Critère de convergence exponentielle vers la distribution quasi-stationnaire et d'exponentielle ergodicité du Q-processus

Nicolas Champagnat, Denis Villemonais

Réunion ANR MANEGE, Paris, 26/11/2013

Notations

Soit $(X_t, t \geq 0)$ un processus de Markov à valeur dans $E \cup \{\partial\}$

- $(E, \mathcal{E})$ espace mesurable, $\partial \notin E$
- $\mathbb{P}_x$ loi issue de $x \in E \cup \{\partial\}$
- P_t semi-groupe sur $\mathcal{B}_b(E \cup \{\partial\})$: $P_t f(x) = \mathbb{E}_x f(X_t)$
- $\mathcal{P}(E)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur E
- pour $\mu \in \mathcal{P}(E)$, on note $\mathbb{P}_\mu = \int_E \mathbb{P}_x \, d\mu(x)$
- $\tau_\partial := \inf\{t \geq 0 : X_t = \partial\}$

Hypothèses:

- $\forall t \geq \tau_\partial$, $X_t = \partial$ (point absorbant)
- $\forall x \in E$, $\mathbb{P}_x(\tau_\partial < \infty) = 1$
- $\forall x \in E, \forall t \geq 0$, $\mathbb{P}_x(t < \tau_\partial) > 0$

Distributions quasi-stationnaires

Définition

- *Distribution quasi-stationnaire (QSD) :* $\alpha \in \mathcal{P}(E)$ tq. $\forall t \geq 0$,
  $\mathbb{P}_\alpha(X_t \in \cdot \mid t < \tau_\partial) = \alpha$
- *Distribution conditionnelle limite (QLD) :* $\alpha \in \mathcal{P}(E)$ tq.
  $\exists \mu \in \mathcal{P}(E)$, $\mathbb{P}_\mu(X_t \in \cdot \mid t < \tau_\partial) \to \alpha$ *(par ex. pour la cv. étroite)*
- *Limite de Yaglom :* $\alpha \in \mathcal{P}(E)$ tq. $\forall t \geq 0$, $\forall x \in E$,
  $\mathbb{P}_x(X_t \in \cdot \mid t < \tau_\partial) \to \alpha$
- *QLD universelle :* $\alpha \in \mathcal{P}(E)$ tq. $\forall t \geq 0$, $\forall \mu \in E$,
  $\mathbb{P}_\mu(X_t \in \cdot \mid t < \tau_\partial) \to \alpha$

Proposition

- α *QLD universelle* $\Rightarrow$ α *Limite de Yaglom* $\Rightarrow$ α *QLD* $\Leftrightarrow$ α *QSD*
- *Si* α *QSD , alors* $\exists \lambda_0 > 0$ *tq.* $\mathbb{P}_\alpha(t < \tau_\partial) = e^{-\lambda_0 t}$

But de l' exposé

Existence et/ou unicité d'une QSD, convergence vers une QLD :

- Classiquement, on utilise une approche spectrale sur le générateur infinitésimal du processus de Markov(Perron-Frobenius, Krein-Rutman, spectre d'opérateurs auto-adjoint compact ou à résolvante compacte...)
  $\rightsquigarrow$ caractérisation spetrale des QSD
- On cherche ici des critères généraux plus probabilistes qui peuvent se justifier par exemple pour des processus non réversibles
- On s'inspire de critères connus dans le cas réductible (coefficient d'ergodicité de Dobrushin, condition de Doeblin, cf. Meyn and Tweedie)

Le critère

Hypothèse (A)

Il existe une mesure de probabilité ν sur E tq.

(A1) $\exists t_0, c_1 > 0$ *tq.* $\forall x \in E,$

$$\mathbb{P}_x(X_{t_0} \in \cdot \mid t_0 < \tau_\partial) \geq c_1 \nu(\cdot)$$

(A2) $\exists c_2 > 0$ *tq.* $\forall x \in E$ *et* $\forall t \geq 0,$

$$\mathbb{P}_\nu(t < \tau_\partial) \geq c_2 \mathbb{P}_x(t < \tau_\partial)$$

Interprétation de (A)

(A1) Penser à $\nu = c\mathbb{1}_K$ où K est un compact. Par exemple, si $E = \mathbb{R}_+^d$ et $\partial = 0$, $K = \{x \in \mathbb{R}_+^d : a \leq |x| \leq b\}$.
$\rightsquigarrow \exists t_0,\ c > 0$ tq. $\mathbb{P}_x(\tau_{K\cup\{0\}} < t_0) \geq c$
OK si X descend de l'infini (en dimension 1)

(A2) On ne survit nulle part beaucoup mieux qu'issu de ν.
Vrai par exemple si $\exists A$ tq. $\nu(A) > 0$ et
$\inf_{y\in A} \mathbb{P}_y(t < \tau_\partial) \geq c \sup_{x\in E} \mathbb{P}_x(t < \tau_\partial)$

Coefficient d'ergodicité de Dobrushin

Dans le cas où $(X_t, t \geq 0)$ est irréductible sur E, s'il existe $t_0, c_1 > 0$ et $\nu \in \mathcal{P}(E)$ tq. $\forall x \in E, \mathbb{P}_x(X_{t_0} \in \cdot) \geq c_1 \nu$, alors

- $\forall x, y \in E$,
$$\|\mathbb{P}_x(X_{t_0} \in \cdot) - \mathbb{P}_y(X_{t_0} \in \cdot)\|_{VT} \leq 2(1-c_1) = (1-c_1)\|\delta_x - \delta_y\|_{VT} < 2$$
- $\forall \mu_1, \mu_2 \in E$
$$\|\mathbb{P}_{\mu_1}(X_{t_0} \in \cdot) - \mathbb{P}_{\mu_2}(X_{t_0} \in \cdot)\|_{VT} \leq (1-c_1)\|\mu_1 - \mu_2\|_{VT},$$
- et par la propriété de Markov, $\forall x, y \in E$,
$$\begin{aligned}&\|\mathbb{P}_x(X_{kt_0} \in \cdot) - \mathbb{P}_y(X_{kt_0} \in \cdot)\|_{VT} \\ &\leq (1-c_1)\|\mathbb{P}_x(X_{(k-1)t_0} \in \cdot) - \mathbb{P}_y(X_{(k-1)t_0} \in \cdot)\|_{VT} \leq \ldots \leq 2(1-c_1)^k\end{aligned}$$
- $\rightsquigarrow$ convergence exponentielle en variation totale vers une unique mesure invariante.

Résultat principal

Theorem

L'hypothèse (A) est équivalente à l'existence d'une QLD universelle α *tq.* $\forall \mu \in \mathcal{P}(E)$

$$\|\mathbb{P}_\mu(X_t \in \cdot \mid t < \tau_\partial) - \alpha\|_{VT} \leq Ce^{-\gamma t}$$

pour deux constantes $C, \gamma > 0$ *indépendantes de* μ.
De plus, sous l'hypothèse (A), on peut prendre $C = 2/(1 - c_1 c_2)$ *et* $\gamma = -\log(1 - c_1 c_2)/t_0$.

Fonction propre

Proposition

Sous l'hypothèse (A), il existe $\eta : E \cup \{\partial\} \to \mathbb{R}_+$ *bornée telle que* $\eta(\partial) = 0$ *et* $\eta > 0$ *sur* E *tq.*

$$\eta(x) = \lim_{t \to \infty} \frac{\mathbb{P}_x(t < \tau_\partial)}{\mathbb{P}_\alpha(t < \tau_\partial)} = \lim_{t \to \infty} e^{\lambda_0 t} \mathbb{P}_x(t < \tau_\partial)$$

pour $\| \cdot \|_\infty$.
De plus $\eta \in \mathcal{D}(L)$ *où* L *est le générateur infinitésimal de* P_t*, et* $L\eta = -\lambda_0 \eta$.

Quelques commentaires

- On obtient une condition nécessaire et suffisante
- La proposition précédente est (une version de) la caractérisation spectrale des QSD.
- Dans le cas irréductible, on a en fait équivalence de la convergence uniforme en variation totale vers une mesure invariante avec
  - la convergence exponentielle
  - un critère plus faible (condition de Doeblin) : il existe $\nu \in \mathcal{P}(E)$ et $\varepsilon < 1$, t_0, $\delta > 0$ tq. pour tout A avec $\nu(A) > \varepsilon$,

$$\inf_{x \in E} \mathbb{P}_x(X_{t_0} \in A) \geq \delta.$$

Notre méthode

- donne l'équivalence avec la convergence uniforme pour la VT à une vitesse intégrable (par exemple polynomiale d'exposant plus petit que -1)
- ne permet pas d'obtenir d'affaiblir (A1) en quelque chose qui ressemble à la condition de Doeblin

Idée de la preuve ($t_0 = 1$)

Etape 1 : $\mathbb{P}_x(X_1 \in \cdot \mid t < \tau_\partial) \geq c_1 c_2 \nu_t$ où $\nu_t \in \mathcal{P}(E)$.

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_x(X_1 \in A \mid t < \tau_\partial) &= \frac{\mathbb{P}_x(1 < \tau_\partial)}{\mathbb{P}_x(t < \tau_\partial)} \mathbb{E}_x[\mathbb{1}_A(X_1)\mathbb{P}_{X_1}(t-1 < \tau_\partial) \mid 1 < \tau_\partial] \\
&\geq c_1 \frac{\mathbb{P}_x(1 < \tau_\partial)}{\mathbb{P}_x(t < \tau_\partial)} \nu[\mathbb{1}_A(\cdot)\mathbb{P}_\cdot(t-1 < \tau_\partial)] \\
&\geq c_1 c_2 \frac{\nu[\mathbb{1}_A(\cdot)\mathbb{P}_\cdot(t-1 < \tau_\partial)]}{\sup_{y \in E} \mathbb{P}_y(t-1 < \tau_\partial)} \geq c_1 c_2 \nu_t(A)
\end{aligned}$$

où $\nu_t(A) = \dfrac{\nu[\mathbb{1}_A(\cdot)\mathbb{P}_\cdot(t-1 < \tau_\partial)]}{\mathbb{P}_\nu(t-1 < \tau_\partial)}$.

Idée de la preuve (suite)

Etape 2 : soit
$R^T_{s,t}f(x) = \mathbb{E}_x(f(X_{t-s}) \mid T - s < \tau_\partial) = \mathbb{E}(f(X_t) \mid X_s = x, T < \tau_\partial)$

Lemme

Pour tout $u \leq s \leq t \leq T$,

$$R^T_{u,s}R^T_{s,t}f = R^T_{u,t}f.$$

Etape 3 : Donc $\delta_x R^T_{s,s+1} - c_1 c_2 \nu_{T-s} \geq 0$, de masse $\leq 1 - c_1 c_2$, et donc

$$\|\delta_x R^T_{s,s+1} - \delta_y R^T_{s,s+1}\|_{VT} \leq 2(1 - c_1 c_2) = (1 - c_1 c_2)\|\delta_x - \delta_y\|_{VT}.$$

La fin de la preuve se déroule comme pour le coefficient de couplage de Dobrushin.

Exponentielle ergodicité du Q-processus

Theorem

Supposons (A), alors

(i) $\exists(\mathbb{Q}_x)_{x\in E}$ *proba sur* Ω *tq. pour tout* $s > 0$ *et* $A \in \mathcal{F}_s$,

$$\lim_{t\to\infty} \mathbb{P}_x(A \mid t < \tau_\partial) = \mathbb{Q}_x(A),$$

et $(\Omega, (\mathcal{F}_t)_{t\geq 0}, (X_t)_{t\geq 0}, (\mathbb{Q}_x)_{x\in E})$ *Markov homogène*

(ii) *Sous* $(\mathbb{Q}_x)_{x\in E}$, X_t *a pour semi-groupe* $\tilde{P}_t$ *défini par*

$$\tilde{P}_t\varphi(x) = \frac{e^{\lambda_0 t}}{\eta(x)} P_t(\eta\varphi)(x)$$

(iii) $\beta(dx) = \dfrac{\eta(x)\alpha(dx)}{\int \eta\, d\alpha}$ *est l'unique probabilité invariante pour* X *sous* $(\mathbb{Q}_x)$ *et* $\forall \mu \in \mathcal{P}(E)$, $\|\mathbb{Q}_\mu(X_t \in \cdot) - \beta\|_{VT} \leq Ce^{-\gamma t}$

Idée de la preuve

(i) Pénalisation : $\Gamma_t = \mathbb{1}_{t<\tau_\partial}$
Roynette-Vallois-Yor : il suffit de montrer que $\frac{\mathbb{E}_x(\Gamma_t|\mathcal{F}_t)}{\mathbb{E}_x\Gamma_t} \to M_t$ p.s. et $(M_t)_{t\geq 0}$ martingale.
Par la proposition, on obtient $M_t = \mathbb{1}_{t<\tau_\partial} e^{\lambda_0 t}\frac{\eta(X_t)}{\eta(x)}$, et c'est une martingale car la cv. a lieu pour $\|\cdot\|_\infty$.

(ii) Facile

(iii) β est invariante car $\alpha(\eta\tilde{P}_t\varphi) = e^{\lambda_0 t}\alpha(P_t(\eta\varphi)) = \alpha(\eta\varphi)$.
On avait obtenu pour toutes proba μ_1, μ_2 sur E

$$\|\mu_1 R^T_{0,t} - \mu_2 R^T_{0,t}\|_{VT} \leq (1-c_1c_2)^{\lfloor t/t_0\rfloor}\|\mu_1-\mu_2\|_{VT}.$$

En faisant tendre $T\to\infty$, on obtient

$$\|\mathbb{Q}_{\mu_1}(X_t\in\cdot) - \mathbb{Q}_{\mu_2}(X_t\in\cdot)\|_{VT} \leq (1-c_1c_2)^{\lfloor t/t_0\rfloor}\|\mu_1-\mu_2\|_{VT}.$$

CQFD.

Quelques propriétés spectrales

- $\delta_\partial L = 0$ et $L\mathbb{1}_{E\cup\{\partial\}} = 0$.
- $\alpha L = -\lambda_0 \alpha$ et $L\eta = -\lambda_0 \eta$.

Proposition

Si $f \in \mathcal{B}_b(E \cup \{\partial\})$ fonction propre de L pour une valeur propre λ ($f \in \mathcal{D}(L)$), alors f est proportionnel à $\mathbb{1}_{E\cup\{\partial\}}$ ou η, ou bien $\lambda \leq -\lambda_0 - \gamma$.

Applications aux PNM

Soit X_t un PNM sur $\mathbb{N}$ de taux de naissance λ_n et de mort μ_n dans l'état n.

- 0 est absorbant si $\lambda_0 = \mu_0 = 0$; on suppose $\lambda_n > 0$ et $\mu_n > 0$ pour tout $n \geq 1$.
- (A1) est vraie pour toute mesure ν à support fini, par exemple $\nu = \delta_1$, si le PNM descend de l'infini, c'est-à-dire si

$$S = \sum_{n \geq 0} \frac{1}{\mu_{n+1}} \left(1 + \frac{\lambda_n}{\mu_n} + \ldots + \frac{\lambda_n \ldots \lambda_1}{\mu_n \ldots \mu_1} \right) < \infty$$

- La difficulté est de prouver (A2)

Proposition (Martinez, San Martin, Villemonais, 2012)

Supposons $S < \infty$. Alors (A2) est satisfaite, et donc il existe une unique QSD qui est une QLD universelle, avec convergence exponentielle.

Preuve de (A2)

- On a $\sup_x \mathbb{E}_x(\tau_\partial) = \sum_{k\geq 1} \mathbb{E}_k(T_{k-1}) = S < \infty$, où T_k est le premier temps d'atteinte de k.
- Donc $\forall \varepsilon > 0$, $\exists k$ tq. $\sup_{x\geq k} \mathbb{E}_X T_k \leq \varepsilon$
- D'où $\sup_{x\geq k} \mathbb{P}_x(T_k \geq 1) \leq \varepsilon$ et donc $\sup_{x\geq k} \mathbb{P}_X(T_k \geq n) \leq \varepsilon^n$
- Finalement, $\forall \lambda' > 0$, $\exists k \geq 1$ tq. $\sup_{x\geq k} \mathbb{E}_x(e^{\lambda' T_k}) < \infty$.
- De plus, $\mathbb{P}_1(t < \tau_\partial) \geq \mathbb{P}_1(X_t = 1) \geq e^{-(\lambda_1+\mu_1)t}$. Soit alors $\lambda" > \lambda_1 + \mu_1$.
- On a aussi $\mathbb{P}_1(t \leq \tau_\partial) \geq \mathbb{P}_1(t+1 < \tau_\partial) \geq \mathbb{P}_1(X_1 = k)\mathbb{P}_k(t < \tau_\partial) \geq C\mathbb{P}_k(t < \tau_\partial)$.

Preuve de (A2) (suite)

Finalement,

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}_\infty(t<\tau_\partial) &\le \mathbb{P}_\infty(t<T_k)+\mathbb{P}_\infty(T_k<t<\tau_\partial)\\
&\le Ce^{-\lambda' t}+\int_0^t \mathbb{P}_k(t-s<\tau_\partial)d\mathbb{P}_\infty(T_k>s)\\
&\le Ce^{-\lambda' t}+C\int_0^t \mathbb{P}_1(t-s<\tau_\partial)d\mathbb{P}_\infty(T_k>s)\\
&\le Ce^{-\lambda' t}+C\int_0^t \mathbb{P}_1(t-s<\tau_\partial)d\mathbb{P}_\infty(T_k>s)\\
&\le Ce^{-\lambda' t}+C\mathbb{P}_1(t<\tau_\partial)\int_0^t \frac{d\mathbb{P}_\infty(T_k>s)}{\mathbb{P}_1(s<\tau_\partial)}\\
&\le Ce^{-\lambda' t}+C\mathbb{P}_1(t<\tau_\partial)\int_0^t e^{(\lambda_1+\mu_1)s}d\mathbb{P}_\infty(T_k>s).
\end{aligned}$$

D'où

$$\mathbb{P}_\infty(t<\tau_\partial)\le C\mathbb{P}_1(t<\tau_\partial).$$

Cas des PNM multidimensionnels

Pour les PNM multidim. avec mutation et absorption en 0 seulement, le raisonnement précédent s'étend sans difficulté si on a des hypothèses de domination par un PNM mon-dim.

Par exemple

- $\sup_{\|x\|_1=n} \lambda(x) \leq Cn$
- $\inf_{\|x\|_1=n} \mu(x) \geq C' n^{1+\varepsilon}$
- On a alors domination de la taille totale de la populations par un PNM 1d qui descend de l'infini.

Cas des diffusions

Travail en cours