Correction des certains exos : Feuille elements finis

Exercice 4. Pour les formulations variationnelles c'est le même principe: choisissez votre espace de fonctions test (voir si il y a des conditions Dirichlet ou pas), puis multipliez l'EDP par une fonction test et intégrez en espace. Il reste à faire une intégration par parties en espace pour enlever une dérivée. Pour voir comment définir la forme bilineaire et la forme linéaire dans la formulation variationnelle, voir quelle fonction est l'inconnue (ici on veut trouver l'approximation au temps t^{n+1} en sachant l'approximation au temps t^n...)

L'écriture des systèmes linéaires est immédiate une fois que vous avez les formulations variationnelles. Les matrices $\mathcal{M}_h$ et $\mathcal{K}_h$ sont, comme d'habitude, les matrices de masse et rigidité.

Observez que même pour un schéma explicite, il y a toujours un système linéaire à résoudre.

Pour obtenir la stabilité au point 2.b, utilisez la formulation variationnelle pour un certain choix de fonction test et appliquez l'inégalité de Cauchy-Schwarz.

Exercice 5. 1. Conservation d'énergie : dérivez $E(t)$ par rapport à t. La solution u étant assez régulière en t on peut faire passer la dérivée à l'intérieur de l'intégrale. En faisant une intégration par parties on récupère une intégrale contenant l'EDP. On conclut en regardant les conditions au bord.

2. Écrivez le schéma de Neumark pour $\delta = \frac{1}{2}$ et $\theta = 0$. On obtient :

$$\begin{cases} \mathcal{M}\ddot{U}^{n+1} + \mathcal{C}\dot{U}^{n+1} + \mathcal{K}U^{n+1} = b(t^{n+1}) \\ \quad \dot{U}^{n+1} = \dot{U}^n + \Delta t \left(\frac{1}{2}\ddot{U}^{n+1} + \frac{1}{2}\ddot{U}^n \right) \\ \quad U^{n+1} = U^n + \Delta t \dot{U}^n + \frac{(\Delta t)^2}{2}\ddot{U}^n \end{cases}$$

Notons par $(1), (2)$ et (3) les équations ci-dessus. Pour montrer que $\ddot{U}^n = \frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{\Delta t^2}$ utilisez l'equation (3) pour calculer $U^{n+1} - U^n$ et $U^n - U^{n-1}$, puis effectuez une soustraction de ces deux relations pour calculer $U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}$. Utilisez la relation (2) pour exprimer le terme $\dot{U}^n - \dot{U}^{n-1}$.

3. L'énergie

$$E^{n+1} := \frac{1}{2\Delta t^2}(U^{n+1} - U^n)^t \mathcal{M}(U^{n+1} - U^n) + \frac{1}{2}(U^{n+1})^t \mathcal{K} U^n.$$

contient des termes de la forme

$$A(U, V) = U^t \mathcal{M} V \text{ et } B(U, V) = U^t \mathcal{K} V. \tag{1}$$

Vu que les matrices $\mathcal{M}$ et $\mathcal{K}$ sont symétriques, ces produits A, B sont aussi symétriques. La bilinéarité de A et B implique que les identités remarquables classiques sont valables pour A et B :

$$A(U - V, U + V) = A(U, U) - A(V, V), \quad \text{etc.}$$

Tester une égalité vectorielle contre un vecteur revient à faire un produit scalaire.

$$\left(\frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2} \right)^t \mathcal{M} \frac{U^{n+1} - 2U^n + U^{n-1}}{\Delta t^2} + \left(\frac{U^{n+1} - U^{n-1}}{2} \right)^t \mathcal{K} U^n = 0,$$

Il suffit d'observer que les termes dans le premier produit impliquant la matrice symétrique $\mathcal{M}$ sont l'un la somme et l'autre la différence de deux quantités. En utilisant l'identité pour le produit $A(,)$ écrite ci-dessus, on obtient

$$\frac{1}{2\Delta t^2}A(U^{n+1}-U^n,U^{n+1}-U^n)+\frac{1}{2}U^{n+1}\mathcal{K}U^n$$
$$-\frac{1}{2\Delta t^2}A(U^n-U^{n-1},U^n-U^{n-1})+\frac{1}{2}U^n\mathcal{K}U^{n-1}=0$$

qui est exactement $E^{n+1}-E^n=0$.

4. Utilisez l'expression de E^{n+1} et les formules pour $\dot{U}^n, \ddot{U}^n$.

5. Observez que si v_h est une fonction $\mathbb{P}_1$ avec coefficients V dans la base habituelle de "fonctions chapeau" alors $\|v_h\|_{L^2}^2 = V^t\mathcal{M}V$ et $\|v_h'\|_{L^2}^2 = V^t\mathcal{K}V$. L'hypothèse sur l'inégalité entre les normes L^2 de v_h' et v_h se traduit dans une inégalité entre le produit $V^t\mathcal{K}V$ et $V^t\mathcal{M}V$:

$$V^t\mathcal{K}V \leq \frac{C_I^2}{h^2}V^t\mathcal{M}V.$$

Pour raccourcir la preuve, utilisons les notations introduites dans (1).

On a

$$\begin{aligned} E^{n+1} &= \frac{1}{2\Delta t^2}A(U^{n+1}-U^n,U^{n+1}-U^n)+\frac{1}{2}B(U^{n+1},U^n) \\ &= \frac{1}{2\Delta t^2}A(U^{n+1}-U^n,U^{n+1}-U^n)+\frac{1}{2}B(U^{n+1},U^{n+1})+\frac{1}{2}B(U^{n+1},U^n-U^{n+1}) \end{aligned}$$

En faisant l'analogie avec le produit usuel, vu que $\mathcal{B}$ est positive et symétrique, on obtient

$$B(U,V)\geq -\frac{1}{2}B(U,U)-\frac{1}{2}B(V,V).$$

(regroupez et retrouvez $B(U+V,U+V)\geq 0$)

En appliquant cette inégalité pour $U=U^{n+1}$ et $V=(U^n-U^{n+1})$ (le dernier terme de l'expression à minorer) on obtient

$$B(U^{n+1},U^n-U^{n+1})\geq -\frac{1}{2}B(U^{n+1},U^{n+1})-\frac{1}{2}B(U^n-U^{n+1},U^n-U^{n+1}).$$

On voit déjà que le terme $B(U^{n+1},U^{n+1}$ va donner ce qu'il faut dans l'expression finale. Pour l'autre terme on a

$$B(U^{n+1}-U^n,U^{n+1}-U^n)\leq \frac{C_I^2}{h^2}A(U^{n+1}-U^n,U^{n+1}-U^n)$$

En utilisant l'hypothèse sur Δt: $\frac{1}{\Delta t}\geq \frac{C_I}{h}$ on arrive à

$$B(U^{n+1}-U^n,U^{n+1}-U^n)\leq \frac{1}{\Delta t^2}A(U^{n+1}-U^n,U^{n+1}-U^n)$$

En utilisant la minoration de $B(U^{n+1},U^n-U^{n+1}$ on arrive bien à l'estimation dans l'énoncé.

6. Sous la condition CFL du point 5. ($\Delta t\leq h/C_I$), vu que l'énergie E^{n+1} est constante et $E^{n+1}\geq \frac{1}{4}(U^{n+1})^t\mathcal{K}U^{n+1}$ on en déduit que $\|(u_h^n)'\|_{L^2}$ est bornée. En utilisant une inégalité de type Poincaré (comme pour l'exercice 1, point 3.c) on retrouve bien une borne supérieure de la norme L^2 de u_h^n.