Contrôle stochastique sur un processus de naissance et mort

Julien Claisse

Equipe-projet TOSCA, INRIA Sophia Antipolis

7 juin 2011

Motivations

- Mettre en place une théorie du contrôle stochastique pour les processus de branchement
  - utiliser les travaux antérieures sur d'autres types de processus comme les diffusions [*Fleming, Krylov*],
  - développer et analyser des outils spécifiques pour les processus de branchement.
- Développer des applications en biologie et sciences médicales
  - dosage médicamenteux permettant d'éliminer un cancer ou un virus tout en minimisant les risques liés au effet secondaires,
  - gestion de parasites d'une exploitation agricole tout en minimisant la pollution,
  - gestion de population en voie d'extinction,
  - contrôle de cultures de cellules *in vitro*.

Exemple simple

- **Modèle.** Population asexuée dans laquelle chaque individu agit indépendemment des autres et a une durée de vie aléatoire de loi exponentielle. A l'issue de ce temps aléatoire, il peut donner naissance à deux individus ou simplement mourir.
- **Contrôle.** Choix de la probabilité p_t qu'un individu branchant au temps t donne naissance à deux descendants.
- **Objectif.** Maximiser les chances que la taille d'une population soit "proche" d'une valeur n_{opt} à l'instant final T.
- **Formulation.** Déterminer un contrôle $\mathbf{p}$ minimisant la quantité

$$\mathbb{E}\left[\left|n_T^{\mathbf{p}} - n_{opt}\right|\right].$$

Plan de l'exposé

1. Préliminaire
   1. Modèle
   2. Problème
2. Équation de Hamilton-Jacobi-Bellman
   1. Programmation dynamique
   2. Dérivation de l'équation
   3. Théorème de vérification
3. Exemple simple
   1. Contrôle intuitif et optimal
   2. Comparaison et interprétation

Cadre

Soit $T > 0$, soit $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ un espace de probabilités, on se donne une mesure ponctuelle de Poisson $N(\omega, \mathrm{d}t, \mathrm{d}z)$ sur $[0, T] \times \mathbb{R}^+$ d'intensité $\mathrm{d}t\,\mathrm{d}z$.
Soient $\gamma > 0$, $p \in [0,1]$, $i \in \mathbb{N}$, la solution de

$$n_s = i + \int_{[0,s]\times\mathbb{R}^+} \left(\mathbf{1}_{z \leq \gamma p n_{\theta-}} - \mathbf{1}_{\gamma p n_{\theta-} \leq z \leq \gamma n_{\theta-}}\right) N(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z)$$

est un processus de naissance et mort classique.

Contrôle admissible

La filtration canonique associée à N est définie par

$$\mathcal{F}_s := \sigma\left(N(A)\,;\; A \in \mathcal{B}([0,s]) \otimes \mathcal{B}\left(\mathbb{R}^+\right)\right) \quad \forall s \in [0,T].$$

Soient $0 \leq \underline{p} < \overline{p} \leq 1$.

Definition (Contrôle admissible)

On appelle contrôle admissible un processus $\mathbf{p} = (p_s;\ 0 \leq s \leq T)$ à valeurs dans $[\underline{p}, \overline{p}]$ qui est continue à gauche et adapté par rapport à la filtration $\mathcal{F}_\cdot$. On note $\mathcal{A}$ l'ensemble des contrôles admissibles.

Processus contrôlé

Pour tous $t \in [0, T]$, $i \in \mathbb{N}$, $\mathbf{p} \in \mathcal{A}$, on considère l'équation

$$n_s = i + \int_{(t,s]\times\mathbb{R}^+} \left(\mathbf{1}_{z \leq \gamma p_\theta n_{\theta-}} - \mathbf{1}_{\gamma p_\theta n_{\theta-} \leq z \leq \gamma n_{\theta-}}\right) N(\mathrm{d}\theta, \mathrm{d}z).$$

Elle admet une unique solution notée $(n_s^{t,i,\mathbf{p}};\ t \leq s \leq T)$. Le processus $n^{t,i,\mathbf{p}}$ est càdlàg et adapté à la filtration $\mathcal{F}_.$. De plus, pour tout $q \in \mathbb{N}$, il existe $C > 0$ tel que

$$\mathbb{E}\left[\sup_{t \leq s \leq T} \left(n_s^{t,i,\mathbf{p}}\right)^q\right] \leq C\left(1 + i^q\right) \quad \forall t, \forall i, \forall \mathbf{p}.$$

Décomposition en semimartingale

Soit (φ_i) une suite réelle, le processus $\varphi(n^{t,i,\mathbf{p}})$ admet pour représentation

$$\varphi_{n_s} = \varphi_i + \int_t^s L^{p_\theta} \varphi_{n_\theta} \, \mathrm{d}\theta + M^{\varphi}_{t,s}$$

où L^p est le générateur infinitésimal du processus de naissance et mort classique donné par

$$L^p \varphi_i := \gamma i \left((\varphi_{i+1} - \varphi_i) \, p + (\varphi_{i-1} - \varphi_i) \, (1 - p) \right).$$

et $M^{\varphi}_{t,\cdot} := (M^{\varphi}_{t,s}; \; t \leq s \leq T)$ est une martingale locale. En particulier, c'est une martingale si φ est à croissance polynômiale.

Formulation du problème

- (g_i) suite réelle à croissance polynômiale,
- (f_i) suite de fonctions continues sur $[0, T] \times [\underline{p}, \overline{p}]$ à croissance polynômiale en i uniformément par rapport aux autres variables.

Definition (Fonction coût)

$$J(t, i, \mathbf{p}) := \mathbb{E}\left[\int_t^T f\left(s, n_s^{t,i,\mathbf{p}}, p_s\right) \mathrm{d}s + g\left(n_T^{t,i,\mathbf{p}}\right)\right].$$

Definition (Fonction valeur)

$$v(t, i) := \inf_{\mathbf{p} \in \mathcal{A}} J(t, i, \mathbf{p}).$$

Résultat principal

Theorem

L'équation de Hamilton-Jacobi-Bellman

$$\begin{cases} u_i' + \inf_{p \in [\underline{p}, \overline{p}]} L^p u_i + f_i(p) = 0 & \forall t \in [0, T], \forall i \geq 1 \\ u_0(t) = \int_t^T \inf_{p \in [\underline{p}, \overline{p}]} f_0(s, p) \, \mathrm{d}s + g_0 & \forall t \in [0, T] \\ u_i(T) = g_i & \forall i \in \mathbb{N} \end{cases}$$

admet une unique solution u de classe $\mathcal{C}^1$ à croissance polynômiale admettant la représentation probabiliste suivante

$$u_i(t) = \inf_{\mathbf{p} \in \mathcal{A}} \mathbb{E} \left[\int_t^T f\left(s, n_s^{t,i,\mathbf{p}}, p_s\right) \mathrm{d}s + g\left(n_T^{t,i,\mathbf{p}}\right) \right].$$

Principe de la programmation dynamique

Le principe de la programmation dynamique est le résultat clé de cette approche d'un problème de contrôle stochastique.

Proposition

Pour tout $\tau \in [t, T]$, on a

$$v(t,i) = \inf_{\mathbf{p}\in\mathcal{A}} \mathbb{E}\left[\int_t^\tau f\left(s, n_s^{t,i,\mathbf{p}}, p_s\right) \mathrm{d}s + v\left(\tau, n_\tau^{t,i,\mathbf{p}}\right)\right].$$

$$\begin{aligned} J(t,i,\mathbf{p}) &= \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\int_t^T f\left(s, n_s^{t,i,\mathbf{p}}, p_s\right) + g\left(n_T^{t,i,\mathbf{p}}\right) \mathrm{d}s \middle| \mathcal{F}_\tau\right]\right] \\ &= \mathbb{E}\left[\int_t^\tau f\left(s, n_s^{t,i,\mathbf{p}}, p_s\right) \mathrm{d}s + J\left(\tau, n_\tau^{t,i,\mathbf{p}}, \mathbf{p}\right)\right] \end{aligned}$$

Proposition

La fonction valeur v est de classe $\mathcal{C}^1$ et sa dérivée vérifie

$$v_i' + \inf_{p \in [\underline{p}, \overline{p}]} L^p v_i + f_i(p) = 0 \quad \forall t \in [0, T], \forall i \geq 1.$$

D'autre part, il est facile de montrer que

$$\begin{aligned} v_0(t) &= \int_t^T \inf_{p \in [\underline{p}, \overline{p}]} f_0(s, p) \, \mathrm{d}s + g_0 \quad \forall t \in [0, T] \\ v_i(T) &= g_i \quad \forall i \in \mathbb{N}. \end{aligned}$$

Démonstration

Dérivabilité à droite. Soit $h > 0$, on a

$$\mathbb{E}\left[v\left(t+h, n^{\mathbf{p}}_{t+h}\right)\right] = v(t+h,i) + \int_t^{t+h} \mathbb{E}\left[L^{p_s} v\left(t+h, n^{\mathbf{p}}_s\right)\right] \mathrm{d}s.$$

On passe à l'infimum sur les contrôles $\mathbf{p} \in \mathcal{A}$. On utilise le PPD pour le terme de gauche et des calculs élémentaire pour le terme de droite pour obtenir

$$v(t,i) = v(t+h,i) + h \inf_{p \in [\underline{p}, \overline{p}]} L^p v\left(t,i\right) + o(h).$$

Dérivabilité à gauche. Même idée en utilisant

$$u(t-h,i) = \inf_{\mathbf{p} \in \mathcal{A}} \mathbb{E}\left[v\left(t, n_t^{t-h,i,\mathbf{p}}\right)\right].$$

Théorème de vérification

Theorem

On suppose que l'équation de HJB admet une solution u de classe $\mathcal{C}^1$ à croissance au plus polynômiale en i uniformément par rapport à t, alors $u = v$. De plus, on peut identifier un contrôle optimal markovien $\hat{\mathbf{p}}$. En particulier, si f ne dépend pas de p, il est donné par $\hat{p}_s = \hat{p}\left(s, n_{s^-}\right)$ tel que

$$\hat{p}(s,i) := \underline{p}\mathbf{1}_{v_{i+1}(s)>v_{i-1}(s)} + \overline{p}\mathbf{1}_{v_{i+1}(s)<v_{i-1}(s)}.$$

Démonstration

Par régularité de u, pour tout $\mathbf{p} \in \mathcal{A}$, on a

$$u\left(T, n_T^{\mathbf{p}}\right) = u(t,i) + \int_t^T \left(u'\left(s, n_s^{\mathbf{p}}\right) + L^{p_s} u\left(s, n_s^{\mathbf{p}}\right)\right) ds + M^u_{t,T}$$

avec $M^u_{t,T}$ une martingale (locale). Puisque u est solution de l'équation de HJB, on a

$$\mathbb{E}\left[g\left(n_T^{\mathbf{p}}\right)\right] \geq u(t,i).$$

On en déduit $v \geq u$. Réciproquement, on utilise le fait que l'infimum est atteint dans l'équation de HJB et on construit un contrôle markovien $\hat{\mathbf{p}}$ tel que $u'(s, n_s^{\hat{\mathbf{p}}}) + L^{\hat{p}_s} u(s, n_s^{\hat{\mathbf{p}}}) = 0$. On en déduit $\mathbb{E}[g(n_T^{\hat{\mathbf{p}}})] = u(t,i)$ et donc $v \leq u$.

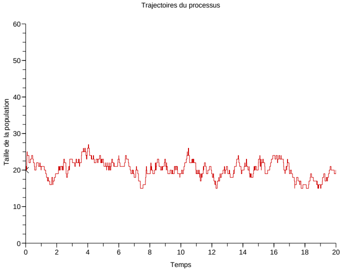
Résolution théorique

- **Objectif.** Maximiser les chances que la taille d'une population soit "proche" d'une valeur n_{opt} à l'instant final T.
- **Formulation.** Déterminer un contrôle $\hat{\mathbf{p}}$ minimisant la fonction
$$J\left(t, i, \mathbf{p}\right) = \mathbb{E}\left[\left|n_T^{t,i,\mathbf{p}} - n_{opt}\right|\right].$$
- **Théorie.** Contrôle optimal $\hat{p}_s = \hat{p}\left(s, n_{s^-}\right)$ tel que
$$\hat{p}(s,i) := \underline{p}\mathbf{1}_{v_{i+1}(s) > v_{i-1}(s)} + \overline{p}\mathbf{1}_{v_{i+1}(s) < v_{i-1}(s)}$$
et v solution de l'équation de HJB associée.
- **Simulation.** $\gamma = 1$, $\underline{p} = 0.4$, $\overline{p} = 0.6$, $T = 20$ et $n_{opt} = 20$.

Résolution intuitive

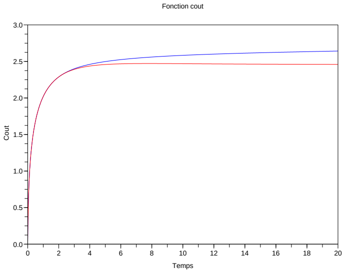
On note $\mathbf{p}^{\mathbf{int}}$ le contrôle intuitif candidat à l'optimalité défini par

$$\mathbf{p}^{\mathbf{int}}(s,\omega) := \begin{cases} \underline{p} & \text{si } n_{s^-}(\omega) > n_{opt} \\ \overline{p} & \text{si } n_{s^-}(\omega) \leq n_{opt} \end{cases} .$$



Comparaison

Sauf dans les cas $\overline{p} = 1$ ou $n_{opt} = 0$, la fonction coût associée à $\mathbf{p}^{\mathbf{int}}$ est strictement plus grande que la fonction valeur du problème pour T suffisamment grand.

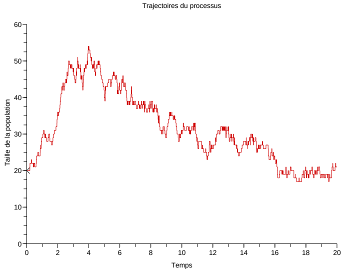


Contrôle optimal

Le contrôle optimal $\mathbf{p}^{\mathbf{opt}}$ admet une représentation de la forme

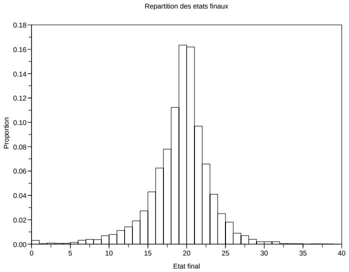
$$\mathbf{p}^{\mathbf{opt}}(s,\omega) := \begin{cases} \underline{p} & \text{si } n_{s^-}(\omega) > n_{opt} + k(T-s) \\ \overline{p} & \text{si } n_{s^-}(\omega) \leq n_{opt} + k(T-s) \end{cases}$$

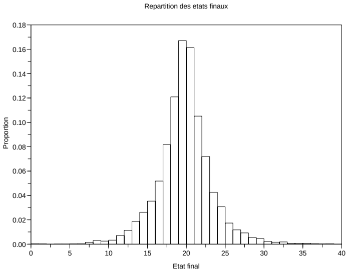
où k est une fonction croissante prenant successivement les valeurs $0, 1, 2, \ldots$



Interprétation

La population peut s'éteindre avec probabilité non nulle. Ainsi la fonction coût discrimine les contrôles pour lesquels la probabilité d'extinction avant T est trop grande.





Généralisation

- Généralisation facile
  - contrôle de la durée de vie γ ou du couple (γ, p),
  - processus de naissance et mort de la forme $b(\alpha, i) \leq \overline{\alpha} i$ et $d(\alpha, i)$ quelconque,
  - nombre de descendants par individu fini.
- Généralisation moins facile
  - problème de contrôle à horizon infini,
  - problème de contrôle à horizon aléatoire.
- Il reste du travail pour
  - étudier la dynamique de la fonction valeur et exprimer explicitement le contrôle optimal dans le cas simple,
  - généraliser à des processus de branchements plus complexes, notamment dans le cas *age-dependent*.

Perspectives d'application

- Équipe de J. Pouysségur, Institute of Developmental Biology and Cancer Research,
- pH-mediated cancer therapy.