Métastabilité et temps de transition pour une équation aux dérivées partielles stochastique en dimension 1

Florent Barret, Thèse sous la direction de Sylvie Méléard et Anton Bovier

CMAP
École Polytechnique
Palaiseau

09 Juin 2011, ANR MANEGE, Agay

EDPS sur $[0,1] \times \mathbb{R}+$

$$\begin{cases} \partial_t u(x,t) & = \gamma \partial^2_{xx} u(x,t) - V'(u(x,t)) + \sqrt{2\varepsilon} W \\ u(x,0) & = u_0(x) \end{cases}$$

où

- u_0, fonction continue sur $[0,1]$
- γ un paramètre strictement positif
- W un bruit blanc espace-temps
- $\varepsilon > 0$ un paramètre.

Présence de conditions au bord (Dirichlet, von Neumann, périodique).
$V(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ Allen-Cahn (Faris, Jona-Lasinio 1982)

$$\partial_t u(x,t) = \gamma \partial^2_{xx} u(x,t) - u^3(x,t) + u(x,t) + \sqrt{2\varepsilon} W$$

Flot de gradient en dimension infinie : pour $\phi \in H^1([0,1])$

$$S(\phi) = \int_0^1 \frac{\gamma}{2} \left|\phi'\right|^2 (x) + V(\phi(x))\mathrm{d}x$$

Développement de Taylor à l'ordre 2 pour ϕ régulière :

$$S(\phi + k) = S(\phi) + \int_0^1 \frac{\delta S}{\delta \phi}(x)k(x) + \frac{1}{2}\frac{\delta^2 S}{\delta \phi^2}(k)(x)k(x)\mathrm{d}x + o(\|k\|^2)$$

$$\frac{\delta S}{\delta \phi}(x) = -\gamma\phi''(x) + V'(\phi(x))$$

$$\frac{\delta^2 S}{\delta \phi^2}(k) = -\gamma k'' + V''(\phi)k =: L_\phi k$$

L_ϕ : Opérateur de Strum-Liouville sur $[0,1]$. On peut réecrire l'EDPS

$$\partial_t u = -\frac{\delta S}{\delta u} + \sqrt{2\varepsilon}W$$

On se place dans la situation la plus simple : S a trois points stationnaires, solutions de

$$\frac{\delta S}{\delta \phi} = -\gamma \phi''(x) + V'(\phi(x)) = 0$$

avec les conditions au bord.

1. ϕ^+, ϕ^- deux minima
2. $\widehat{\sigma}$ l'unique point selle entre ϕ^+ et ϕ^-.

Exemple : $V(x) = \frac{x^4}{4} - \frac{x^2}{2}$ et $\gamma > \gamma_0 = \frac{1}{\pi^2}$ (Allen-Cahn)

- deux minima $\phi^+ = +\mathbb{1}$, $\phi^- = -\mathbb{1}$ (conditions au bord de von Neumann)
- $\widehat{s} = 0$ le point selle

Résultat Principal

Pour $S(\phi^-) \geqslant S(\phi^+)$, on pose $B^+ = B_\rho^{L^2}(\phi^+)$ pour $\rho > 0$ autour de ϕ^+

$$\mathbb{E}_{\phi^-}\left[\tau_\varepsilon\left(B^+\right)\right] = \frac{2\pi}{|\lambda^-(\widehat{\sigma})|}\sqrt{\left|\frac{\mathrm{Det}\, L_{\hat{\sigma}}}{\mathrm{Det}\, L_{\phi^-}}\right|}\, e^{\widehat{S}(\phi^-,\phi^+)/\varepsilon}\left(1+\Psi(\varepsilon)\right)$$

où $\widehat{S}(\phi^-,\phi^+) = S(\widehat{\sigma}) - S(\phi^-)$. On définit

$$\frac{\mathrm{Det}\, L_{\hat{\sigma}}}{\mathrm{Det}\, L_{\phi^-}} = \prod_{k\geqslant 0}\frac{\lambda_k(\widehat{\sigma})}{\lambda_k(\phi^-)}.$$

converge car $\lambda_k = c\gamma k^2 + O(1)$ pour $k \geqslant 0$.

Exemple Allen-Cahn avec conditions von Neumann pour $\gamma > \gamma_0 = \frac{1}{\pi^2}$: on a donc $\phi^+ = \mathbb{1}$, $\phi^- = -\mathbb{1}$ et $\widehat{s} = 0$. On a

$$S(\phi) = \int_0^1 \frac{\gamma}{2}\phi'^2(x) + \frac{1}{4}\phi(x)^4 - \frac{1}{2}\phi(x)^2 \mathrm{d}x$$

$$L_\phi h = -\gamma h'' + (3\phi^2 - 1)h$$

On obtient

$$S(\phi^\pm) = -\frac{1}{4} \qquad S(\widehat{\sigma}) = 0$$

$$L_{\phi^\pm} h = -\gamma h'' + 2h \qquad L_{\widehat{\sigma}} h = -\gamma h'' - h$$

$$\lambda_k(\phi^\pm) = \gamma\pi^2 k^2 + 2 \qquad \lambda_k(\widehat{\sigma}) = \gamma\pi^2 k^2 - 1$$

Déterminants Fonctionnels

Pour les conditions au bord de von Neumann,

$$\frac{\mathrm{Det}\, L_{\hat\sigma}}{\mathrm{Det}\, L_{\phi^-}} = \frac{\hat s'(1)}{{f^-}'(1)}$$

où $\hat s$ et f^- sont solutions des problèmes de Cauchy

$$\begin{array}{ccc} L_{\hat\sigma}\hat s = 0 & \hat s(0) = 1 & \hat s'(0) = 0 \\ L_{\phi^-} f^- = 0 & f^-(0) = 1 & {f^-}'(0) = 0. \end{array}$$

Exemple Allen-Cahn

$$f^-(x) = \mathrm{ch}\Big(\sqrt{\frac{2}{\gamma}}x\Big) \quad \widehat{s}(x) = \cos\Big(\frac{x}{\sqrt{\gamma}}\Big) \quad \frac{\mathrm{Det}\, L_{\hat\sigma}}{\mathrm{Det}\, L_{\phi^-}} = -\frac{1}{\sqrt{2}}\frac{\sin(\frac{1}{\sqrt{\gamma}})}{\mathrm{sh}(\sqrt{\frac{2}{\gamma}})}$$

Diffusion sur $\mathbb{R}^N$ (Bovier, Eckhoff, Gayrard, Klein, 2004-2005)

$$\mathrm{d}X_t = -\nabla F(X_t)\mathrm{d}t + \sqrt{2\varepsilon}\mathrm{d}W_t$$

où

- F potentiel $\mathbb{R}^N \to \mathbb{R}$
- W mouvement brownien
- ε paramètre positif.

On obtient par la méthode de Laplace la formule dite d'Eyring-Kramers (pour un potentiel F non dégénéré)

$$\mathbb{E}_{m_-}(\tau_\varepsilon(B_+)) = \frac{2\pi}{|\lambda^-(\widehat{s})|}\sqrt{\frac{|\det \mathcal{H}F(\widehat{s})|}{\det \mathcal{H}F(m^-)}}e^{\frac{\widehat{F}(m^-,m^+)}{\varepsilon}}(1+\Psi(\varepsilon))$$

où $\Psi(\varepsilon) = o(\sqrt{\varepsilon}\,|\ln\varepsilon|)$. $\mathcal{H}F$ matrice hessienne de F et $\lambda^-(\widehat{s})$ l'unique valeur propre négative de $\mathcal{H}F(\widehat{s})$.
Lien très fort avec les premièrs valeurs propres du générateur.
Autres méthodes : analyse semi-classique Laplacien de Witten (Helffer, Nier...).

On prouve successivement :

1. ε fixé, convergence de l'espérance du temps d'atteinte pour le système discrétisé vers le temps pour l'EDPS.

$$\lim_{N\to\infty} \mathbb{E}_{\phi_N^-}\left[\tau_\varepsilon^N\left(B^+\right)\right] = \mathbb{E}_{\phi^-}\left[\tau_\varepsilon\left(B^+\right)\right].$$

2. N fixé, calcul de l'asymptote $a_N(\varepsilon)$ du temps de transition

$$\left|\frac{1}{a_N(\varepsilon)}\mathbb{E}_{\phi_N^-}\left[\tau_\varepsilon^N\left(B^+\right)\right] - 1\right| = \psi(\varepsilon, N) < \Psi(\varepsilon) = o(\sqrt{\varepsilon}\,|\ln(\varepsilon)|)$$

avec $\Psi(\varepsilon)$ ne dépendant pas de N.

3. la limite $N \to \infty$ pour $a_N(\varepsilon)$ donne le candidat pour le temps de transition de l'EDPS

$$a(\varepsilon) = \lim_{N\to\infty} a_N(\varepsilon).$$

On construit une diffusion dans $\mathbb{R}^N$ telle que $X_t^i \approx u(\frac{i}{N}, t)$.

$$S_N(u) = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N} \frac{\gamma}{2} N^2 (u_{i+1} - u_i)^2 + V(u_i)$$
$$\mathrm{d}X_t = -N \nabla S_N(X_t) \mathrm{d}t + \sqrt{2\varepsilon N} \mathrm{d}W_t$$

W_t étant définie à partir du bruit blanc

$$W_t^i = \sqrt{N} W(\mathbb{1}_{[\frac{i}{N}, \frac{i+1}{N}[})_t$$

Puis on construit l'interpolation linéaire u^N

$$X_t^i = u^N(\frac{i}{N}, t)$$
$$\mathrm{d}X_t^i = \frac{N^2\gamma}{2} \left[X_t^{i+1} - 2X_t^i + X_t^{i-1}\right] \mathrm{d}t - V'(X_t^i)\mathrm{d}t + \sqrt{2\varepsilon N} \mathrm{d}W_t^i$$

Convergence

Theorem

Pour $u_0 \in C^3([0,1])$, $T > 0$, $p \geqslant 1$

$$\mathbb{E}\left[\left\|u^N - u\right\|_{\infty,T}^p\right]^{\frac{1}{p}} \xrightarrow[N\to\infty]{} 0.$$

et pour $\eta \in]0, \frac{1}{2}[$*, il existe* ξ *variable aléatoire finie presque surement*

$$\left\|u^N - u\right\|_{\infty,T} \leqslant \frac{\xi}{N^\eta}.$$

La preuve repose sur une formulation mild de la fonction linéaire par morceaux u^N, puis on procède par localisation (à cause de la linéarité non-bornée). cf. Funaki, Gyongy, Millet...

Convergence des temps de transition

On note, $q \in [1, +\infty]$

$$\tau(\rho, q) = \inf \left\{ t > 0, \|u(t) - u_f\|_q < \rho \right\}$$
$$\tau^N(\rho, q) = \inf \left\{ t > 0, \left\| u^N(t) - u_f^N \right\|_q < \rho \right\}$$

Theorem

Pour presque tout $\rho > 0$,

$$\tau^N(\rho, q) \xrightarrow[N \to \infty]{} \tau(\rho, q) \quad p.s.$$

et

$$\mathbb{E}[\tau^N(\rho, q)] \xrightarrow[N \to \infty]{} \mathbb{E}[\tau(\rho, q)].$$

L'erreur à contrôler se décompose en deux parties

1. Le calcul lui-même (méthode de Laplace en dimension infinie)

$$\left|\frac{1}{a_N(\varepsilon)}\mathbb{E}_{\nu_{-}^{N}}\left[\tau_\varepsilon^N\left(B^+\right)\right]-1\right| = \psi_1(\varepsilon, N) < \Psi_1(\varepsilon) = o(\sqrt{\varepsilon}\,|\ln(\varepsilon)|)$$

où ν_N^- probabilité d'équilibre sur ∂B_N^-.

2. Puis on prouve le résultat suivant

$$\frac{1}{a_N(\varepsilon)}\left|\mathbb{E}_{\nu_N^-}\left[\tau_\varepsilon^N\left(B^+\right)\right]-\mathbb{E}_{\phi_N^-}\left[\tau_\varepsilon^N\left(B^+\right)\right]\right| < \Psi_2(\varepsilon) = o(\sqrt{\varepsilon}\,|\ln(\varepsilon)|).$$

Il s'agit d'un résultat d'oubli de la condition initiale (Martinelli, Scoppola, Olivieri...).