Correction partielle Feuille 10

Exercice 2.

1. Observer que J et F sont dérivables et strictement convexes : preuve standard, écrire $J(v+h)$ et observer la partie linéaire et le reste. La strictement convexité vient du fait que A et M sont symétriques définies positives. Aussi, observer que J et F sont *infinies à l'infini*. Pour voir ça il suffit de voir que $(Av, v) \geq \lambda_1(A)\|v\|^2$ car A est définie positive.

L'existence des minimiseurs peut être prouvée par deux méthodes :

- J est continue, infinie à l'infini, $K = \{F(v) \leq 0\}$ est fermé
- on pourrait observer que vu que F est infinie à l'infini l'ensemble $K = \{F(v) \leq 0\}$ est aussi borné. Une fonction continue sur un compacte atteint son minimum

L'unicité, comme d'habitude, vient du fait que J est strictement convexe et que K est convexe (car F est convexe)

Remarque: On pourrait observer que le minimiseur u de J sur K n'est pas $u = 0$. En effet, si $u = 0$ est solution, on peut observer que u est à l'intérieur de K, car $F(0) = -\sigma < 0$. Alors, si le minimiseur se trouve à l'intérieur de K on peut utiliser les conditions d'optimalité de premier ordre pour voir que $J'(u) = 0$. Ceci revient à $Au - b = 0$ et donc $b = 0$, contradiction avec l'hypothèse.

2. On considère le Lagrangien $\mathcal{L}(v, q) = J(v) + qF(v)$ défini sur $\mathbb{R}^d \times \mathbb{R}$. On voudrait appliquer Kuhn-Tucker : l'existence d'un point selle pour $\mathcal{L}$ équivaut au fait que u est minimiseur de J sur K sous certaines hypothèses qui sont vérifiées dans notre cas :

- J et F sont C^1 et convexes
- les contraintes sont qualifiées en u, car $F'(u) = Mu \neq 0$ car $u \neq 0$ et M est définie positive, donc inversible.
- J admet un minimiseur unique sur $\{F \leq 0\}$.

3. Pour $q \in \mathbb{R}_+$, le problème

$$\min_{v \in \mathbb{R}^d} \mathcal{L}(v, q)$$

admet une solution pour un des deux raisons suivantes :

- $v \mapsto \mathcal{L}(v, q)$ est continue et infinie à l'infini
- $v \mapsto \mathcal{L}(v, q)$ est convexe, donc l'existence d'un minimum équivaut à l'existence d'un point critique. La derivée de $\mathcal{L}$ par rapport à v est $Av - b + qMv$. Il suffit de voir que le systeme
$$(A + qM)v = b$$
admet une solution unique car $A + qM$ est symétrique, définie positive.

L'unicité vient de la strictement convexité.

Pour avoir l'estimation sur $|u(q)|$ il suffit de partir de la seule condition qu'on a, la condition d'optimalité : $(A + qM)u(q) = b$. En prenant le produit scalaire avec $u(q)$ on trouve

$$|b||u(q)| \geq (u(q), b) = ((A + qM)u(q), u(q)) \geq (\lambda_1(A) + q\lambda_1(M))|u(q)|^2.$$

Finalement on a
$$|u(q)| \leq \frac{|b|}{\lambda_1(A) + q\lambda_1(M)}$$
qui est un résultat plus forte que ce qui a été demandé.

4. L'application $q \mapsto u(q)$ est dérivable car on a bien $u(q) = (A + qM)^{-1}b$ (toutes les opérations dans la formule précédente sont dérivables quand ils sont bien définies). Maintenant il suffit de dériver $\mathcal{L}(u(q), q) = J(u(q)) + qF(u(q))$ par rapport à q :
$$\frac{d\mathcal{G}}{dq} = J'(u(q))\frac{du}{dq}(q) + F(u(q)) + qF'(u(q))\frac{du}{dq}(q).$$
Vu que $u(q)$ vérifie bien la condition d'optimalise $J'(v) + qF'(v) = 0$ on obtient le résultat souhaité.

On calcule la dérivée deuxième et on obtient :
$$\frac{d^2\mathcal{G}}{dq^2} = F'(u(q))\frac{du}{dq}(q) = Mu(q).\frac{du}{dq}(q).$$
En dérivant la condition d'optimalité (le seul endroit où on peut retrouver facilement des infos sur $\frac{du}{dq}$) on obtient
$$Mu(q) + (A + qM)u(q) = 0.$$
Les deux formules précédentes donnent bien le résultat. La matrice $A + qM$ est définie positive, donc $\frac{d^2\mathcal{G}}{dq^2} \leq 0$. Si la dérivée deuxième s'annule alors $\frac{du}{dq}(q) = 0$ ce qui implique $u(q) = 0$ et donc $b = 0$, contredisant l'hypothèse. On peut conclure que la dérivée deuxième de $\mathcal{G}$ est toujours strictement négative et donc $\mathcal{G}$ est strictement concave.

Pour voir le comportement de $\mathcal{G}(q)$ vers $+\infty$ on a plusieurs variantes :

- Observez que $G(q) = \min_{v\in\mathbb{R}^d} \mathcal{L}(v, q) \leq \mathcal{L}(0, q) = -\sigma q$. Donc $\lim_{q\to\infty} \mathcal{G}(q) = -\infty$.
- Sinon, regardons l'expression de $G(q) = J(u(q)) + qF(u(q))$. L'estimation trouvée au point 3. nous permet de voir que $u(q) \to 0$ quand $q \to +\infty$. Un calcul simple montre que dans ce cas $J(u(q)) \to 0$ et $F(u(q)) \to -\sigma$. Finalement, on a la même conclusion.

5. Une analyse directe, niveau terminale, d'une fonction d'une variable peut vous montrer qu'il existe bien un seul maximiseur sur $[0, +\infty[$. Sinon, on peut utiliser le résultat de cours qui vous dit que si $-\mathcal{G}$ est strictement convexe, continue, et infinie à l'infini, alors $-\mathcal{G}$ admet un minimiseur unique.

Il faut observer que soit $p > 0$ et alors $F(u(p)) = 0$, soit $p = 0$ et $F(u(p)) \leq 0$. Dans tous les cas $F(u(p)) \leq 0$, donc minimiser $\mathcal{L}(v, p)$ par rapport à v équivaut à minimiser J par rapport à v. En plus, la solution $u(p))$ vérifie la contrainte $F(u) \leq 0$, donc $u(p)$ est solution de (2). Maintenant il suffit d'observer que
$$\mathcal{L}(u(p)), p) \leq \mathcal{L}(v, p),\ \forall v \in \mathbb{R}^d$$
par définition de $\mathcal{G}$ et
$$\mathcal{L}(u(p), p) - \mathcal{L}(u(p), q) = (p - q)F(u(p)).$$

Maintenant soit $p > 0$ et $F(u(p)) = 0$, soit $p = 0$ et $F(u(p)) \leq 0$. Dans tous les cals

$$\mathcal{L}(u(p), p) \geq \mathcal{L}(u(p), q).$$

6. On peut voir assez facilement que $p = 0$ équivaut à $F(u(0)) \leq 0$ (car si on veut avoir le max dans $p = 0$ $\mathcal{G}$ ne peut pas être croissante dans un voisinage de 0). $F(u(0)) \leq 0$ équivaut

$$M(u(0), u(0)) \leq 2\sigma.$$

En plus, on sait que $u(0) = A^{-1}b$, d'après la condition d'optimalité. Par conséquence, si σ est assez grand pour vérifier l'inégalité ci-dessus alors $p = 0$.

De manière équivalente, on peut voir que $u(0)$ est le minimiseur de J sur $\mathbb{R}^d$ et si la contrainte $F(v) \leq 0$ est assez large pour que K contient ce minimiseur, alors le minimiseur de J sur K va être aussi égal à $u(0)$.

Exercice 3. On soustrait λ de la relation (5b) et on obtient

$$\lambda^{k+1} - \lambda = \lambda^k - \lambda + \rho_1\rho_2 C(u^{k+1} - u).$$

On "enlève au carre" cette relation pour obtenir

$$\begin{aligned}\|\lambda^{k+1} - \lambda\|^2 = \|\lambda^k - \lambda\|^2 + \rho_1^2\rho_2^2\|C(u^{k+1} - u)\|^2 \\ + 2\rho_1\rho_2(\lambda^k - \lambda, C(u^{k+1} - u))\end{aligned}$$

Déplacez C sur l'autre membre du produit scalaire et utilisez (4a) et (5a) pour exprimer $C^t(\lambda^k - \lambda)$. Remplacez dans la relation ci-dessus pour finir.

3. Divisez la relation obtenue au 2. par ρ_2 pour obtenir

$$\frac{1}{\rho_2}\|\lambda^k - \lambda\|^2 - \frac{1}{\rho_2}\|\lambda^{k+1} - \lambda\|^2 = -\rho_1^2\rho_2\|C(u^{k+1} - u)\|^2 + 2\|u^{k+1} - u\|^2 - 2(u^{k+1} - u, (I - \rho_1 A)(u^k - u))$$

Pour finir, appliquez Cauchy-Schwarz au produit scalaire dans la relation ci-dessus.

Maintenant, il suffit de voir que la suite $\frac{1}{\rho_2}\|\lambda^k - \lambda\|^2 + \beta\|u^k - u\|^2$ est décroissante et minorée, donc convergente. En passant à la limite dans la relation (6) on obtient que $u^k \to u$.

4. CC^t est inversible car son rang est m est sa dimension est $m \times m$. Utilisez (5a) pour isoler $C^t\lambda^k$. Notez que pour retrouver λ^k il faut multiplier par C et après par l'inverse de CC^t.