Devoir LM115

A rendre le jeudi 6 mars

Exercice 1:
Soit $f : E \longrightarrow F$ une application. Montrer que

f est injective $\Leftrightarrow$ $\forall A \subset E,\ f^{-1}(f(A)) = A$ $\Leftrightarrow$ $\forall A \subset E, \forall B \subset E,\ f(A \cap B) = f(A) \cap f(B)$

Exercice 2:
Soient A et B deux parties non vides d'un ensemble E et f l'application définie par

$$\begin{array}{rccl} f & : & \mathcal{P}(E) & \longrightarrow & \mathcal{P}(A) \times \mathcal{P}(B) \\ & & X & \longrightarrow & (A \cap X, B \cap X) \end{array}$$

1) Monter que f injective $\Leftrightarrow A \cup B = E$.
2) Montrer que f surjective $\Leftrightarrow A \cap B = \varnothing$.
3) Donner une CNS pour que f soit bijective et expliciter f^{-1} (la réciproque de f) dans ce cas.

Exercice 3:
Soit f fonction continue de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

1) Déterminer l'ensemble des applications affines qui sont continues et qui vérifient $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.
2) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N},\ f(n) = f(1)n$ et que $\forall n \in \mathbb{N}^*,\ f(1/n) = f(1)/n$.
3) Monter que $\forall q \in \mathbb{Q}^+,\ f(q) = f(1)q$.
4) Montrer que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) = f(1)x$.
5) Déterminer l'ensemble E formé des fonctions continues f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+,\ f(x+y) = f(x) + f(y)$.

6) Soit f fonction continue non identiquement nulle de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telle que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+,\ f(x+y) = f(x) \times f(y)$.
a) Montrer que f est strictement positive sur $\mathbb{R}+$.
b) En déduire qu' il existe $\alpha \in \mathbb{R}$ tel que $\forall x \in \mathbb{R}^+,\ f(x) = e^{\alpha x}$.
c) Déterminer l'ensemble F formé des fonctions continues non identiquement nulles f de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}$ telles que $\forall x \in \mathbb{R}^+, \forall y \in \mathbb{R}^+,\ f(x+y) = f(x) \times f(y)$.