Processus Markoviens déterministes par morceaux

Bertrand Cloez

Doctorant à l'université de Marne-la-Vallée sous la direction de Djalil Chafaï

Saint raphaël, 7 juin 2011

Définition

- Introduit par Mark Davis :
  Piecewise-deterministic Markov processes : a general class of nondiffusion stochastic models, JRSS B (1984)

Définition

- Introduit par Mark Davis :
  Piecewise-deterministic Markov processes : a general class of nondiffusion stochastic models, JRSS B (1984)
- Espace d'état : un ouvert $E \subset \mathbb{R}^d$
- Flot de trajectoire déterministe : Φ, $\Phi : E \times \mathbb{R}_+ \to E$
- Intensité $\lambda : E \to \mathbb{R}_+$
- Noyau Markovien $K : E \times E \to [0, 1]$

Définition

- Introduit par Mark Davis :
  Piecewise-deterministic Markov processes : a general class of nondiffusion stochastic models, JRSS B (1984)
- Espace d'état : un ouvert $E \subset \mathbb{R}^d$
- Flot de trajectoire déterministe : Φ, $\Phi : E \times \mathbb{R}_+ \to E$
- Intensité $\lambda : E \to \mathbb{R}_+$
- Noyau Markovien $K : E \times E \to [0, 1]$

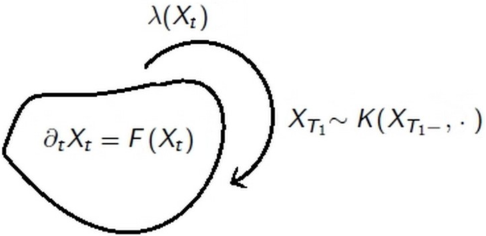
Partant de x, on suit le flot Φ jusqu'au temps T_1 tel que

$$\int_0^{T_1} \lambda(\Phi(x, s))\, ds = E_1 \sim \mathcal{E}(1)$$

puis on saute en y avec la loi $K((\Phi(x, T_1)), \cdot)$.
On recommence partant de y...

Générateur

Exemples : Poisson marqués, files d'attentes, chaines de Markov à temps continu...



Générateur :

$$Lf(x) = F(x).\nabla_x f(x) + \lambda(x)(Kf(x) - f(x))$$

Processus TCP Window Size

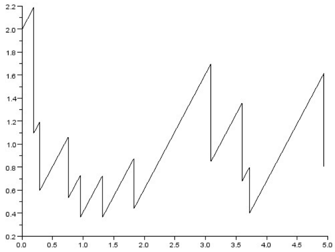


FIGURE: Une trajectoire du processus TCP

Introduit par Ott, Kemperman et Mathis en 96.
Générateur :

$$Lf(x) = f'(x) + \lambda(x)\left(f\left(\frac{x}{2}\right) - f(x)\right).$$

Processus TCP Window Size

- PDMP sur $E = \mathbb{R}_+$
- Croissance linéaire entre les sauts
- Taux de saut inhomogène. Exemple : $\lambda(x) = x$
- Sauts multiplicatifs (décroissance, rappel vers 0)
- Temps et espace continus, espace d'état non compact
- Irréductible et Fonction de Lyapunov $x \mapsto 1 + x$
- Additive Increase Multiplicative Decrease (AIMD)
- Relié à des fonctionnelles exponentielles de processus de Lévy

Structure AR quand $\lambda(x) = \lambda$

$$T_n = T_{n-1} + E_n \Rightarrow X_{T_n} = \frac{1}{2} X_{T_{n-1}} + E_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{n-k} E_k$$

Theorem (Ott, Kemperman, Mathis, 96)

La chaine incluse et le processus à temps continu possèdent une unique même loi invariante. Elle a pour densité :

$$x \mapsto \frac{\lambda}{\prod_{n=1}^{+\infty}(1 - 2^{-n})} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\prod_{k=1}^{n} \frac{2}{1 - 2^k} \right) e^{-2^n \lambda x}$$

Lois invariantes

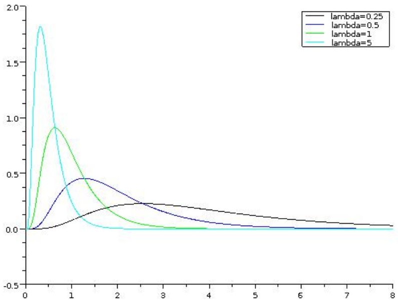


FIGURE: Densité des mesures invariantes

Population structuré par la taille : mitose cellulaire

Considérons le modèle suivant :

- On commence avec une cellule de taille x au temps $t = 0$.
- La taille de la cellule croit linéairement.
- La cellule se divise, avec un taux $\lambda(x)$, en deux cellules de même tailles.
- Chaque cellules évoluent ensuite indépendamment des autres.

Population structuré par la taille : mitose cellulaire

Considérons le modèle suivant :

- On commence avec une cellule de taille x au temps $t = 0$.
- La taille de la cellule croit linéairement.
- La cellule se divise, avec un taux $\lambda(x)$, en deux cellules de même tailles.
- Chaque cellules évoluent ensuite indépendamment des autres.

$\rightarrow$ Processus de Markov branchant.

Population structuré par la taille : mitose cellulaire

Considérons le modèle suivant :

- On commence avec une cellule de taille x au temps $t = 0$.
- La taille de la cellule croit linéairement.
- La cellule se divise, avec un taux $\lambda(x)$, en deux cellules de même tailles.
- Chaque cellules évoluent ensuite indépendamment des autres.

$\rightarrow$ Processus de Markov branchant.
$\rightarrow \lambda(x) = \lambda \Rightarrow$ processus indexé par un arbre de Galton-Watson (Bansaye, Delmas, Marsalle, Tran, 10).

Que vaut λ dans la vie ?

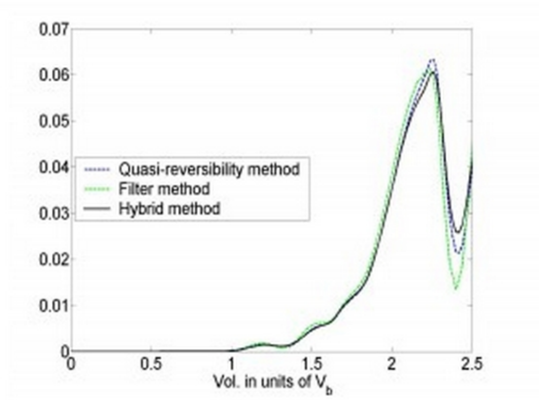


FIGURE: λ pour la cellule Escherichia coli (Doumic, Maia, Zubelli, 10)

Théorème limite

Theorem (Travaux en cours, C. 11)

Si λ vérifie l'une de ces hypothèse,

1. $0 < \underline{\lambda} \leq \lambda \leq \bar{\lambda}$, *et* $\lambda(x) = \bar{\lambda}$ *pour* x *grand.*
2. $\lambda(x) = ax + b$, *avec* $a > 0$ *ou* $b > 0$.

alors il existe une mesure μ telle que :

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{1}{N_t} \sum_{u \in V_t} g(X_t^u) = \int_0^{+\infty} g \, d\mu \quad \textit{en probabilité.}$$

pour toute fonction continue bornée g sur $\mathbb{R}_+^*$. De plus, dans le deuxième cas, N_t est de l'ordre de $\exp(2at/\sqrt{b^2 + 4a} - b)$.

Point clé de la preuve : Formule many-to-one

On montre d'abord que

$$\frac{1}{\mathbb{E}\left[\sum_{u\in V_t} V(X_t^u)\right]}\mathbb{E}\left[\sum_{u\in V_t} f(X_t^u)V(X_t^u)\right] = \mathbb{E}[f(Y_t)]$$

avec

- V est le vecteur propre de l'opérateur de Schrödinger suivant :

$$Af(x) = f'(x) + \lambda(x)\left(2f\left(\frac{x}{2}\right) - f(x)\right).$$

- Y est un processus de Markov généré par :

$$Gf(x) = f'(x) + \lambda(x)\frac{2V(x/2)}{V(x)}\left(f\left(\frac{x}{2}\right) - f(x)\right).$$

Phénomène de Biais

Quand λ est constant, on a $V = 1$ donc

$$f(Y_t) \simeq \frac{1}{N_t} \sum_{u \in V_t} f(X_t^u)$$

$\rightarrow$ Y représente la taille d'une cellule pris au hasard.

Phénomène de Biais

Quand λ est constant, on a $V = 1$ donc

$$f(Y_t) \simeq \frac{1}{N_t} \sum_{u \in V_t} f(X_t^u)$$

$\rightarrow$ Y représente la taille d'une cellule pris au hasard.
Générateur :

$$Gf(x) = f'(x) + 2\lambda \left(f\left(\frac{x}{2}\right) - f(x) \right).$$

Il croit linéairement et saute avec un taux 2λ.

Phénomène de Biais

Quand λ est constant, on a $V = 1$ donc

$$f(Y_t) \simeq \frac{1}{N_t} \sum_{u \in V_t} f(X_t^u)$$

$\rightarrow$ Y représente la taille d'une cellule pris au hasard.
Générateur :

$$Gf(x) = f'(x) + 2\lambda \left(f\left(\frac{x}{2}\right) - f(x) \right).$$

Il croit linéairement et saute avec un taux 2λ.

Phénomène de Biais

Quand λ est constant, on a $V = 1$ donc

$$f(Y_t) \simeq \frac{1}{N_t} \sum_{u \in V_t} f(X_t^u)$$

$\rightarrow$ Y représente la taille d'une cellule pris au hasard.
Générateur :

$$Gf(x) = f'(x) + 2\lambda \left(f\left(\frac{x}{2}\right) - f(x) \right).$$

Il croit linéairement et saute avec un taux 2λ.
$\rightarrow$ plus vite une cellule se divise, plus elle a de descendants.

Approximation en grande population

Renormalisation : $X^{(0)} = \frac{1}{n} Z^{(n)}$, avec $Z^{(n)} = \sum \delta_{x_i}$

Theorem (LGN, C. 11)

Si λ est borné et $X_0^{(n)}$ converge vers une mesure deterministe $X_0 = n(0,x)dx$, alors $X^{(n)}$ converge vers une mesure déterministe $X = n(.,x)dx$ solution de l'équation :

$$\partial_t n(t,x) + \partial_x n(t,x) + \lambda(x) n(t,x) = 4r(2x)n(t,2x).$$

Preuve : Via critère d'Aldous.

Théorème central limite

Processus de fluctuation : $\eta_t^{(n)} = \sqrt{n}\left(X_t^{(n)} - X_t\right)$

Theorem (TCL, C.11)

Si $\mathbb{E}\left[\sup_{n\geq 0} X^{(n)}(1+x)\right] < +\infty$, λ *est borné, et* $\eta_0^{(n)}$ *converge vers* η_0 *alors* $\eta^{(n)}$ *converge* η *solution du problème de martingale :* $\forall f \in C^2$,

$$\eta_t(f) = \eta_0(f) + \int_0^t \int f'(x) + \lambda(x)\left(2f\left(\frac{x}{2}\right) - f(x)\right)\eta_t(dx) + M_t(f)$$

avec

$$\langle M(f)\rangle_t = \int_t \int 2r(x)\left(f\left(\frac{x}{2}\right) - f(x)\right)^2 \eta_s\,(dx)\,ds.$$

Preuve : Critère d'Aldous + TCL pour les martingales.

Généralisation

Ces résultats se généralisent pour le modèle suivant :

- la taille des cellules évolue suivant un processus de Markov $(X_t)_{t\geq 0}$.
- chaque cellule se divise, à un taux inhomogène λ, en un nombre aléatoire K de cellules filles, avec $\mathbb{E}[K] > 1$.
- si la cellule mère est de taille x et se divise en k cellules, alors leur taille est donnée par $F_1^{(k)}(x, \Theta), \dots, F_k^{(k)}(x, \Theta)$, avec $\Theta \sim \mathcal{U}[0, 1]$.

Directions de recherche

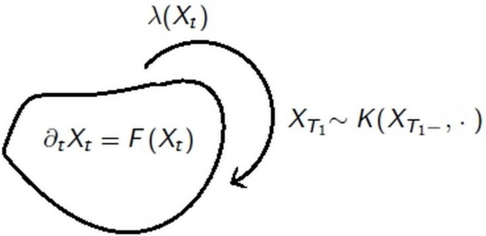
- **Vitesse de convergence :**
  - Lien entre la chaîne emboité et le processus à temps continu.
  - Critère du type Bakry-Emery (Wang, 10),(Chafaï,Joulin 11)
- **Régularité de la distribution stationnaire :** Critère d'Hörmander ?
- **Banchement :** Autre fonctionnelle type plus grande cellule (Aïdekon, Beresticky, Brunet, Shi, 11)
- **Statistique :** Estimation des paramètres : $\lambda, \ldots$ (Doumic, Hoffmann, Reynaud-Bouret, Rivoirard, 11)

Merci de votre attention !

Annexes

Compléments pour PDMP

Exemples : Poisson marqués, files d'attentes, chaines de Markov à temps continu...



Générateur :

$$Lf(x) = F(x).\nabla_x f(x) + \lambda(x)(Kf(x) - f(x))$$

Applications et résultats récents

Applications :

1. Activité neuronale (Pakdaman, Thieullen, Wainrib,09)
2. Fiabilité (Cocozza, Last)
3. Chemotaxis (Fontbona, Guérin, Malrieu, 10)
4. Réactions chimiques (Crudu , Debussche, Muller, Radulescu, 11)
5. TCP windows size (Ott, Guillemin, Robert,...)

Résultat généraux :

1. Ergodicité (Costa, Dufour)
2. Viabilité, Invariance, Accessibilité (Goreac, 10)
3. Grande déviation (Faggionato, Gabrielli, Ribezzi Crivellari, 09)

Loi invariante, $\lambda(x) = x$

Theorem (Dumas, Guillemin, Robert, 04)

$\hat{X}$ admet une unique loi invariante ν de densité

$$x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{1}{\prod_{n=1}^{\infty}(1-2^{-2n})} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n}}{\prod_{k=1}^{n-1} |1-2^{2k}|} x e^{-2^{2n} x^2/2}.$$

et X admets une unique loi invariante μ de densité

$$x \in \mathbb{R}_+ \mapsto \frac{\sqrt{2/\pi}}{\prod_{n=0}^{\infty}(1-2^{-(2n+1)})} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n} 2^{2n}}{\prod_{k=1}^{n} |1-2^{2k}|} e^{-2^{2n-1} x^2}.$$

elles sont unimodales et toutes leurs dérivées sont nulles en $x = 0$.

Lois invariantes

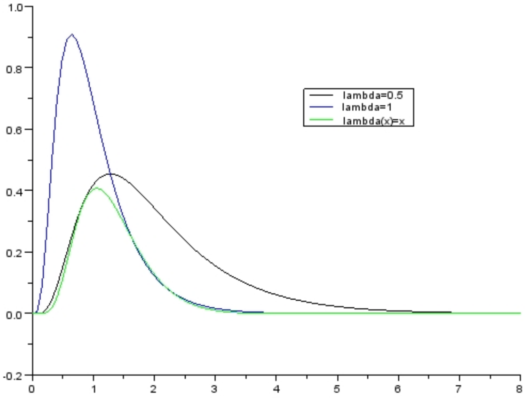


FIGURE: Densité des mesures invariantes

Compléments sur TCP

TCP windows size :

- Moments pour λ constant (Löpker, Van Leeuwaarden, 08)
- Vitesse de convergence (Chafaï, Malrieu, Paroux, 11)
- Particules suivant la même dynamique de type TCP mais en interaction type champs moyen (Graham, Robert)
- Approche par EDP (Baccelli, Mc Donald, Reynier, ...)

Populations structurés :

- existence des éléments propres et analyse des EDP (Perthame, Doumic, Michel, ...)
- Statistique (Doumic, Hoffmann, Reynaud-Bouret, Rivoirard, 11)