l'infini.

Notations

Pour $\lambda \geq 0$, on définit

$$\psi(\lambda) := \lambda - \int_{(0,\infty)} (1 - e^{-\lambda r})\Lambda(dr).$$

La fonction ψ est convexe, dérivable sur $(0, \infty)$, $\psi(0^+) = 0$ et $\psi'(0^+) = 1 - \int_0^\infty r\Lambda(dr) < 0$.
Il existe donc un unique $\eta > 0$ tel que $\psi(\eta) = 0$. C'est le paramètre Malthusien associé à X, c'est à dire que $X(t)$ se comporte comme $e^{\eta t}$ lorsque t tend vers l'infini.

Propriétés de X

Proposition (Lambert 2010)

Soit Ext *l'évènement d'extinction* $\left\{\lim_{t\to\infty} X(t) = 0\right\}$. *Alors*

$$\mathbb{P}(\mathrm{Ext}) = 1 - \eta/b \tag{1}$$

et conditionnellement à Ext^c,

$$e^{-\eta t} X(t) \xrightarrow[t\to\infty]{\mathcal{L}} E \tag{2}$$

où E *est une v.a. exponentielle de paramètre* $\psi'(\eta)$.

En fait, la convergence dans (2) a lieu presque sûrement (Nerman (1981)).

Propriétés de X

Proposition (Lambert 2010)

Soit Ext *l'évènement d'extinction* $\left\{\lim_{t\to\infty} X(t) = 0\right\}$. *Alors*

$$\mathbb{P}(\mathrm{Ext}) = 1 - \eta/b \tag{1}$$

et conditionnellement à Ext^c,

$$e^{-\eta t}X(t) \xrightarrow[t\to\infty]{\mathcal{L}} E \tag{2}$$

où E *est une v.a. exponentielle de paramètre* $\psi'(\eta)$.

En fait, la convergence dans (2) a lieu presque sûrement (Nerman (1981)).

Propriétés de X

Proposition (Lambert 2010)

Soit Ext *l'évènement d'extinction* $\left\{\lim_{t\to\infty} X(t) = 0\right\}$. *Alors*

$$\mathbb{P}(\mathrm{Ext}) = 1 - \eta/b \tag{1}$$

et conditionnellement à Ext^c,

$$e^{-\eta t} X(t) \xrightarrow[t\to\infty]{\mathcal{L}} E \tag{2}$$

où E *est une v.a. exponentielle de paramètre* $\psi'(\eta)$.

En fait, la convergence dans (2) a lieu presque sûrement (Nerman (1981)).

On en déduit le comportement asymptotique des familles survivantes :

Proposition

On a

- $(T^{(i)}, i \geq 1)$ *sont les temps d'arrivée d'un processus de Poisson d'intensité* $\theta\eta/b$.
- $$e^{-\eta t}(Z^{(1)}(t), Z^{(2)}(t), \dots) \xrightarrow[t\to\infty]{p.s.} (e^{-\eta T^{(1)}}E_1, e^{-\eta T^{(2)}}E_2, \dots)$$

  où les E_i *sont des copies indépendantes de* E *et indépendantes des* $T^{(i)}$.

Esquisse de preuve :

$$\begin{aligned} e^{-\eta t}Z^{(i)}(t) &= e^{-\eta T^{(i)}}e^{-\eta(t-T^{(i)})}X_{(i)}(t-T^{(i)})\mathbf{1}_{\{T^{(i)}\leq t\}} \\ &\xrightarrow[t\to\infty]{} e^{-\eta T^{(i)}}E_{(i)} \end{aligned}$$

On en déduit le comportement asymptotique des familles survivantes :

Proposition

On a

- $(T^{(i)}, i \geq 1)$ *sont les temps d'arrivée d'un processus de Poisson d'intensité* $\theta\eta/b$.
- $$e^{-\eta t}(Z^{(1)}(t), Z^{(2)}(t), \dots) \xrightarrow[t\to\infty]{p.s.} (e^{-\eta T^{(1)}}E_1, e^{-\eta T^{(2)}}E_2, \dots)$$

  où les E_i *sont des copies indépendantes de* E *et indépendantes des* $T^{(i)}$.

Esquisse de preuve :

$$\begin{aligned} e^{-\eta t}Z^{(i)}(t) &= e^{-\eta T^{(i)}}e^{-\eta(t-T^{(i)})}X_{(i)}(t-T^{(i)})\mathbf{1}_{\{T^{(i)}\leq t\}} \\ &\xrightarrow[t\to\infty]{} e^{-\eta T^{(i)}}E_{(i)} \end{aligned}$$

On en déduit le comportement asymptotique des familles survivantes :

Proposition

On a

- $(T^{(i)}, i \geq 1)$ *sont les temps d'arrivée d'un processus de Poisson d'intensité* $\theta\eta/b$.
-
$$e^{-\eta t}(Z^{(1)}(t), Z^{(2)}(t), \ldots) \xrightarrow[t\to\infty]{p.s.} (e^{-\eta T^{(1)}} E_1, e^{-\eta T^{(2)}} E_2, \ldots)$$
où les E_i *sont des copies indépendantes de* E *et indépendantes des* $T^{(i)}$.

Esquisse de preuve :

$$\begin{aligned} e^{-\eta t} Z^{(i)}(t) &= e^{-\eta T^{(i)}} e^{-\eta\left(t - T^{(i)}\right)} X_{(i)}(t - T^{(i)}) \mathbf{1}_{\{T^{(i)} \leq t\}} \\ &\xrightarrow[t\to\infty]{} e^{-\eta T^{(i)}} E_{(i)} \end{aligned}$$

Convergence de la population totale

On rappelle que $\psi(\lambda) = \lambda - \int_{(0,\infty)}(1 - e^{-\lambda r})\Lambda(dr)$ et on définit la fonction d'échelle qui y est associée comme l'unique fonction continue et strictement croissante $W : [0,\infty) \to [0,\infty)$ telle que

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} W(x)dx = \frac{1}{\psi(\lambda)}, \quad \lambda > \eta.$$

Proposition (Lambert 2010)

Si $\tilde{\mathbb{P}}_x$ désigne la loi de $(X(t), t \geq 0)$ conditionné à avoir un unique ancêtre dont la durée de vie est x,

$$\tilde{\mathbb{P}}_x(X(t) = 0) = W(t - x)/W(t)$$

et conditionné à être non nul, $X(t)$ suit une loi géométrique de succès de probabilité $1/W(t)$.

Convergence de la population totale

On rappelle que $\psi(\lambda) = \lambda - \int_{(0,\infty)}(1 - e^{-\lambda r})\Lambda(dr)$ et on définit la fonction d'échelle qui y est associée comme l'unique fonction continue et strictement croissante $W : [0, \infty) \to [0, \infty)$ telle que

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} W(x)dx = \frac{1}{\psi(\lambda)}, \quad \lambda > \eta.$$

Proposition (Lambert 2010)

Si $\tilde{\mathbb{P}}_x$ désigne la loi de $(X(t), t \geq 0)$ conditionné à avoir un unique ancêtre dont la durée de vie est x,

$$\tilde{\mathbb{P}}_x(X(t) = 0) = W(t - x)/W(t)$$

et conditionné à être non nul, $X(t)$ suit une loi géométrique de succès de probabilité $1/W(t)$.

Convergence de la population totale

On rappelle que $\psi(\lambda) = \lambda - \int_{(0,\infty)}(1 - e^{-\lambda r})\Lambda(dr)$ et on définit la fonction d'échelle qui y est associée comme l'unique fonction continue et strictement croissante $W : [0,\infty) \to [0,\infty)$ telle que

$$\int_0^\infty e^{-\lambda x} W(x) dx = \frac{1}{\psi(\lambda)}, \quad \lambda > \eta.$$

Proposition (Lambert 2010)

Si $\tilde{\mathbb{P}}_x$ désigne la loi de $(X(t), t \geq 0)$ conditionné à avoir un unique ancêtre dont la durée de vie est x,

$$\tilde{\mathbb{P}}_x(X(t) = 0) = W(t-x)/W(t)$$

et conditionné à être non nul, $X(t)$ suit une loi géométrique de succès de probabilité $1/W(t)$.

Théorème

(i) *Pour t positif, $I(t)$ est une v.a. binomiale négative de paramètres $1 - W(t)^{-1}$ et θ/b. i.e. pour $s \in [0,1]$, sa fonction génératrice est*

$$G_t(s) := \mathbb{E}\left[s^{I(t)}\right] = \left(\frac{W(t)^{-1}}{1 - s(1 - W(t)^{-1})}\right)^{\theta/b}.$$

(ii)

$$I := \lim_{t\to\infty} e^{-\eta t} I(t) = \sum_{i\geq 1} e^{-\eta T^{(i)}} E_i \ p.s.$$

et I suit une distribution Gamma $\Gamma(\theta/b, \psi'(\eta))$

Théorème

(i) *Pour t positif, $I(t)$ est une v.a. binomiale négative de paramètres $1 - W(t)^{-1}$ et θ/b. i.e. pour $s \in [0,1]$, sa fonction génératrice est*

$$G_t(s) := \mathbb{E}\left[s^{I(t)}\right] = \left(\frac{W(t)^{-1}}{1 - s(1 - W(t)^{-1})}\right)^{\theta/b}.$$

(ii)

$$I := \lim_{t\to\infty} e^{-\eta t} I(t) = \sum_{i\geq 1} e^{-\eta T^{(i)}} E_i \ p.s.$$

et I suit une distribution Gamma $\Gamma(\theta/b, \psi'(\eta))$

Esquisse de la preuve du (ii)

Convergence en loi : (i) et $e^{-\eta t} W(t) \to 1/\psi'(\eta)$

$$\mathbb{E}\left[e^{-aI}\right] = \lim_{t\to\infty} \left(e^{-ae^{-\eta t}} + \left(1 - e^{-ae^{-\eta t}}\right) W(t)\right)^{-\frac{\theta}{b}} = \left(\frac{\psi'(\eta)}{a + \psi'(\eta)}\right)^{\frac{\theta}{b}}$$

Pour démontrer la convergence presque sûre, on décompose $I(t)$ en populations survivantes et non-survivantes :

$$e^{-\eta t} I(t) = \sum_{i\geq 1} e^{-\eta t} Z^{(i)}(t) + \sum_{i\geq 1} e^{-\eta t} X_i(t - T_i) \mathbf{1}_{\{t\geq T_i\}\cap \mathrm{Ext}_i}$$

où Ext_i est l'événement d'extinction du processus X_i.

Le second terme est majoré par $C_t := \sum_{i\geq 1} \mathbf{1}_{\{t\geq T_i\}} Y_i \mathbf{1}_{\mathrm{Ext}_i}$ où Y_i est la progéniture totale de $(X_i(t), t \geq 0)$. C'est aussi la progéniture totale d'un Galton-Watson conditionné à s'éteindre donc sous-critique : C_t processus de Poisson composé donc croît linéairement et donc le second terme tend vers 0 p.s.

Esquisse de la preuve du (ii)

Convergence en loi : (i) et $e^{-\eta t} W(t) \to 1/\psi'(\eta)$

$$\mathbb{E}\left[e^{-aI}\right] = \lim_{t\to\infty}\left(e^{-ae^{-\eta t}} + \left(1 - e^{-ae^{-\eta t}}\right) W(t)\right)^{-\frac{\theta}{b}} = \left(\frac{\psi'(\eta)}{a+\psi'(\eta)}\right)^{\frac{\theta}{b}}$$

Pour démontrer la convergence presque sûre, on décompose $I(t)$ en populations survivantes et non-survivantes :

$$e^{-\eta t} I(t) = \sum_{i\geq 1} e^{-\eta t} Z^{(i)}(t) + \sum_{i\geq 1} e^{-\eta t} X_i(t - T_i)\mathbf{1}_{\{t\geq T_i\}\cap \mathrm{Ext}_i}$$

où Ext_i est l'événement d'extinction du processus X_i.

Le second terme est majoré par $C_t := \sum_{i\geq 1} \mathbf{1}_{\{t\geq T_i\}} Y_i \mathbf{1}_{\mathrm{Ext}_i}$ où Y_i est la progéniture totale de $(X_i(t), t \geq 0)$. C'est aussi la progéniture totale d'un Galton-Watson conditionné à s'éteindre donc sous-critique : C_t processus de Poisson composé donc croît linéairement et donc le second terme tend vers 0 p.s.

Esquisse de la preuve du (ii)

Convergence en loi : (i) et $e^{-\eta t} W(t) \to 1/\psi'(\eta)$

$$\mathbb{E}\left[e^{-aI}\right] = \lim_{t\to\infty} \left(e^{-ae^{-\eta t}} + \left(1 - e^{-ae^{-\eta t}}\right) W(t)\right)^{-\frac{\theta}{b}} = \left(\frac{\psi'(\eta)}{a + \psi'(\eta)}\right)^{\frac{\theta}{b}}$$

Pour démontrer la convergence presque sûre, on décompose $I(t)$ en populations survivantes et non-survivantes :

$$e^{-\eta t} I(t) = \sum_{i\geq 1} e^{-\eta t} Z^{(i)}(t) + \sum_{i\geq 1} e^{-\eta t} X_i(t - T_i) \mathbf{1}_{\{t\geq T_i\}\cap \mathrm{Ext}_i}$$

où Ext_i est l'événement d'extinction du processus X_i.

Le second terme est majoré par $C_t := \sum_{i\geq 1} \mathbf{1}_{\{t\geq T_i\}} Y_i \mathbf{1}_{\mathrm{Ext}_i}$ où Y_i est la progéniture totale de $(X_i(t), t \geq 0)$. C'est aussi la progéniture totale d'un Galton-Watson conditionné à s'éteindre donc sous-critique : C_t processus de Poisson composé donc croît linéairement et donc le second terme tend vers 0 p.s.

Esquisse de la preuve du (ii)

Convergence en loi : (i) et $e^{-\eta t} W(t) \to 1/\psi'(\eta)$

$$\mathbb{E}\left[e^{-aI}\right] = \lim_{t\to\infty} \left(e^{-ae^{-\eta t}} + \left(1 - e^{-ae^{-\eta t}}\right) W(t)\right)^{-\frac{\theta}{b}} = \left(\frac{\psi'(\eta)}{a+\psi'(\eta)}\right)^{\frac{\theta}{b}}$$

Pour démontrer la convergence presque sûre, on décompose $I(t)$ en populations survivantes et non-survivantes :

$$e^{-\eta t} I(t) = \sum_{i\geq 1} e^{-\eta t} Z^{(i)}(t) + \sum_{i\geq 1} e^{-\eta t} X_i(t - T_i)\mathbf{1}_{\{t\geq T_i\}\cap \mathrm{Ext}_i}$$

où Ext_i est l'événement d'extinction du processus X_i.

Le second terme est majoré par $C_t := \sum_{i\geq 1} \mathbf{1}_{\{t\geq T_i\}} Y_i \mathbf{1}_{\mathrm{Ext}_i}$ où Y_i est la progéniture totale de $(X_i(t), t \geq 0)$. C'est aussi la progéniture totale d'un Galton-Watson conditionné à s'éteindre donc sous-critique : C_t processus de Poisson composé donc croît linéairement et donc le second terme tend vers 0 p.s.

Pour le second terme, on utilise un théorème de convergence dominée.

$$\sum_{i\geq 1} \sup_{t\geq 0} \left(e^{-\eta t} Z^{(i)}(t)\right) = \sum_{i\geq 1} e^{-\eta T^{(i)}} \sup_{t\geq 0} \left(e^{-\eta t} X_{(i)}(t)\right)$$

Lemme

Soient $(\zeta_i, i \geq 1)$ des v.a. telles que $\mathbb{E}[\log^+ \zeta_1] < \infty$ et $(\tau_i, i \geq 1)$ un processus de Poisson indépendant. Alors, pour $r > 0$, $\sum_{i\geq 1} e^{-r\tau_i}\zeta_i$ converge p.s.

Proposition

Si $(X(t), t \geq 0)$ est un processus de CMJ binaire homogène, on a

$$\mathbb{E}\left[\left(\log^+ \sup_{t\geq 0} \left(e^{-\eta t} X(t)\right)\right)^2 \middle| \mathrm{Ext}^c\right] < \infty$$

Pour le second terme, on utilise un théorème de convergence dominée.

$$\sum_{i\geq 1} \sup_{t\geq 0} \left(e^{-\eta t} Z^{(i)}(t)\right) = \sum_{i\geq 1} e^{-\eta T^{(i)}} \sup_{t\geq 0} \left(e^{-\eta t} X_{(i)}(t)\right)$$

Lemme

Soient $(\zeta_i, i \geq 1)$ des v.a. telles que $\mathbb{E}[\log^+ \zeta_1] < \infty$ et $(\tau_i, i \geq 1)$ un processus de Poisson indépendant. Alors, pour $r > 0$, $\sum_{i\geq 1} e^{-r\tau_i}\zeta_i$ converge p.s.

Proposition

Si $(X(t), t \geq 0)$ est un processus de CMJ binaire homogène, on a

$$\mathbb{E}\left[\left(\log^+ \sup_{t\geq 0} \left(e^{-\eta t} X(t)\right)\right)^2 \middle| \mathrm{Ext}^c\right] < \infty$$

Pour le second terme, on utilise un théorème de convergence dominée.

$$\sum_{i\geq 1} \sup_{t\geq 0} \left(e^{-\eta t} Z^{(i)}(t)\right) = \sum_{i\geq 1} e^{-\eta T^{(i)}} \sup_{t\geq 0} \left(e^{-\eta t} X_{(i)}(t)\right)$$

Lemme

Soient $(\zeta_i, i \geq 1)$ *des v.a. telles que* $\mathbb{E}[\log^+ \zeta_1] < \infty$ *et* $(\tau_i, i \geq 1)$ *un processus de Poisson indépendant. Alors, pour* $r > 0$, $\sum_{i\geq 1} e^{-r\tau_i}\zeta_i$ *converge p.s.*

Proposition

Si $(X(t), t \geq 0)$ *est un processus de CMJ binaire homogène, on a*

$$\mathbb{E}\left[\left(\log^+ \sup_{t\geq 0} \left(e^{-\eta t} X(t)\right)\right)^2 \middle| \mathrm{Ext}^c\right] < \infty$$

La preuve est basée sur une décomposition en épine dorsale du splitting tree conditionné à ne pas s'éteindre.

$$X(t) = X_t^\infty + X_t^d + X_t^g$$

où

- X_t^∞ est le nombre d'individus vivant au temps t ayant une descendance infinie. En particulier, $(X_t^\infty, t \geq 0)$ est un processus de Yule de taux η.
- X_t^d est le nombre d'individus vivant au temps t provenant d'arbres greffés sur la droite de l'arbre de Yule et conditionnés à s'éteindre.
- X_t^d est le nombre d'individus vivant au temps t provenant d'arbres greffés sur la gauche de l'arbre de Yule et conditionnés à s'éteindre.

La preuve est basée sur une décomposition en épine dorsale du splitting tree conditionné à ne pas s'éteindre.

$$X(t) = X_t^\infty + X_t^d + X_t^g$$

où

- X_t^∞ est le nombre d'individus vivant au temps t ayant une descendance infinie. En particulier, $(X_t^\infty, t \geq 0)$ est un processus de Yule de taux η.
- X_t^d est le nombre d'individus vivant au temps t provenant d'arbres greffés sur la droite de l'arbre de Yule et conditionnés à s'éteindre.
- X_t^d est le nombre d'individus vivant au temps t provenant d'arbres greffés sur la gauche de l'arbre de Yule et conditionnés à s'éteindre.

La preuve est basée sur une décomposition en épine dorsale du splitting tree conditionné à ne pas s'éteindre.

$$X(t) = X_t^{\infty} + X_t^{d} + X_t^{g}$$

où

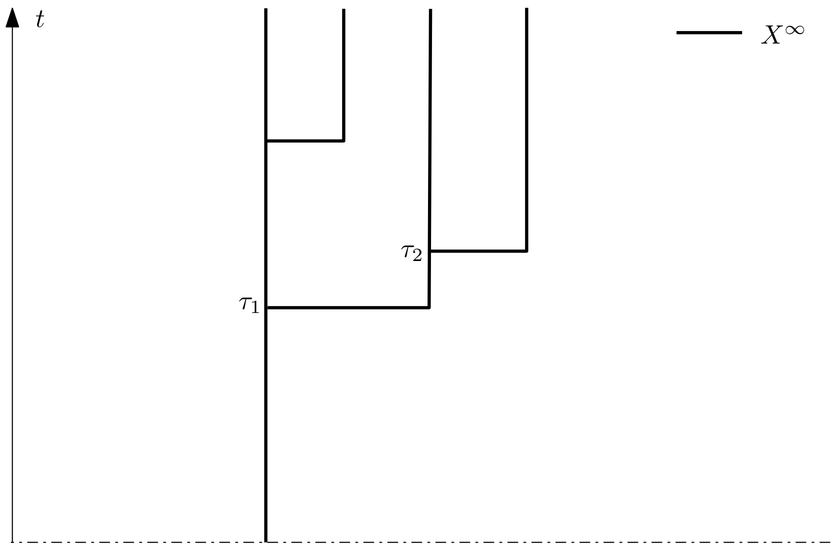
- X_t^{∞} est le nombre d'individus vivant au temps t ayant une descendance infinie. En particulier, $(X_t^{\infty}, t \geq 0)$ est un processus de Yule de taux η.
- X_t^{d} est le nombre d'individus vivant au temps t provenant d'arbres greffés sur la droite de l'arbre de Yule et conditionnés à s'éteindre.
- X_t^{d} est le nombre d'individus vivant au temps t provenant d'arbres greffés sur la gauche de l'arbre de Yule et conditionnés à s'éteindre.

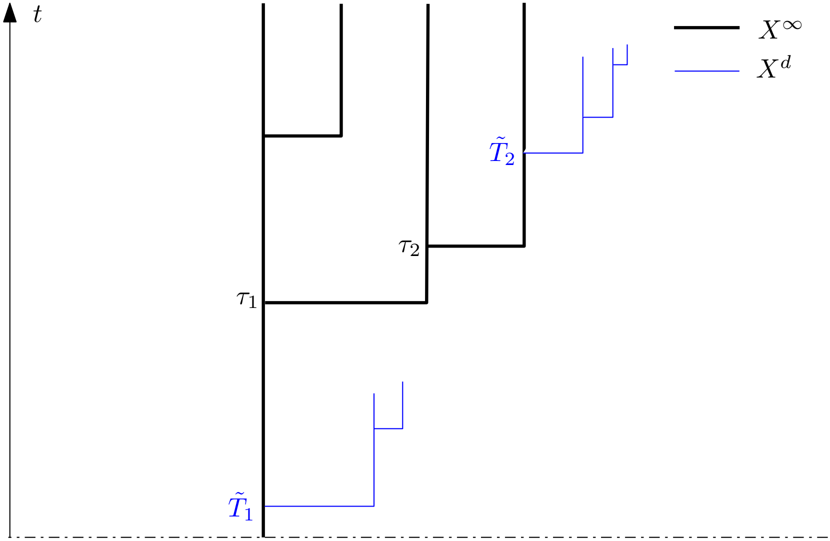
La preuve est basée sur une décomposition en épine dorsale du splitting tree conditionné à ne pas s'éteindre.

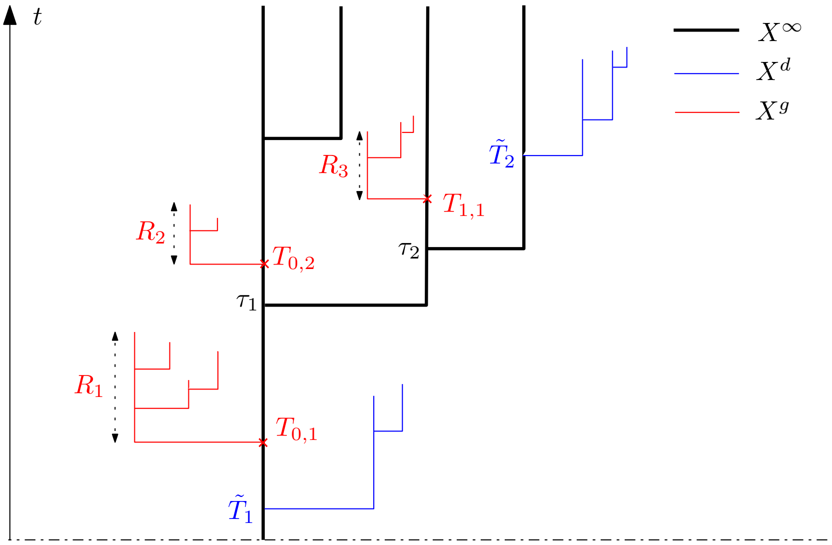
$$X(t) = X_t^\infty + X_t^d + X_t^g$$

où

- X_t^∞ est le nombre d'individus vivant au temps t ayant une descendance infinie. En particulier, $(X_t^\infty, t \geq 0)$ est un processus de Yule de taux η.
- X_t^d est le nombre d'individus vivant au temps t provenant d'arbres greffés sur la droite de l'arbre de Yule et conditionnés à s'éteindre.
- X_t^d est le nombre d'individus vivant au temps t provenant d'arbres greffés sur la gauche de l'arbre de Yule et conditionnés à s'éteindre.


t
X^∞
τ_2
τ_1


t
X^∞
X^d
$\tilde{T}_2$
τ_2
τ_1
$\tilde{T}_1$


t
X^∞
X^d
X^g
R_3
$\tilde{T}_2$
$T_{1,1}$
R_2
$T_{0,2}$
τ_2
τ_1
R_1
$T_{0,1}$
$\tilde{T}_1$

Calcul de la loi du vecteur limite

- Avec les deux premières parties de la preuve, on a

$$\frac{(Z^{(1)}(t),\dots)}{I(t)} = \frac{\mathrm{e}^{-\eta t}(Z^{(1)}(t),\dots)}{\mathrm{e}^{-\eta t} I(t)} \xrightarrow[t\to\infty]{} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma},\frac{\sigma_2}{\sigma},\dots\right) \quad \text{p.s.}$$

où $\sigma_i := \exp\left(-\eta T^{(i)}\right) E_i$ et $\sigma := \sum_{i\geq 1}\sigma_i$.

- De plus, les $(\sigma_i)_{i\geq 1}$ sont les points d'un processus de Poisson non-homogène sur $(0,\infty)$ d'intensité $\frac{\theta}{b}\frac{e^{-\psi'(\eta)y}}{y}dy$ car $(T^{(i)})_{i\geq 1}$ est un PPP$(\theta\eta/b)$ et les $(E_i)_{i\geq 1}$ sont des exponentielles i.i.d. de paramètre $\psi'(\eta)$.

- $\left(\frac{\sigma_1}{\sigma},\frac{\sigma_2}{\sigma},\dots\right)$ suit donc une loi GEM(θ/b).

Calcul de la loi du vecteur limite

- Avec les deux premières parties de la preuve, on a

$$\frac{(Z^{(1)}(t),\dots)}{I(t)} = \frac{\mathrm{e}^{-\eta t}(Z^{(1)}(t),\dots)}{\mathrm{e}^{-\eta t} I(t)} \xrightarrow[t\to\infty]{} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma}, \frac{\sigma_2}{\sigma}, \dots\right) \quad \text{p.s.}$$

  où $\sigma_i := \exp\left(-\eta T^{(i)}\right) E_i$ et $\sigma := \sum_{i\geq 1} \sigma_i$.

- De plus, les $(\sigma_i)_{i\geq 1}$ sont les points d'un processus de Poisson non-homogène sur $(0,\infty)$ d'intensité $\frac{\theta}{b}\frac{e^{-\psi'(\eta)y}}{y}dy$ car $(T^{(i)})_{i\geq 1}$ est un PPP$(\theta\eta/b)$ et les $(E_i)_{i\geq 1}$ sont des exponentielles i.i.d. de paramètre $\psi'(\eta)$.

- $\left(\frac{\sigma_1}{\sigma}, \frac{\sigma_2}{\sigma}, \dots\right)$ suit donc une loi GEM(θ/b).

Calcul de la loi du vecteur limite

- Avec les deux premières parties de la preuve, on a

$$\frac{(Z^{(1)}(t),\dots)}{I(t)} = \frac{\mathrm{e}^{-\eta t}(Z^{(1)}(t),\dots)}{\mathrm{e}^{-\eta t}I(t)} \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} \left(\frac{\sigma_1}{\sigma},\frac{\sigma_2}{\sigma},\dots\right) \quad \text{p.s.}$$

  où $\sigma_i := \exp\left(-\eta T^{(i)}\right) E_i$ et $\sigma := \sum_{i\geq 1}\sigma_i$.

- De plus, les $(\sigma_i)_{i\geq 1}$ sont les points d'un processus de Poisson non-homogène sur $(0,\infty)$ d'intensité $\frac{\theta}{b}\frac{e^{-\psi'(\eta)y}}{y}dy$ car $(T^{(i)})_{i\geq 1}$ est un PPP$(\theta\eta/b)$ et les $(E_i)_{i\geq 1}$ sont des exponentielles i.i.d. de paramètre $\psi'(\eta)$.

- $\left(\frac{\sigma_1}{\sigma},\frac{\sigma_2}{\sigma},\dots\right)$ suit donc une loi GEM(θ/b).

1. Le modèle
   - Splitting trees
   - Immigration
   - Résultats
2. Preuve du Théorème I
   - Convergence de $(X(t), t \geq 0)$
   - Convergence de la population totale
   - Calcul de la loi du vecteur limite
3. Modèle 2
   - Résultat
   - Preuve

Abondances asymptotiques pour le Modèle 2

Dans ce modèle, les immigrants sont de type i avec probabilité p_i.

Théorème (II)

Pour $i \geq 1$, soit $\alpha_i := \frac{\theta p_i}{b}$.
Alors

$$\lim_{t\to\infty} I(t)^{-1}(I_1(t), I_2(t), \dots) = (P'_1, P'_2, \dots) \quad p.s.$$

où pour $i \geq 1$

$$P'_i \stackrel{(d)}{=} B'_i \prod_{j=1}^{i-1}(1 - B'_j)$$

et $(B'_i)_{i\geq 1}$ est une suite de v.a. indépendantes de loi $Beta\left(\alpha_i, \frac{\theta}{b}\sum_{j\geq i+1} p_j\right)$.
En particulier, pour $i \geq 1$, P'_i suit une loi Beta $B(\alpha_i, \theta/b - \alpha_i)$.

Abondances asymptotiques pour le Modèle 2

Dans ce modèle, les immigrants sont de type i avec probabilité p_i.

Théorème (II)

Pour $i \geq 1$, soit $\alpha_i := \frac{\theta p_i}{b}$.
Alors

$$\lim_{t\to\infty} I(t)^{-1}(I_1(t), I_2(t), \dots) = (P'_1, P'_2, \dots) \quad p.s.$$

où pour $i \geq 1$

$$P'_i \overset{(d)}{=} B'_i \prod_{j=1}^{i-1}(1 - B'_j)$$

et $(B'_i)_{i\geq 1}$ est une suite de v.a. indépendantes de loi $Beta\left(\alpha_i, \frac{\theta}{b}\sum_{j\geq i+1} p_j\right)$.
En particulier, pour $i \geq 1$, P'_i suit une loi Beta $B(\alpha_i, \theta/b - \alpha_i)$.

- Si $N^i(t)$ est le nombre d'immigrants de type i arrivés avant le temps t, $(N^i(t), t \geq 0)$ est un processus de Poisson de paramètre θp_i et les processus $(N^i, i \geq 1)$ sont indépendants.
- On en déduit que $I_1(t), I_2(t), \ldots$ sont indépendants et leurs comportements asymptotiques sont les mêmes que ceux de $I(t)$ dans le Théorème I mais en remplaçant θ par θp_i.

Proposition

On rappelle que $\alpha_i = \theta p_i / b$. Alors

$$e^{-\eta t} I_i(t) \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} I_i \ p.s. \qquad i \geq 1$$

où les variables I_i sont indépendantes et I_i suit une loi Gamma $\Gamma(\alpha_i, \psi'(\eta))$.

- Si $N^i(t)$ est le nombre d'immigrants de type i arrivés avant le temps t, $(N^i(t), t \geq 0)$ est un processus de Poisson de paramètre θp_i et les processus $(N^i, i \geq 1)$ sont indépendants.
- On en déduit que $I_1(t), I_2(t), \dots$ sont indépendants et leurs comportements asymptotiques sont les mêmes que ceux de $I(t)$ dans le Théorème I mais en remplaçant θ par θp_i.

Proposition

On rappelle que $\alpha_i = \theta p_i / b$. Alors

$$e^{-\eta t} I_i(t) \underset{t \to \infty}{\longrightarrow} I_i \ p.s. \qquad i \geq 1$$

où les variables I_i sont indépendantes et I_i suit une loi Gamma $\Gamma(\alpha_i, \psi'(\eta))$.

- Si $N^i(t)$ est le nombre d'immigrants de type i arrivés avant le temps t, $(N^i(t), t \geq 0)$ est un processus de Poisson de paramètre θp_i et les processus $(N^i, i \geq 1)$ sont indépendants.
- On en déduit que $I_1(t), I_2(t), \ldots$ sont indépendants et leurs comportements asymptotiques sont les mêmes que ceux de $I(t)$ dans le Théorème I mais en remplaçant θ par θp_i.

Proposition

On rappelle que $\alpha_i = \theta p_i / b$. Alors

$$e^{-\eta t} I_i(t) \underset{t\to\infty}{\longrightarrow} I_i \ \ p.s. \qquad i \geq 1$$

où les variables I_i sont indépendantes et I_i suit une loi Gamma $\Gamma(\alpha_i, \psi'(\eta))$.

On en déduit que pour $r \geq 1$,

$$\lim_{t\to\infty} I(t)^{-1}(I_1(t), \ldots, I_r(t)) = \left(\frac{I_1}{I}, \ldots, \frac{I_r}{I}\right) \quad \text{p.s.}$$

puis on calcule la loi de la limite en utilisant $I = \sum_{i\geq 1} I_i$, $I_i \sim \Gamma(\alpha_i, \psi'(\eta))$ et $I \sim \Gamma(\theta/b, \psi'(\eta))$.

Merci de votre attention.