

Optimisation spectrale sous contrainte de périmètre

Journées Jeunes EDPistes français 2016 - Bordeaux

Benjamin BOGOSEL

Laboratoire Jean Kuntzmann, Grenoble

21/03/2016

$$\min_{\Omega \in \mathcal{A}} J(\Omega)$$

Questions ?

- existence
- régularité
- la forme optimale est-elle explicite ?
- résultats qualitatifs
- calculs numériques

$$\min_{\Omega \in \mathcal{A}} J(\Omega)$$

Questions ?

- existence
- régularité
- la forme optimale est-elle explicite ?
- résultats qualitatifs
- calculs numériques

Optimisation spectrale

Lord Rayleigh - *The Theory of Sound* (1877)

Le tambour

Le disque minimise l'aire a fréquence donnée



Faber-Krahn (1920-1923)

Le disque minimise $\lambda_1(\Omega)$ a
aire fixée

$$\begin{cases} -\Delta u = \lambda_1(\Omega)u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Valeurs propres - Laplacien Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u \\ u &\in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

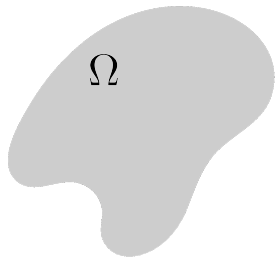
$$0 < \lambda_1(\Omega) \leq \lambda_2(\Omega) \leq \dots \rightarrow +\infty$$

Quotients Rayleigh :

$$\lambda_k(\Omega) = \min_{S_k \subset H_0^1(\Omega)} \max_{\phi \in S_k \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx}{\int_{\Omega} \phi^2 dx}$$

Dilatation : $\lambda_k(t\Omega) = \frac{1}{t^2} \lambda_k(\Omega)$.

Monotonie : $\Omega_1 \subset \Omega_2 \Rightarrow \lambda_k(\Omega_1) \geq \lambda_k(\Omega_2)$



- Il y a besoin d'une contrainte.
- Il est naturel de minimiser λ_k sous contrainte.

Contrainte volume

- formes optimales explicites :
 - $k = 1$ - la boule (Faber-Krahn)
 - $k = 2$ - deux boules identiques (Polya-Szego)
- résultats d'existence des formes optimales (Bucur, Mazzoleni - Pratelli 2012)
- calculs numériques (Oudet 2004 et Antunes, Freitas 2012)

Contrainte périmètre

- forme optimale explicite pour $k = 1$ - la boule
 - conséquence de Faber-Krahn et l'inégalité isopérimétrique
- résultats qualitatifs pour $k = 2$ en 2D (Bucur, Buttazzo, Henrot 2009)
- résultats d'existence et régularité (De Philippis, Velichkov 2012)
 - la forme optimale Ω^* existe
 - $\partial\Omega^*$ est de classe $C^{1,\alpha}$, $\alpha \in (0, 1)$
 - la courbure de Ω^* est positive (au sens des distributions)

Description des résultats

1. Γ -convergence : phase unique pour Modica-Mortola et mesure capacitaire
2. Approximation numérique par Γ -convergence et validation par représentation Fourier radiale
3. Analyse qualitative des conditions d'optimalité - valeurs propres multiples

- Lignes de niveaux + calcul vp éléments finis (Oudet, 2003)
- Paramétrisation radiale, coefficients Fourier
 - Calcul vp - sol. particulières, MpsPack (Osting)
 - solutions fondamentales (Osting 2010, Antunes, Freitas 2012)

$$\min_{\text{Per}(\Omega)=1} \lambda_k(\Omega)$$

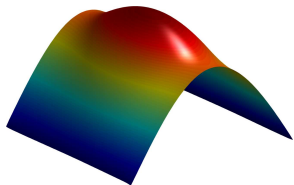
équivalent a une homothétie près à

$$\min (\lambda_k(\Omega) + \text{Per}(\Omega)) .$$

- en 2D les formes optimales sont convexes
- la forme optimale pour $k = 1$ est une boule

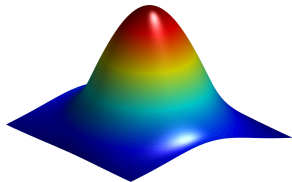
Valeur propre

$$-\Delta u + C(1 - \varphi)u = \lambda_k u$$



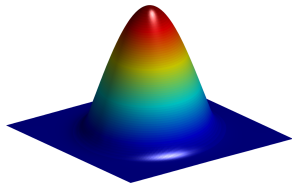
Valeur propre

$$-\Delta u + C(1 - \varphi)u = \lambda_k u$$



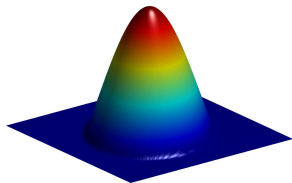
Valeur propre

$$-\Delta u + C(1 - \varphi)u = \lambda_k u$$



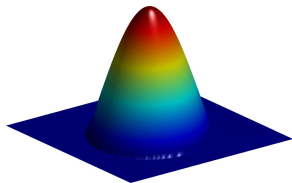
Valeur propre

$$-\Delta u + C(1 - \varphi)u = \lambda_k u$$



Valeur propre

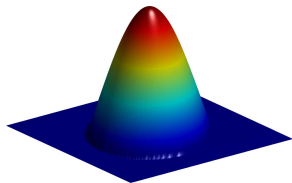
$$-\Delta u + C(1 - \varphi)u = \lambda_k u$$



Motivation

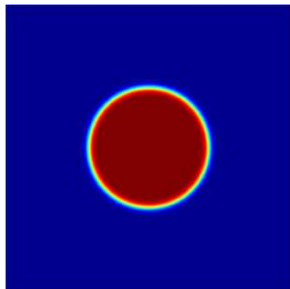
Valeur propre

$$-\Delta u + C(1 - \varphi)u = \lambda_k u$$



Périmètre

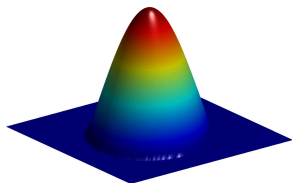
$$\varepsilon \int_D |\nabla \varphi|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_D \varphi^2 (1 - \varphi)^2 dx$$



Motivation

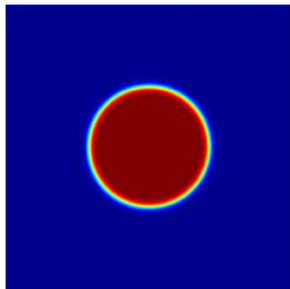
Valeur propre

$$-\Delta u + C(1 - \varphi)u = \lambda_k u$$



Périmètre

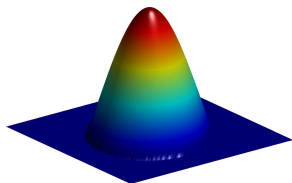
$$\varepsilon \int_D |\nabla \varphi|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_D \varphi^2 (1 - \varphi)^2 dx$$



Motivation

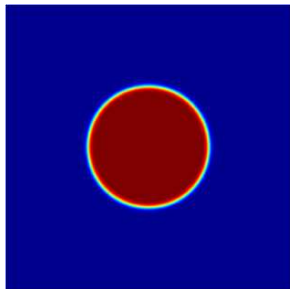
Valeur propre

$$-\Delta u + C(1 - \varphi)u = \lambda_k u$$



Périmètre

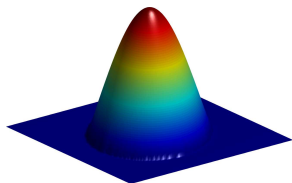
$$\varepsilon \int_D |\nabla \varphi|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_D \varphi^2 (1 - \varphi)^2 dx$$



Motivation

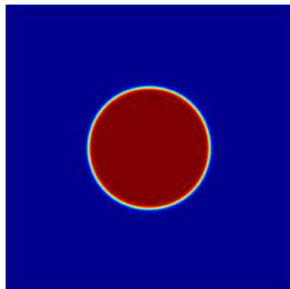
Valeur propre

$$-\Delta u + C(1 - \varphi)u = \lambda_k u$$



Périmètre

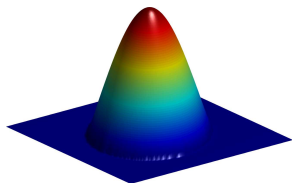
$$\varepsilon \int_D |\nabla \varphi|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_D \varphi^2 (1 - \varphi)^2 dx$$



Motivation

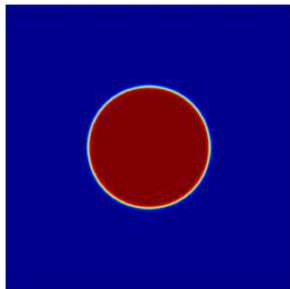
Valeur propre

$$-\Delta u + C(1 - \varphi)u = \lambda_k u$$



Périmètre

$$\varepsilon \int_D |\nabla \varphi|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_D \varphi^2 (1 - \varphi)^2 dx$$



Γ -convergence

Soit $F_\varepsilon, F : X \rightarrow [0, \infty]$, $\varepsilon > 0$ et X est un espace métrique.

On dit que F_ε Γ -converge vers F si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(LI) Pour chaque $u \in X$ et chaque suite (u_ε) tel que $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans X on a

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq F(u)$$

(LS) Pour chaque $u \in X$ il existe une suite (u_ε) tel que $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans X et

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq F(u)$$

- (i) La Γ -limite F est semi continue-inférieurement sur X ;
- (ii) Stabilité pour des perturbations continues ;
- (iii) Convergence des minimiseurs

$$F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F \Rightarrow \operatorname{argmin} F_\varepsilon \rightarrow \operatorname{argmin} F$$

Théorème de Modica-Mortola

$D \subset \mathbb{R}^N$ borné, ouvert.

$$F_\varepsilon(u) = \begin{cases} \int_D \left[\varepsilon |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} u^2 (1-u)^2 \right] dx & u \in H^1(D), \left(\int_D u = c \right) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F(u) = \begin{cases} \frac{1}{3} \text{Per}(\Omega, D) & u \in BV(D; \{0, 1\}), \Omega = u^{-1}(1), \left(\int_D u = c \right) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème Modica-Mortola

F_ε Γ -converge vers F dans la topologie $L^1(D)$.

Combiner les deux approches

Idée générale

Utiliser la même fonction de phase pour approcher le périmètre et la valeur propre

$$\lambda_k(\Omega) \quad + \quad \text{Per}(\Omega)$$

$$\mathcal{F}(\varphi) = \lambda_k(C(1 - \varphi)) + \varepsilon \int_D |\nabla \varphi|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_D \varphi^2 (1 - \varphi)^2 dx$$

$$\text{Choix } C = 1/\varepsilon^2$$

Résultat Γ -convergence

$$J_\varepsilon, J : L^1(D, [0, 1]) \rightarrow [0, +\infty]$$

$$J_\varepsilon(\varphi) = \begin{cases} \lambda_k \left(\frac{1 - \varphi}{\varepsilon^2} dx \right) + & \text{si } \varphi \in H^1(D) \\ +\varepsilon \int_D |\nabla \varphi|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_D \varphi^2 (1 - \varphi)^2 dx & \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$J(\varphi) = \begin{cases} \lambda_k(\Omega) + \frac{1}{3} \text{Per}(\Omega) & \text{si } \varphi = \chi(\Omega) \in BV(D, \{0, 1\}) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

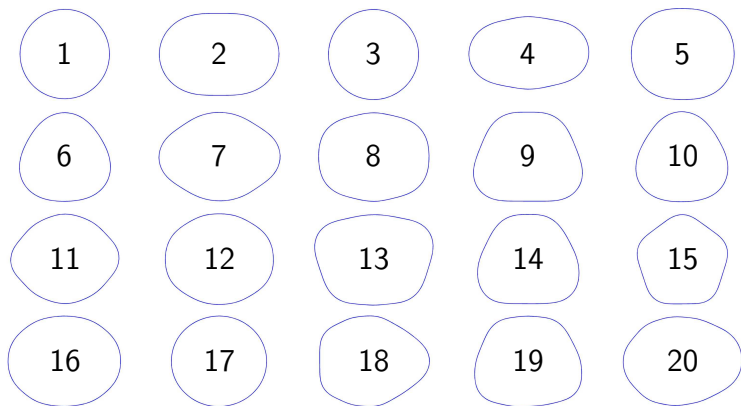
Théorème

$J_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} J$ dans la topologie de $L^1(D)$.

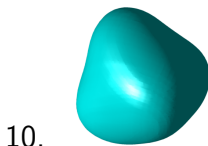
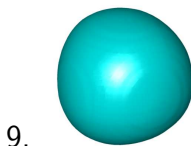
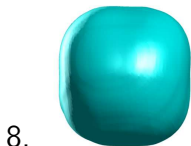
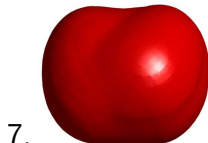
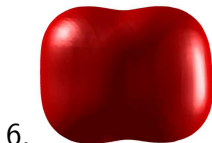
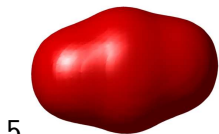
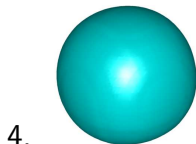
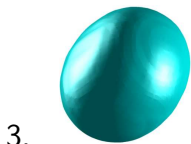
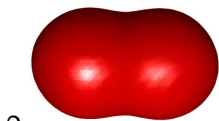
$D = [0, 1]^2$ avec une grille uniforme $N \times N$.

- quadrature + différences finies pour Modica-Mortola ;
- $\lambda_k \left(\frac{1-\varphi}{\varepsilon^2} dx \right) \longrightarrow \left[A + \frac{1}{\varepsilon^2}(1 - \varphi)I \right] u = \lambda u$;
- algorithme du gradient ;
- choix initial aléatoire $\Rightarrow k$ boules (minimum local) ;
- difficulté résolue si densité aléatoire *non-uniforme*.

Résultats



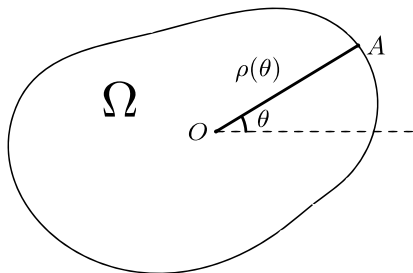
Extension directe en dimension trois



Validation des résultats en 2D

- en 2D la forme optimale est convexe

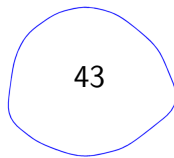
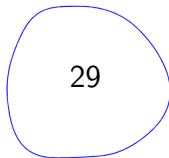
$$\Omega \longrightarrow \rho : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}_+.$$



$$\rho(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)).$$

Optimisation

- algorithme d'optimisation basé sur le gradient (LBFGS)
- point de départ aléatoire pour éviter les minima locaux ;
 - calcul des valeurs/fonctions propres avec MpsPack ;
 - calculs faits pour $k \leq 50$;
 - P. Antunes and P. Freitas (2015) ont fait les mêmes calculs : on a au moins 10 formes qui sont meilleures ($k = 11, 20, 31, 36, 37, 38, 40, 43, 46, 49$).
 - les formes optimales sont presque toutes symétriques ; exceptions :



Comparaison des deux méthodes

k	mult.	Γ -conv	Fourier	k	mult.	Γ -conv	Fourier
1	1	11.55	11.55	11	2	24.62	24.60
2	1	15.28	15.28	12	3	24.76	24.74
3	2	15.75	15.75	13	1	25.98	25.98
4	2	18.35	18.35	14	2	26.43	26.43
5	2	19.11	19.11	15	1	26.91	26.91
6	1	20.09	20.09	16	3	27.27	27.25
7	2	21.50	21.50	17	3	27.37	27.36
8	2	22.07	22.02	18	2	28.66	28.63
9	1	23.21	23.21	19	2	29.09	29.08
10	2	23.58	23.55	20	3	29.53	29.51

Contrainte perimetre vs contrainte volume

- contrainte volume $\longrightarrow \lambda_k(\Omega^*)$ est multiple pour $k \geq 2$
- contrainte périmètre $\longrightarrow \lambda_k(\Omega^*)$ est simple pour $k = 2$
(BBH, 2009), 6, 9, 13, 15

Pourquoi ?

Pour λ simple on a

Contrainte volume

$$(1) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ |\nabla u|^2 = 1 & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Contrainte périmètre

$$(2) \quad \begin{cases} -\Delta u = \lambda u & \text{dans } \Omega \\ u = 0 & \text{sur } \partial\Omega \\ |\nabla u|^2 = \mathcal{H} & \text{sur } \partial\Omega \end{cases}$$

Conjecture (Schiffer)

Si (1) a une solution non-triviale alors Ω est un disque.

A. Berger, *The eigenvalues of the Laplacian with Dirichlet boundary condition in \mathbb{R}^2 are almost never minimized by disks* (2015)

Conditions d'optimalité

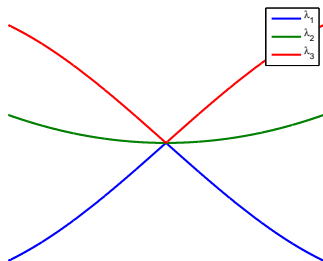
- λ_k simple, V champ de vecteurs qui perturbe $\partial\Omega$

$$\frac{d\lambda_k(\Omega)}{dV} = - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u_k}{\partial n} \right)^2 V \cdot n d\sigma$$

→ a l'optimum on a $\left(\frac{\partial u_k}{\partial n} \right)^2 = \mathcal{H}$

Conditions d'optimalité : multiplicité > 1

On perd la différentiabilité !

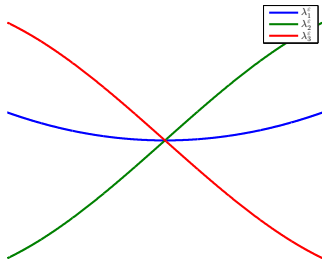


Conditions d'optimalité : multiplicité > 1

On perd la différentiabilité !

Rellich

Si $A(t)$ est une suite analytique d'opérateurs auto-adjoints avec résolvantes compactes, ayant le même domaine de définition, alors il est possible de **paramétriser analytiquement les valeurs propres et les fonctions propres**.



- λ_k multiple : on trouve une famille $(\phi_i)_{i=1}^m \subset E_k$ tel que

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right)^2 = 1$$

- Ahmad El Soufi, Saïd Ilias. *Domain deformations and eigenvalues of the Dirichlet Laplacian in a Riemannian manifold*
- Nadirashvili, *Berger's isoperimetric problem and minimal immersions of surfaces*

Contrainte de périmètre, hypothèse de régularité C^3
(travail en cours - $C^{1,\alpha}$) :

- λ_k multiple : on trouve une famille $(\phi_i)_{i=1}^m \subset E_k$ tel que

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right)^2 = \mathcal{H}$$

Idée de la preuve

- $\Omega_t = (\text{Id} + tV)(\Omega)$.
- $F(t) = \lambda_k(\Omega_t) + \text{Per}(\Omega_t)$
- F pas différentiable si λ_k est multiple
- on a des dérivées à gauche et à droite en 0
- extremum local $\longrightarrow \frac{dF}{dt+}(0) \cdot \frac{dF}{dt-}(0) \leq 0$

Idée de la preuve

Si (u_i) est une base orthonormée pour l'espace propre alors pour toute perturbation V

$$\exists j \quad - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial n} \right)^2 V.n + \int_{\partial\Omega} \mathcal{H}V.n \leq 0$$

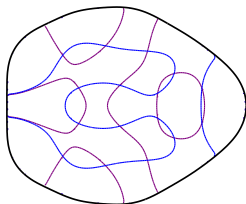
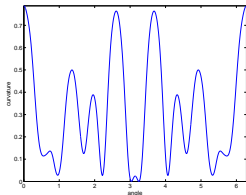
$$\exists j \quad - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u_j}{\partial n} \right)^2 V.n + \int_{\partial\Omega} \mathcal{H}V.n \geq 0$$

Hahn-Banach \Rightarrow on peut trouver $\mu_i \in [0, 1]$ avec $\mu_1 + \dots + \mu_m = 1$ t.q.

$$- \sum_{i=1}^m \mu_i \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u_i}{\partial n} \right)^2 V.n + \int_{\partial\Omega} \mathcal{H}V.n = 0$$

Conséquences

- $\mathcal{H}(x) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi_i}{\partial n}(x) = 0$



- la frontière d'un minimiseur local ne contient pas de segment (partie plate en $\text{dim} > 2$)
- argument bootstrap (BBH) - régularité l'ensemble optimal est C^∞ .

Merci !