# Processus de Fleming-Viot généralisés avec immigration et flots de partitions stochastiques

Clément Foucart

Laboratoire de Probabilités et Modèles aléatoires
Université Pierre et Marie Curie

ANR MANEGE
19/10/2011

# Outline

Une partition *distinguée* échangeable $\pi$ est une v.a

- à valeurs dans $\mathcal{P}_\infty^0 := \{\text{partitions de } \mathbb{Z}_+\}$.
- de loi invariante sous l'action des permutations $\sigma$ de $\mathbb{Z}_+$ telle que $\sigma(0) = 0$ i.e
  La partition $\sigma\pi$ définie par $i \overset{\sigma\pi}{\sim} j \Longleftrightarrow \sigma(i) \overset{\pi}{\sim} \sigma(j)$ a même loi que $\pi$.

Extension de la correspondance de Kingman (F. prépubli 2011):

- $U_0 = 0$, $(U_i, i \geq 1)$ iid uniformes. Soit

$$\alpha_\pi : j \mapsto \text{ indice du bloc de } \pi \text{ contenant } j$$

$$i \overset{\pi}{\sim} j \Longleftrightarrow U_{\alpha_\pi(i)} = U_{\alpha_\pi(j)}$$

- La suite $(U_{\alpha_{\pi(j)}}, j \geq 1)$ est échangeable de mesure de de Finetti: $|\pi_0|\delta_0 + \sum_{j\geq 1} |\pi_j|\delta_{U_j} + \left(1 - \sum_{j\geq 0} |\pi_j|\right) \lambda(dr)$.
- Soit $s \in \mathcal{P}^0_{\mathbf{m}} := \left\{s, s_0 \geq 0, s_1 \geq s_2 \geq ... \geq 0; \sum_{i\geq 0} s_i \leq 1\right\}$, $V_0 = 0$ et $(V_i, i \geq 1)$ i.i.d de loi

$$s_0\delta_0 + \sum_{j\geq 1} s_j\delta_{U_j} + \left(1 - \sum_{j\geq 0} s_j\right) \lambda(dr).$$

La partition

$$\mathbb{BP} : i \sim j \Longleftrightarrow V_i = V_j$$

est une partition distinguée échangeable, appelée $s$-boite de peinture dist., on note sa loi $\rho_s$.

# Outline

$$coag(\pi, \pi')_i := \bigcup_{j \in \pi'_i} \pi_j$$

Interprétations:

- *Vers le passé:* la partition $\pi$ représente les familles aujourd'hui et $\pi'$ indique celles qui ont un ancêtre commun à une génération précédente
- *Vers le futur:* la partition $\pi' = (\pi'_0, \pi'_1, \ldots)$ représente les descendants aujourd'hui des individus $i \geq 0$ et $\pi_j$ la progéniture de l'individu $j$ vivant aujourd'hui.

Identité clé:

$$\alpha_{coag(\pi,\pi')} = \alpha_{\pi'} \circ \alpha_\pi$$

# Outline

## Definition

*Un flot de partitions distinguées échangeables est une famille de variables aléatoires* $(\Pi(s,t), -\infty < s \leq t < \infty)$ *à valeurs dans* $\mathcal{P}^0_\infty$ *t.q:*

(i) *Pour tout* $s \leq t$, *la partition distinguée* $\Pi(s,t)$ *est échangeable de loi ne dépendant que de* $t - s$.

(ii) *Pour tout* $s < t < u$, $\Pi(s,u) = coag(\Pi(s,t), \Pi(t,u))$ *p.s*

(iii) *Si* $t_1 < t_2 < ... < t_n$, *les partitions* $\Pi(t_1, t_2), ..., \Pi(t_{n-1}, t_n)$ *sont indépendantes.*

(v) $\Pi(0,0) = 0_{[\infty]}$ *et* $\Pi(s,t) \to 0_{[\infty]}$ *en probabilité lorsque* $t - s \to 0$.

# Outline

Une mesure de coagulation $\mu$ sur $\mathcal{P}_\infty^0$ est une mesure t.q

- $\mu$ est invariante sous l'action des permutations $\sigma$ t.q $\sigma(0) = 0$
- $\mu(\{\pi; \pi_{|\mathbf{[}n\mathbf{]}} \neq 0_{\mathbf{[}n\mathbf{]}}\}) < \infty$ pour tout $n \geq 0$

Soit $\mathcal{N}$ un PPP sur $\mathbb{R} \times \mathcal{P}_\infty^0$ d'intensité $dt \otimes \mu$. Soit $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathcal{N}_n = \text{ image de } \mathcal{N} \text{ par } \pi \to \pi_{|\mathbf{[}n\mathbf{]}}.$$

Pour tout $s < t$, $K := \mathcal{N}_n(]s,t] \times \mathcal{P}_n^0 \setminus \{0_{\mathbf{[}n\mathbf{]}}\}) < \infty$. Notons ses atomes

$$(t_1, \pi^{(1)}), (t_2, \pi^{(2)}), \ldots, (t_K, \pi^{(K)}).$$

On pose $\Pi^n(s,t) := coag^K\left(\pi^{(1)}, \ldots, \pi^{(K)}\right)$ avec $coag^k$ défini récursivement. $\Pi(s,t)$ est construit par **compatibilité**.

# Outline

Le processus $(\Pi(t), t \geq 0) := (\Pi(0,t), t \geq 0)$ est appelé coalescent distingué échangeable. Sa loi est caractérisée par la mesure de coag dist. $\mu$ qui se décompose de la façon suivante (F. AAP 2011):

**Theorem**

*Il existe deux réels positifs $c_0, c_1$ et une mesure $\nu$ sur $\mathcal{P}^0_{\mathbf{m}}$ tels que:*

$$\nu(0) = 0 \text{ et } \int_{\mathcal{P}^0_{\mathbf{m}}} (s_0 + \sum_{i=1}^{\infty} s_i^2)\nu(ds) < \infty$$

*et*

$$\mu(.) = c_0 \sum_{1 \leq i} \delta_{K(0,i)}(.) + c_1 \sum_{1 \leq i < j} \delta_{K(i,j)}(.) + \int_{\mathcal{P}^0_{\mathbf{m}}} \rho_s(.)\nu(ds)$$

*avec $K(i,j)$ partition avec seul bloc non trivial $\{i,j\}$.*

# Outline

- Soit $\hat{\mathcal{N}}$ l'image de $\mathcal{N}$ par $t \mapsto -t$ et $\hat{\mathcal{F}}_t := \sigma(\hat{\mathcal{N}}([0,t] \times \mathcal{P}^0_\infty)$
- Flot dual: $(\hat{\Pi}(s,t), s \leq t) := (\Pi(-t,-s), s \leq t)$. On note $\hat{\Pi}(t) := \hat{\Pi}(0,t)$. Propriété de cocycle:

$$\hat{\Pi}(t) = coag(\hat{\Pi}(s,t), \hat{\Pi}(s)).$$

  La partition $\hat{\Pi}(s,t)$ est indép. de $\hat{\mathcal{F}}_s$ et a même loi que $\hat{\Pi}(t-s)$.

Pour tout $0 \leq s \leq t$, $\hat{\Pi}_k(t) = \bigcup_{j \in \hat{\Pi}_k(s)} \hat{\Pi}_j(s,t)$ et l'ancêtre vivant au temps $s$ de $i$ au temps $t$ est $\alpha_{\hat{\Pi}(s,t)}(i)$.

- soit $k \in \mathbb{N}$, $\hat{\Pi}_k(t) =$ descendants au temps $t$ de l'individu $k$ vivant au temps 0
- le bloc distingué $\hat{\Pi}_0(t) =$ descendants de l'immigré générique 0.

# Outline

Pour tout $i \geq 0$, $|\hat{\Pi}_i(t)|$ est la fraction de la pop au temps $t$ qui descend de $i$.

- Sur chaque individu $i \geq 1$, on attache initialement des types $(U_i)$ à valeurs dans $[0,1]$ i.i.d de loi $\rho$. On fixe $U_0 = 0$.
- Les types présents au temps $t$ dans la population sont donnés par $(U_{\alpha_{\hat{\Pi}(t)}(i)}, i \geq 1)$.

## Definition

*Soit $Z_t$ la mesure de de Finetti de $(U_{\alpha_{\hat{\Pi}(t)}(i)}, i \geq 1)$. Le processus $(Z_t, t \geq 0)$ est appelé processus de Fleming-Viot généralisé avec immigration.*

$$Z_t = |\hat{\Pi}_0(t)|\delta_0 + \sum_{i \geq 1} |\hat{\Pi}_i(t)|\delta_{U_i} + (1 - \sum_{i \geq 0} |\hat{\Pi}_i(t)|)\rho.$$

Soit $f$ continue sur $[0,1]^p$. Soit

$$\Phi_f : (\rho, \pi) \in \mathcal{M}_1 \times \mathcal{P}_p^0 \mapsto \int \delta_0(dx_0)\rho(dx_1)...\rho(dx_p) f(x_{\alpha_\pi(1)}, ..., x_{\alpha_\pi(p)}).$$

Soit $(\Pi(t), t \geq 0)$ un coalescent dist. tq $\Pi_{|[p]}(0) = \pi$ et $(Z_t, t \geq 0)$ GFVI tq $Z_0 = \rho$:

**Lemma**

$$\mathbb{E}^\rho[\Phi_f(Z_t, \pi)] = \mathbb{E}^\pi[\Phi_f(\rho, \Pi_{|[p]}(t))].$$

Soit $(\mathcal{L}, \mathcal{D})$ le générateur de $(Z_t, t \geq 0)$ et son domaine.

$$G_f : \rho \mapsto \int_{[0,1]^p} f(x_1, ..., x_p)\rho(dx_1)...\rho(dx_p).$$

(i) $\mathcal{L}G_f = \mathcal{L}^{c_0}G_f + \mathcal{L}^{c_1}G_f + \mathcal{L}^{\nu}G_f$ avec

$$\mathcal{L}^{c_0}G_f(\rho) := c_0 \sum_{1\leq i\leq p} \int_{[0,1]^p} [f(x^{0,i}) - f(x)]\rho^{\otimes p}(dx)$$

$$\mathcal{L}^{c_1}G_f(\rho) := c_1 \sum_{1\leq i<j\leq p} \int_{[0,1]^p} [f(x^{i,j}) - f(x)]\rho^{\otimes p}(dx)$$

$$\mathcal{L}^{\nu}G_f(\rho) := \int_{\mathcal{P}^0_{\mathbf{m}}} \{\mathbb{E}[G_f(\bar{s}\rho + s_0\delta_0 + \sum_{i\geq 1} s_i\delta_{U_i})] - G_f(\rho)\}\nu(ds)$$

(ii) L'e.v engendré par les $G_f$ forme un "core" pour $(\mathcal{L}, \mathcal{D})$.

# Outline

- Bertoin (2006): Random fragmentation and coagulation processes, Cambridge University Press
- F. (2011): Distinguished exchangeable coalescents and generalized Fleming-Viot processes with immigration, Adv. App. Prob. Vol 43 N°2
- F. (submitted, 2011) Generalized Fleming-Viot processes via stochastic flow of partitions


Thank you for your attention!