Introduction aux probabilités et à la simulation aléatoire.

MAP 311 - PC 3 - 6 juin 2010

Variables aléatoires à valeurs réelles

EXERCICE 1 - Générer une loi géomètrique
La fonction "rand" de scilab vous permet de générer une variable aléatoire U de loi uniforme sur $[0, 1]$.

1. Comment générer à partir de U une variable X de loi exponentielle de paramètre $\lambda > 0$?
2. Soit $a > 0$. Quelle est la loi de $Y = \lfloor aX \rfloor + 1$?

EXERCICE 2 - Loi de Weilbull - temps de panne
Soit Z une variable aléatoire de loi exponentielle de paramètre 1. Pour tout $\alpha, \beta > 0$ on pose $X = \beta Z^{1/\alpha}$.

1. Quelle est la fonction de répartition de X ?
2. La loi de X admet-elle une densité ?

La loi de X est appelée loi de Weibull de paramètre (α, β). Elle est utilisée (entre autre) pour modéliser des temps de pannes.

EXERCICE 3 - Médiane et moyenne
Soit F la fonction de répartition d'une variable aléatoire réelle X. Un réel m est une *médiane* de loi de X si $F(m) = 1/2$. Calculez une médiane pour les lois suivantes et comparez la à la moyenne :

- la loi Gaussienne $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$,
- la loi de densité $f(x) = |x|^{-3} 1_{|x| \geq 1}$,
- la loi de densité $f(x) = \alpha x^{-\alpha - 1} 1_{x \geq 1}$ avec $\alpha > 0$.

EXERCICE 4 - Générer une loi uniforme avec des variables de Bernoulli
Soit $X_1, X_2, \ldots$ des variables aléatoires de Bernoulli indépendantes de paramètre $1/2$. Pour tout entier n, on pose $Z_n = \sum_{k=1}^{n} 2^{-k} X_k$ et on définit Z comme la limite des Z_n.

1. La loi de Z_n admet-elle une densité ?
2. Pour tout entier i inférieur à 2^n, montrez que $\mathsf{P}(i 2^{-n} \leq Z < (i+1) 2^{-n}) = 2^{-n}$.
3. Quelle est la loi de Z ? A-t-elle une densité ?

EXERCICE 5 - Durée de vie d'un système
On considère un système constitué de n composants. On suppose que les durées de vie des composants sont des variables exponentielles $T_1, \ldots, T_n$ de paramètres respectifs $\lambda_1, \ldots, \lambda_n > 0$ et qu'elles sont indépendantes, ce qui implique en particulier que $\forall (t_1, \ldots, t_n) \in \mathbb{R}^n$, les événements $\{T_1 \leq t_1\}, \ldots, \{T_n \leq t_n\}$ sont indépendants ainsi que les événements $\{T_1 > t_1\}, \ldots, \{T_n > t_n\}$.

1. On suppose que le système est en série, i.e. où il fonctionne seulement lorsque tous les composants fonctionnent. Exprimer sa durée de vie T en fonction des T_i. Déterminer la fonction de répartition de T et en déduire sa loi.
2. Même question dans le cas où le système est en parallèle i.e. qu'il fonctionne lorsqu'un au moins des composants fonctionne.

Espérance et moments

EXERCICE 6 - **Reconstruction d'un puzzle**
Chaque paquet de lessive X contient un morceau d'un puzzle à N pièces. On suppose qu'à chaque achat, on obtient un ainsi un morceau de façon équiprobable, independamment des moreceaux obtenus précédemment. Soit T le nombre aléatoire de paquets qu'il faut acheter pour obtenir toutes les pièces. On veut calculer par exemple $\mathsf{E}(T)$ sans déterminer la loi de T. Pour cela, on introduit les temps successifs $X_1, X_2, \cdots, X_N$ où pour la première fois $1, 2, \cdots, N$ pièces du puzzle sont réunies.

a) Déterminer la loi des variables aléatoires $X_{k+1} - X_k$, puis calculer $\mathsf{E}(T)$.
b) Quelle est la variance de T ? Montrer que $var(T)/N^2$ est borné quand $N \to \infty$.
c) Montrer que $a^2\mathsf{P}(Z > a) \leq \mathsf{E}(Z^2)$ pour toute variable aléatoire Z positive et $a > 0$.
d) En déduire que pour tout $\epsilon > 0$, on a

$$\mathsf{P}\left(\left|\frac{T}{(N \ln N)} - 1\right| > \epsilon\right) \to 0$$

quand $N \to \infty$.

EXERCICE 7 - **Moments et médiane d'une variable aléatoire réelle**
Soit X une variable aléatoire réelle de fonction de répartition F. Montrer que :

1. Si X est à valeurs positives et $k \geq 0$ alors

$$\mathsf{E}(X^{k+1}) = (k+1)\int_0^\infty x^k(1 - F(x))dx.$$

2. Pour tout réel a, on a

$$\mathsf{E}(|X - a|) = \int_{-\infty}^a F(x)dx + \int_a^\infty (1 - F(x))dx.$$

3. On suppose que la loi de X possède une densité. Pour quelle(s) valeur(s) a la quantité $\mathsf{E}(|X - a|)$ est-elle minimale ?

EXERCICE 8 - Soit $X = (X_1, X_2)$ une v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^2$ de loi normale $\mathcal{N}(0, I_2)$, c.a.d. sa densité f_X est donnée par

$$f_X(x) = \frac{1}{2\pi}e^{-\|x\|^2/2},$$

où $\| x \| = \| (x_1, x_2) \| = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$ est la norme euclidienne usuelle.

1) Déterminer la loi de la v.a. $\| X \|^2$

2) Soit $D = \{(x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2 : x_1 \neq x_2\}$. Démontrer que la variables aléatoire T définie par

$$T := \left(\frac{X_1 + X_2}{X_1 - X_2}\right)^2 \text{ si } x \in D; \qquad T := 0 \text{ si } x \notin D,$$

admet une densité égale à (loi de Hotelling)

$$\mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*}(x)\frac{1}{\pi(x+1)\sqrt{x}}$$

Solution :

1) En utilisant un changement de variable polaire puis le changement $u = \rho^2$*, on obtient pour tout fonction positive à support compact*

$$\mathsf{E}(f(\| X \|^2) = \int_{\mathbb{R}_+^*} f(\rho^2) e^{-\rho^2/2} \rho d\rho = \int_{\mathbb{R}_+^*} f(u) \frac{1}{2} e^{-u/2} du.$$

Ceci prouve que $\| X \|^2$ *ext une variable exponentielle de paramètre* $1/2$*.*

2) On effectue le changement de variable

$$u = \frac{x_1 + x_2}{x_1 - x_2},\ v = x_1 + x_2 \quad \Leftrightarrow \quad x_1 = \frac{1}{2}\left(v + \frac{v}{u}\right),\ x_2 = \frac{1}{2}\left(v - \frac{v}{u}\right)$$

de jacobien $-v/2u^2$ *et on utlise le théorème de Fubini*

$$\begin{aligned}
\mathsf{E}(f(T)) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^*} \frac{f(u^2)}{u^2} \left[\int_{\mathbb{R}} |v| \exp(-v^2(1 + 1/u^2)/4) dv \right] du \\
&= \frac{1}{4\pi} \int_{\mathbb{R}^*} \frac{f(u^2)}{u^2} \frac{8u^2}{1 + u^2} du \\
&= \int_{\mathbb{R}} f(x) \mathbb{1}_{\mathbb{R}_+^*} \frac{1}{\pi(x+1)\sqrt{x}} dx
\end{aligned}$$