Quelques problèmes de dynamique de population en environnement aléatoire

Vincent Bansaye

CMAP, Ecole Polytechnique.

26 novembre,
ENS, Rencontre ANR Manège.

Aperçu

- Evénements rares pour les processus de branchement en environnement aléatoire (depuis 2001 : V. Afanasyev, J. Berestycki, C. Boeinghoff, J. Geiger, G. Kersting, V. Vatutin . . .)
- Quelles limites d'échelles ? i.e. branchement en temps espace-continu et environnement aléatoire (T. Kurtz, Borovkov ; depuis 2009 : F.Simatos ; C. Boeinghoff, M. Hurtzenthaler ; C. Smadi, J. C. Pardo Millan . . .).
- Quel comportement en temps long pour les processus multitypes i.e *extinction*, vitesse d'extinction, *croissance* . . . (E. Dyakonova, P. Jagers, S. Sagitov, V. Vatutin, . . .)
- Et avec des interactions ? (ici, naissance et mort en environnement aléatoire, travail récent avec S. Méléard et M. Richard)

Aperçu

- Evénements rares pour les processus de branchement en environnement aléatoire (depuis 2001 : V. Afanasyev, J. Berestycki, C. Boeinghoff, J. Geiger, G. Kersting, V. Vatutin . . .)
- Quelles limites d'échelles ? i.e. branchement en temps espace-continu et environnement aléatoire (T. Kurtz, Borovkov ; depuis 2009 : F.Simatos ; C. Boeinghoff, M. Hurtzenthaler ; C. Smadi, J. C. Pardo Millan . . .).
- Quel comportement en temps long pour les processus multitypes i.e *extinction*, vitesse d'extinction, *croissance* . . . (E. Dyakonova, P. Jagers, S. Sagitov, V. Vatutin, . . .)
- Et avec des interactions ? (ici, naissance et mort en environnement aléatoire, travail récent avec S. Méléard et M. Richard)

Aperçu

- Evénements rares pour les processus de branchement en environnement aléatoire (depuis 2001 : V. Afanasyev, J. Berestycki, C. Boeinghoff, J. Geiger, G. Kersting, V. Vatutin . . .)
- Quelles limites d'échelles ? i.e. branchement en temps espace-continu et environnement aléatoire (T. Kurtz, Borovkov ; depuis 2009 : F.Simatos ; C. Boeinghoff, M. Hurtzenthaler ; C. Smadi, J. C. Pardo Millan . . .).
- Quel comportement en temps long pour les processus multitypes i.e *extinction*, vitesse d'extinction, *croissance* . . . (E. Dyakonova, P. Jagers, S. Sagitov, V. Vatutin, . . .)
- Et avec des interactions ? (ici, naissance et mort en environnement aléatoire, travail récent avec S. Méléard et M. Richard)

Aperçu

- Evénements rares pour les processus de branchement en environnement aléatoire (depuis 2001 : V. Afanasyev, J. Berestycki, C. Boeinghoff, J. Geiger, G. Kersting, V. Vatutin . . .)
- Quelles limites d'échelles ? i.e. branchement en temps espace-continu et environnement aléatoire (T. Kurtz, Borovkov ; depuis 2009 : F.Simatos ; C. Boeinghoff, M. Hurtzenthaler ; C. Smadi, J. C. Pardo Millan . . .).
- Quel comportement en temps long pour les processus multitypes i.e *extinction*, vitesse d'extinction, *croissance* . . . (E. Dyakonova, P. Jagers, S. Sagitov, V. Vatutin, . . .)
- Et avec des interactions ? (ici, naissance et mort en environnement aléatoire, travail récent avec S. Méléard et M. Richard)

Survie en régime sous-critique

Lorsque $\mathbb{E}(\log m(\mathcal{E})) \leq 0$, le processus s'éteint p.s. et quatre régimes sont possibles pour la vitesse d'extinction [Afanasyev, Geiger, Kersting, Vatutin 03] :

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c a_n \qquad (n \to \infty)$$

avec

- dans le sous-critique ($\mathbb{E}(\log m(\mathcal{E})) < 0$)

  $$a_n = \mathbb{E}\Big[m(\mathcal{E})\Big]^n, \quad a_n = n^{-1/2}\mathbb{E}\Big[m(\mathcal{E})\Big]^n \quad \text{ou} \quad a_n = n^{-3/2}\exp(-\Lambda(0))^n,$$

  suivant que $\mathbb{E}(m(\mathcal{E})\log m(\mathcal{E}))$ est négative, nulle ou positive.
- dans le cas critique ($\mathbb{E}(\log m(\mathcal{E})) = 0$)

  $$a_n = 1/\sqrt{n}.$$

Dans le régime surcritique ($\mathbb{E}(\log m(\mathcal{E})) > 0$), $Z_n \to L \in \{\infty, 0\}$ et de tels régimes existent pour $\mathbb{P}(Z_n = k)$ ($k \geq 1, n \to \infty$) dans le cas linéaire fractionnaire [B. Boeinghoff 12]

Survie en régime sous-critique

Lorsque $\mathbb{E}(\log m(\mathcal{E})) \leq 0$, le processus s'éteint p.s. et quatre régimes sont possibles pour la vitesse d'extinction [Afanasyev, Geiger, Kersting, Vatutin 03] :

$$\mathbb{P}(Z_n > 0) \sim c a_n \qquad (n \to \infty)$$

avec

- dans le sous-critique ($\mathbb{E}(\log m(\mathcal{E})) < 0$)

  $$a_n = \mathbb{E}\Big[m(\mathcal{E})\Big]^n, \ \ a_n = n^{-1/2}\mathbb{E}\Big[m(\mathcal{E})\Big]^n \quad \text{ou} \quad a_n = n^{-3/2}\exp(-\Lambda(0))^n,$$

  suivant que $\mathbb{E}(m(\mathcal{E})\log m(\mathcal{E}))$ est négative, nulle ou positive.
- dans le cas critique ($\mathbb{E}(\log m(\mathcal{E})) = 0$)

  $$a_n = 1/\sqrt{n}.$$

Dans le régime surcritique ($\mathbb{E}(\log m(\mathcal{E})) > 0$), $Z_n \to L \in \{\infty, 0\}$ et de tels régimes existent pour $\mathbb{P}(Z_n = k)$ ($k \geq 1, n \to \infty$) dans le cas linéaire fractionnaire [B. Boeinghoff 12]

Stochasicités environnementale et démographique

Deux sources d'aléa pour ces processus.

Quand on observe un événement rare en temps long, doit-on l'imputer

- à des reproductions exceptionnelles ?
- à des environnements exceptionnels ?

Stochasicités environnementale et démographique

Deux sources d'aléa pour ces processus.

Quand on observe un événement rare en temps long, doit-on l'imputer

- à des reproductions exceptionnelles ?
- à des environnements exceptionnels ?

Grandes déviations inférieures, avec J. Berestycki et C. Boeinghoff

Dans ce cas, les stochasticités environnementales et démographiques se combinent pour expliquer les événements de grandes déviations.
On introduit

$$\chi(\theta) := \inf_{t\in[0,1]} \left\{ t\varrho + (1-t)\Lambda(\theta/(1-t)) \right\},$$

avec

$$\varrho := -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}_1(Z_n = 1).$$

Theorem (Déviations inférieures en régime surcritique)

On suppose $0 < \theta < \mathbb{E}(\log m(\mathcal{E}))$.
Alors

$$\tfrac{1}{n} \log \mathbb{P}_1(1 \le Z_n \le e^{\theta n}) \xrightarrow{n\to\infty} -\chi_\varrho(\theta).$$

Grandes déviations inférieures, avec J. Berestycki et C. Boeinghoff

Dans ce cas, les stochasticités environnementales et démographiques se combinent pour expliquer les événements de grandes déviations. On introduit

$$\chi(\theta) \quad := \quad \inf_{t\in[0,1]} \left\{ t\varrho + (1-t)\Lambda(\theta/(1-t)) \right\},$$

avec

$$\varrho := -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}_1(Z_n = 1).$$

Theorem (Déviations inférieures en régime surcritique)

On suppose $0 < \theta < \mathbb{E}(\log m(\mathcal{E}))$.
Alors

$$\frac{1}{n} \log \mathbb{P}_1(1 \leq Z_n \leq e^{\theta n}) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} -\chi_\varrho(\theta).$$

Grandes déviations supérieures (avec C. Boeinghoff)

Posons

$$\chi(\theta) \quad := \quad \inf_{t\in[0,1],s\in[0,\theta]} \left\{ t\gamma + \beta s + (1-t)\Lambda((\theta - s)/(1-t)) \right\}$$

avec

$$\gamma := -\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \log \mathbb{P}_1(Z_n = 1).$$

Theorem (Déviations supérieures)

On suppose

$$\log(\mathbb{P}(Z_1 > z))/\log(z) \stackrel{z\to\infty}{\longrightarrow} -\beta$$

pour $\beta \in (1, \infty)$ *(+borne quenched de la queue de distribution de la loi reproduction). Alors pour tout* $\theta \geq \mathbb{E}(\log m(\mathcal{E}))$*,*

$$\frac{1}{n} \log \mathbb{P}(Z_n \geq e^{\theta n}) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} -\chi(\theta).$$

CSBP = limites d'échelles des GW=proc. Markov càdlàg branchant.

Quelle limite d'échelle pour les processus de branchement en environnement aléatoire ?

Quelle caractérisation des processus branchant à temps et espace continu en environnement aléatoire ?

CSBP = limites d'échelles des GW=proc. Markov càdlàg branchant.

Quelle limite d'échelle pour les processus de branchement en environnement aléatoire ?

Quelle caractérisation des processus branchant à temps et espace continu en environnement aléatoire ?

Quel comportement en temps long ?

Deux exemples naturels sous forme d'EDS

- Diffusion de Feller branchante en environnement Brownien

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t Z_t(\alpha \mathrm{d}t + \sigma \mathrm{d}B_t^e) + \int_0^t \sqrt{2Z_t}\mathrm{d}B_t^d.$$

- CSBP avec catastrophes

$$Z_t = Z_0 + \int_0^t g Z_s \mathrm{d}s + \int_0^t \sqrt{2\sigma^2 Z_s}\mathrm{d}B_s$$
$$+ \int_0^t \int_{[0,\infty)} \int_0^{Z_{s-}} z\widetilde{N}_0(\mathrm{d}s, \mathrm{d}z, \mathrm{d}u) + \int_0^t \int_{[0,\infty)} \Big(f-1\Big) Z_{s-} N_1(\mathrm{d}s, \mathrm{d}f),$$

avec N_0, N_1 mesures de Poisson d'intensité resp. $\mathrm{d}s\mu(\mathrm{d}z)\mathrm{d}u$, et $\mathrm{d}t\nu(\mathrm{d}x)$ et $\widetilde{N}_0$ la mesure compensée de N_0.

CSBP avec catastrophes, avec C. Smadi et J-C P. Millan

Le processus de Lévy associé aux catastrophes

$$\Delta_t = \int_0^t \int_{(0,\infty)} \log(x) N_1(\mathrm{d}s, \mathrm{d}x) = \sum_{s \leq t} \log(F_s)$$

Proposition

i) Si $(\Delta_t + gt)_{t\geq 0}$ *tend* $-\infty$*, alors* $\mathbb{P}(Z_t \to 0 \mid \Delta) = 1$ *p.s.*
ii) Si $(\Delta_t + gt)_{t\geq 0}$ *oscille, alors* $\mathbb{P}(\liminf_{t\to\infty} Z_t = 0 \mid \Delta) = 1$ *p.s.*
iii) Si $(\Delta_t + gt)_{t\geq 0}$ *tend vers* $+\infty$ *et il existe* $\varepsilon > 0$ *tel que*

$$\int_0^\infty x \log(1+x)^{1+\epsilon} \mu(dx) < \infty, \qquad (1)$$

alors $\mathbb{P}(\liminf_{t\to\infty} Z_t > 0 \mid \Delta) > 0$ *p.s. et il existe une variable aléatoire* W *positive finie telle que*

Vitesse d'extinction dans le cas stable

Theorem

Nous supposons que $\mathbb{E}(\Delta_1) + g < 0$ *(régime sous-critique), alors*

(i) *Si* $\mathbb{E}(\Delta_1 \exp(\Delta_1)) + g < 0$*, alors*

$$\mathbb{P}_x(Z_t > 0) \sim c_1 x e^{t(\mathbb{E}(\exp(\Delta_1))+g)}, \qquad \textit{quand} \quad t \to \infty.$$

(ii) *Si* $\mathbb{E}(\Delta_1 \exp(\Delta_1)) + g = 0$*, alors*

$$\mathbb{P}_x(Z_t > 0) \sim c_2 x t^{-1/2} e^{t(\mathbb{E}(\exp(\Delta_1))+g)}, \qquad \textit{quand} \quad t \to \infty.$$

(iii) *Si* $\mathbb{E}(\Delta_1 \exp(\Delta_1)) + g > 0$*, alors*

$$\mathbb{P}_x(Z_t > 0) \sim c_3(x) t^{-3/2} e^{t\gamma}, \qquad \textit{quand} \quad t \to \infty,$$

où $\gamma := \min_{s\in[0,1]} \mathbb{E}(\exp(s\Delta_1)) + g < \mathbb{E}(\exp(\Delta_1)) + g$.

Branchement multitype en environnement aléatoire

Motivations en génétique, métapopulations ... : certains types avantagés dans certains environnements.

- Critère de persistence ?
- Croissance par type ?
- Vitesse d'extinction ? ? ?
- ...