MAP 411 : Analyse numérique et optimisation

TD2/TP1 (16 novembre 2016)

Différences Finies en temps et en espace

Corrections

Exercice 1

Equation de diffusion-chaleur Soient T un réel strictement positif, $\nu > 0$ un coefficient de diffusion (unité : m^2/s) et $u^0 \in \mathcal{C}^0(\mathbb{R})$ une fonction donnée 1-périodique. On s'intéresse à l'équation de la chaleur :

$$\begin{cases} \text{Chercher} \quad u : \mathbb{R} \times [0,T] \to \mathbb{R} \text{ 1-périodique telle que} \\ \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) - \nu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = 0 \quad \forall (x,t) \in \mathbb{R} \times]0,T[, \\ u(x,0) = u^0(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}. \end{cases} \tag{1}$$

6. **Consistance.** On suppose $u(x,t)$ suffisamment régulière pour effectuer les développements de Taylor.

$$\frac{\bar{U}_j^{n+1} - \bar{U}_j^n}{\Delta t} = \theta \frac{\bar{U}_j^{n+1} - \tilde{U}_j^n}{\Delta t} + (1-\theta) \frac{\bar{U}_j^{n+1} - \bar{U}_j^n}{\Delta t}$$

On effectue respectivement pour chacun des deux termes un développement de Taylor à l'ordre 3 en temps en t^{n+1} respectivement t^n, il vient :

$$\theta \frac{u(x_j,t^{n+1}) - u(x_j,t^n)}{\Delta t} = \theta \left[\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t^{n+1}) - \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t^{n+1}) \right] + O(\Delta t^2)$$

et

$$(1-\theta) \frac{u(x_j,t^{n+1}) - u(x_j,t^n)}{\Delta t} = (1-\theta) \left[\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t^n) + \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t^n) \right] + O(\Delta t^2)$$

En effectuant le développement à l'ordre 4 en espace des 2 autres termes intervenant dans η_j^n il vient :

$$-\theta \nu \frac{\bar{U}_{j+1}^{n+1} - 2\bar{U}_j^{n+1} + \bar{U}_{j-1}^{n+1}}{\Delta x^2} = -\theta \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t^{n+1}) + O(\Delta x^2)$$

et

$$-(1-\theta)\nu \frac{\bar{U}_{j+1}^{n} - 2\bar{U}_j^{n} + \bar{U}_{j-1}^{n}}{\Delta x^2} = -(1-\theta)\nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t^{n}) + O(\Delta x^2)$$

En regroupant, on obtient :

$$\begin{aligned} \eta_j^n &= \theta \left[\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t^{n+1}) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t^{n+1}) \right] + (1-\theta) \left[\frac{\partial u}{\partial t}(x_j,t^n) - \nu \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x_j,t^n) \right] \\ &\quad -\theta \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t^{n+1}) + (1-\theta) \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t^n) + O(\Delta x^2) + O(\Delta t^2) \\ &= -\theta \left[\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t^{n+1/2}) + O(\Delta t) \right] + (1-\theta) \left[\frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t^{n+1/2}) + O(\Delta t) \right] \\ &\quad + O(\Delta x^2) + O(\Delta t^2) \\ &= (1-2\theta) \frac{\Delta t}{2} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}(x_j,t^{n+1/2}) + O(\Delta x^2) + O(\Delta t^2) \end{aligned}$$

où on a noté $t^{n+1/2} = (n + 1/2)\Delta t$. Le schéma est donc consistant au moins à l'ordre 1 en temps et 2 en espace. Dans le cas où $\theta = 1/2$ il est d'ordre 2 en temps, ce schéma est appelé schéma de Crank-Nicolson. L'ordre maximal est obtenu si u est de classe $\mathcal{C}^4$ en espace et de classe $\mathcal{C}^2$ en temps pour $\theta \neq 1/2$ et de classe $\mathcal{C}^3$ en temps pour $\theta = 1/2$.

7. **Stabilité L^2 du θ-schéma par analyse de Fourier.** Rappellons le principe de l'étude de la stabilité L^2 par analyse de Fourier

(a) Pour tout $0 \leq n \leq N-1$, on introduit la fonction $\tilde{u}^n(x)$, 1-périodique, constante par morceaux telle que pour tout $1 \leq j \leq J$:

$$\tilde{u}^n(x) = U_j^n \qquad \forall x \in]x_{j-\frac{1}{2}}, x_{j+\frac{1}{2}}[$$

(b) On décompose la fonction $\tilde{u}^n(x)$ en série de Fourier, $\forall x \in [0,1]$

$$\tilde{u}^n(x) = \sum_{k\in\mathbb{Z}} \hat{u}_k^n \, e^{2i\pi kx}$$

avec $\forall k \in \mathbb{Z}$

$$\hat{u}_k^n = \int_0^1 \tilde{u}^n(x) \, e^{-2i\pi kx} dx$$

(c) On utilise la formule de Plancherel qui relie le produit scalaire dans $L^2(]0,1[)$ au produit scalaire dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ des coefficients de la série de Fourier

$$\int_0^1 u(x)\,\overline{v(x)} dx = \sum_{k\in Z} \hat{u}_k \overline{\hat{v}_k}$$

pour obtenir les relations entre norme $\|.\|_2$ dans $\mathbb{R}^J$ et norme L^2 dans $\mathbb{C}^{\mathbb{Z}}$ (on a le même résultat pour les produits scalaires associés).

$$\begin{aligned}
\|U^n\|_2^2 &= \sum_{j=1}^J \Delta x |U_j^n|^2 = \sum_{j=1}^J \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} |U_j^n|^2 \, dx \\
&= \sum_{j=1}^J \int_{x_{j-\frac{1}{2}}}^{x_{j+\frac{1}{2}}} |\tilde{u}^n(x)|^2 \, dx = \|\tilde{u}^n\|^2_{L^2(]0,1[)} = \sum_{k\in Z} |\hat{u}_k^n|^2
\end{aligned}$$

où on a utilisé la 1-périodicité de $\tilde{u}^n$.

(d) On déduit du schéma aux différences finies une relation de la forme $\hat{u}_k^{n+1} = A_k \, \hat{u}_k^n$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$. Pour cela on utilise le fait que la transformation en série de Fourier transforme un opérateur de translation en multiplication par un complexe : soit v une fonction 1-périodique et δ un réel, on note $v(.+\delta)$ la fonction translatée de δ, on a

$$\begin{aligned}
\widehat{v(.+\delta)}_k &= \int_0^1 v(x+\delta) \, e^{-2i\pi kx} dx = \int_\delta^{1+\delta} v(y) \, e^{-2i\pi k(y-\delta)} dy \\
&= e^{+2i\pi k\delta} \int_\delta^{1+\delta} v(y) \, e^{-2i\pi ky} dy = e^{+2i\pi k\delta} \int_0^1 v(y) \, e^{-2i\pi ky} dy \\
&= e^{+2i\pi k\delta} \hat{v}_k
\end{aligned}$$

On établit alors la condition pour laquelle $|A_k| \leq 1$ pour tout mode $k \in \mathbb{Z}$ dite condition de stabilité de Von Neumann.

(e) Sous cette condition, on déduit que pour tout $0 \leq n \leq N$,

$$\|U^n\|_2 = \left(\sum_{k\in Z} |\hat{u}_k^n|^2\right)^{1/2} \leq \left(\sum_{k\in Z} |\hat{u}_k^0|^2\right)^{1/2} = \|U^0\|_2$$

qui assure la stabilité L^2 du schéma.

Le θ-schéma se réécrit sous la forme, pour tout $x \in [0,1]$:

$$U^{n+1} = B_I^\theta \, B_E^\theta \, U^n = A^\theta U^n,$$

soit

$$\frac{\tilde{u}^{n+1}(x) - \tilde{u}^n(x)}{\Delta t} - \theta\nu \frac{\tilde{u}^{n+1}(x+\Delta x) - 2\tilde{u}^{n+1}(x) + \tilde{u}^{n+1}(x-\Delta x)}{\Delta x^2}$$
$$- (1-\theta)\nu \frac{\tilde{u}^n(x+\Delta x) - 2\tilde{u}^n(x) + \tilde{u}^n(x-\Delta x)}{\Delta x^2} = 0.$$

En observant que

$$e^{2i\pi k\Delta x} - 2 + e^{-2i\pi k\Delta x} = 2(\cos(2\pi k\Delta x) - 1) = -4\sin^2(\pi k\Delta x)$$

il vient par transformation en série de Fourier pour tout $k \in \mathbb{Z}$:

$$(1 + 4\theta Co_d \sin^2(\pi k\Delta x))\hat{u}_k^{n+1} = (1 - 4(1-\theta)Co_d \sin^2(\pi k\Delta x))\hat{u}_k^n.$$

D'où comme $1+4\theta Co_d \sin^2(\pi k\Delta x) \geq 1$ (ce qui remontre que la matrice B_I^θ est inversible) ,

$$A_k^\theta = 1 - \frac{4Co_d \sin^2(\pi k\Delta x)}{1 + 4\theta Co_d \sin^2(\pi k\Delta x)} \leq 1$$

La condition de stabilité de Von Neumann s'écrit donc pour tout $k \in \mathbb{Z}$, $A_k^\theta \geq -1$, soit

$$\frac{4Co_d \sin^2(\pi k\Delta x)}{1 + 4\theta Co_d \sin^2(\pi k\Delta x)} \leq 2$$

ou encore

$$2Co_d(1-2\theta)\sin^2(\pi k\Delta x) \leq 1 \quad \forall k \in \mathbb{Z}$$

Sous la condition $2Co_d(1-2\theta) \leq 1$, le critère est vérifié pour tout k. Si $1-2\theta \leq 0$, la stabilité est inconditionnelle. Si $1-2\theta > 0$, on a stabilité sous la condition

$$Co_d \leq \frac{1}{2(1-2\theta)}$$

soit en utilisant les pas de temps et d'espace

$$\frac{\nu\Delta t}{\Delta x^2} \leq \frac{1}{2(1-2\theta)} \quad \text{si } \theta < \frac{1}{2}$$

Quand $\Delta x \to 0$, on a $\sin^2(\pi k\Delta x) \simeq \pi^2 k^2 \Delta x^2 = \pi^2 k^2 \nu\Delta t / Co_d$, et donc $A_k^\theta \to A_k^{\theta,0}$ avec

$$A_k^{\theta,0} = 1 - \frac{4\pi^2 k^2 \nu\Delta t}{1 + 4\theta\pi^2 k^2 \nu\Delta t}$$

En réécrivant $\hat{u}_k^{n+1} = A_k^{\theta,0}\hat{u}_k^n$, on obtient le schéma :

$$\frac{\hat{u}_k^{n+1} - \tilde{u}_k^n}{\Delta t} + 4\theta\pi^2k^2\nu\hat{u}_k^{n+1} + 4(1-\theta)\pi^2k^2\nu\hat{u}_k^n = 0$$

qui n'est autre que la discrétisation par un θ-schéma en temps de l'équation différentielle vérifiée par les fonctions $\hat{u}_k(t)$ coefficients de Fourier de la solution exacte. La condition de stabilité sur $A_k^{\theta,0}$ est comme $A_k^{\theta,0} \leq 1$ est toujours vérifiée,

$$4\pi^2k^2\nu\Delta t(1-2\theta) \leq 2$$

En notant $a_k = 4\pi^2k^2\nu$, on étend les résultats obtenus au TD précédent pour les schémas Euler implicite et explicite à tous les θ-schémas d'Euler : Si $1-2\theta \leq 0$, il y a stabilité inconditionnnelle (en particulier pour $\theta = 1$ Euler implicite) , si $1-2\theta > 0$, on a stabilité sous la condition :

$$\Delta t \leq \frac{2}{a_k(1-2\theta)}$$

(en particulier on retrouve $\Delta t \leq \dfrac{2}{\|A\|}$ pour $\theta = 0$ Euler explicite).

8. **Convergence en norme L^2.** On regroupe les résultats de consistance et de stabilité. On a par récurrence immédiate, e^0 étant nul, d'après

$$(B_I^\theta)^{-1}e^{n+1} = B_E^\theta e^n - \Delta t\eta^n, \tag{2}$$

pour tout $0 \leq n \leq N-1$,

$$e^{n+1} = -\Delta t\sum_{k=0}^{n}\left[B_I^\theta\, B_E^\theta\right]^{n-k}(B_I^\theta)\eta^k$$

Donc pour tout $1 \leq n \leq N$,

$$\|e^n\|_2 \leq \Delta t\sum_{k=0}^{n-1}\|A^\theta\|_2^{n-1-k}\|B_I^\theta\|_2\|\eta^k\|_2$$

Nous avons montré à la question précédente que $\|A^\theta\|_2 \leq 1$ (sous condition CFL si $\theta < 1/2$). De plus $\|B_I^\theta\|_2 \leq 1$, en effet si $Y = B_I^\theta X$, il vient $(I + \theta Co_dB)Y = X$ et donc par positivité de B

$$\|Y\|_2^2 =< Y, Y > \leq < Y, Y > + < \theta Co_dBY, Y > = < X, Y > \leq \|X\|_2\|Y\|_2$$

soit $\|Y\|_2 = \|B^\theta X\|_2 \leq \|X\|_2$. On peut aussi démontrer ce résultat par transformée de Fourier : l'opérateur B_I^θ devient le facteur multiplicatif pour chaque mode $k \in \mathbb{Z}$:

$$(B_I^\theta)_k = \frac{1}{1 + 4\theta Co_d\sin^2(\pi k\Delta x)} \leq 1$$

Enfin on utilise le résultat de consistance : pour tout $0 \leq k \leq n-1$

$$\|\eta^k\|_2 = \left(\sum_{j=1}^{J}\Delta x|\eta_j^k|^2\right)^{\frac{1}{2}} \leq C_u(\Delta t^\alpha + \Delta x^2)$$

avec $\alpha = 1$ si $\theta \neq 1/2$, $\alpha = 2$ sinon. On obtient le résultat de convergence, pour tout $1 \leq n \leq N$,

$$\|e^n\|_2 \leq TC_u(\Delta t^\alpha + \Delta x^2)$$

sous la condition $2(1-2\theta)\nu\Delta t \leq \Delta x^2$ si $\theta < 1/2$ et pour tout Δt si $\theta \geq 1/2$.
Considérons maintenant la fonction 1-périodique $\tilde{u}^n$. On a pour tout $0 \leq n \leq N-1$

$$\int_0^1 \tilde{u}^{n+1}(x)\, dx = \sum_{j=1}^{J} \Delta x U_j^{n+1}$$

Pour tout vecteur $X = (X_j)_{1\leq j\leq J} \in \mathbb{R}^J$ prolongé par périodicité $X_0 = X_J$ et $X_{J+1} = X_1$, on a

$$\sum_{j=1}^{J} \Delta x(X_{j+1} - 2X_j + X_{j-1}) =< BX, 1 >_2 =< X, B1 >_2 = 0$$

où 1 est le vecteur de composantes constantes égales à 1. On en déduit que la solution du θ-schéma vérifie :

$$\sum_{j=1}^{J} \frac{U_j^{n+1} - U_j^n}{\Delta t} = 0.$$

On en déduit la conservation de la masse discrète : pour tout $0 \leq n \leq N$,

$$\int_0^1 \tilde{u}^n(x)\, dx = \int_0^1 \tilde{u}^0(x)\, dx = \sum_{j=1}^{J} \Delta x u^0(x_j)$$

C'est l'équivalent discret du résultat de la question 1, où on a approché $\int_0^1 u^0(x)\, dx$ par une somme de Riemann aux noeuds de la grille.
Par ailleurs, pour tout $0 \leq n \leq N-1$

$$\int_0^1 |\tilde{u}^{n+1}(x)|^2\, dx = \|U^{n+1}\|_2^2$$

et donc par stabilité en norme L^2 du schéma, pour tout $0 \leq n \leq N$,

$$\int_0^1 |\tilde{u}^n(x)|^2\, dx \leq \|U^0\|_2^2 = \sum_{j=1}^{J} \Delta x |u^0(x_j)|^2$$

C'est l'équivalent discret du résultat de la question 2, où on a approché $\int_0^1 |u^0(x)|^2\, dx$ par une somme de Riemann aux noeuds de la grille. De plus comme il existe des nombres d'onde pour lesquels $|A_k^\theta| < 1$ cette décroissance est stricte.

.