

Optimisation des valeurs propres sous contrainte de périmètre (Dirichlet, Steklov)

Benjamin Bogosel

LAMA, Chambéry

12/03/2015

1 Valeurs propres - Laplacien Dirichlet

2 Valeurs propres Steklov

Valeurs propres - Laplacien Dirichlet

$$\begin{cases} -\Delta u &= \lambda u \\ u &\in H_0^1(\Omega) \end{cases}$$

$$0 < \lambda_1(\Omega) \leq \lambda_2(\Omega) \leq \dots \rightarrow +\infty$$

Rayleigh :

$$\lambda_k(\Omega) = \min_{S_k \subset H_0^1(\Omega)} \max_{\phi \in S_k} \frac{\int_{\Omega} |\nabla \phi|^2 dx}{\int_{\Omega} \phi^2 dx}$$

Consequence : $\lambda_k(t\Omega) = \frac{1}{t^2} \lambda_k(\Omega)$.

Monotonie : $\Omega_1 \subset \Omega_2 \Rightarrow \lambda_k(\Omega_1) \geq \lambda_k(\Omega_2)$



Optimisation spectrale

- Contrainte de volume dans une boîte D avec $|D| < \infty$
(Buttazzo, Dal Maso)
- Contrainte de volume sans boîte (Bucur, Mazzoleni, Pratelli)
- Contrainte de périmètre (Velichkov, de Philippis, existence + régularité $C^{1,\alpha}$)

$$\min_{\text{Per}(\Omega)=1} \lambda_k(\Omega)$$

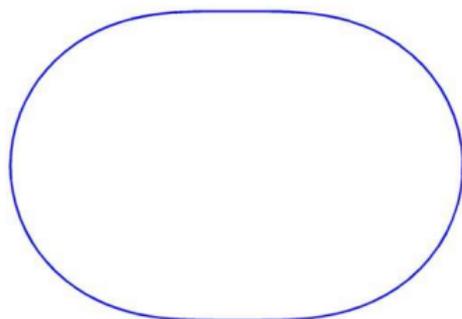
équivalente (à une homothétie près) à

$$\min \lambda_k(\Omega) + \text{Per}(\Omega).$$

Quelles sont les formes optimales ?

- λ_1 avec contrainte de volume : la boule (Faber-Krahn)
- λ_2 avec contrainte de volume : deux boules identiques
- λ_1 avec contrainte de périmètre : la boule (Faber-Krahn + l'inégalité isopérimétrique).
- λ_2 avec contrainte de volume + convexité n'est pas l'enveloppe convexe de deux disques (Oudet, Henrot). La frontière contient deux segments parallèles.

- λ_2 avec contrainte de périmètre : Ω^* est un ensemble C^∞ et sa frontière ne contient des segments ou des arcs des cercles (Bucur, Buttazzo, Henrot)



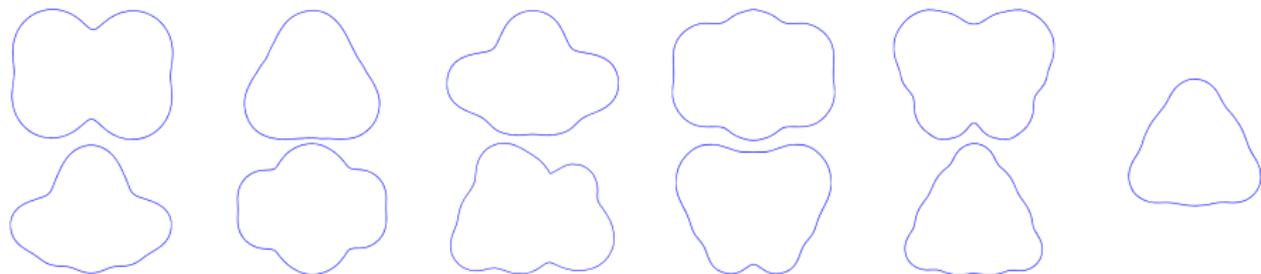
→ l'enveloppe convexe du forme optimale pour le volume n'est pas optimale pour le périmètre

→ **motivation étude numérique**

- Conjecture : 2D, $k = 3$, contrainte volume : le disque
- Conjecture : 2D, $k = 3$, contrainte périmètre : le disque

Études numériques antérieures :

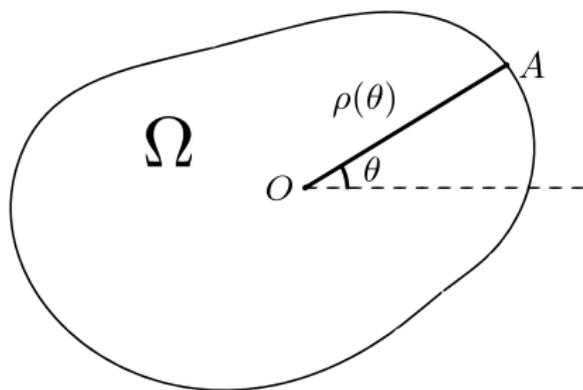
- Oudet, contrainte volume 2004 ;
- Antunes, Freitas, contrainte volume 2012 ;
- Antunes, Freitas, contrainte périmètre 2D et 3D, 2014.



Première méthode

- en 2D la forme optimale est convexe
- en général la forme optimale est connexe

$$\Omega \longrightarrow \rho : [0, 2\pi) \rightarrow \mathbb{R}_+.$$



Développement en série de Fourier

$$\rho(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta)).$$

- a_n, b_n petits très vite

$$\rho(\theta) \approx \rho_N(\theta) = a_0 + \sum_{k=1}^N (a_k \cos(k\theta) + b_k \sin(k\theta))$$

$\Omega_N \longrightarrow \rho_N$ alors

$$|\lambda_n(\Omega_N) - \lambda_n(\Omega)| \leq \frac{3}{r^*} \lambda_n(B_{r^*}) \sum_{k \geq N+1} (|a_k| + |b_k|).$$

(B_{r^*} est la boule maximale contenu en Ω, Ω_N)

Calcul du gradient

$$\lambda_k(\Omega) \approx \lambda_k(a_0, a_1, \dots, a_n, b_1, \dots, b_n).$$

Si $-\Delta u_n = \lambda_n(\Omega) u_n$, $u_n \in H_0^1(\Omega)$

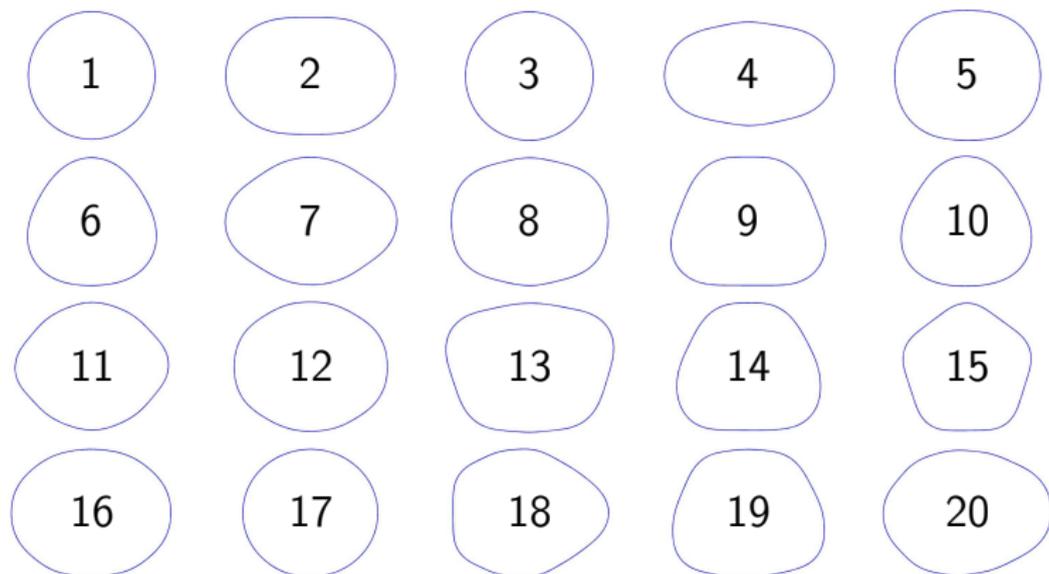
$$\frac{\partial \lambda_n}{\partial a_k} = - \int_0^{2\pi} \rho(\theta) \cos(k\theta) \left| \frac{\partial u_n}{\partial n}(\rho(\theta), \theta) \right|^2 d\theta$$

$$\frac{\partial \lambda_n}{\partial b_k} = - \int_0^{2\pi} \rho(\theta) \sin(k\theta) \left| \frac{\partial u_n}{\partial n}(\rho(\theta), \theta) \right|^2 d\theta$$

Optimisation

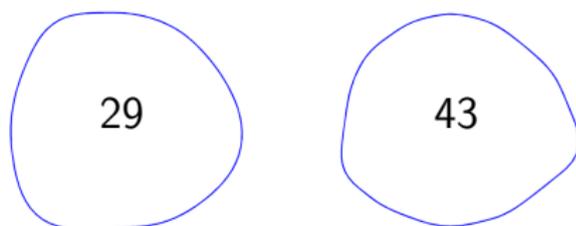
- algorithme d'optimisation basé sur le gradient (LBFGS)
- point de départ aléatoire pour éviter les minima locaux ;
 - calcul des valeurs/vecteurs propres avec MpsPack ;
 - calculs faits pour $k \leq 50$;
 - P. Antunes and P. Freitas ont fait les memes calculs : on a 10 formes qui sont meilleurs ($k = 11, 20, 31, 36, 37, 38, 40, 43, 46, 49$).

Résultats numériques



Différences - contrainte volume

- contrainte volume $\rightarrow \lambda_k(\Omega^*)$ ($k \geq 2$) est multiple et la multiplicité est croissante
- contrainte périmètre $\rightarrow \lambda_k(\Omega^*)$ est simple pour $k = 2, 6, 9, 13, 15$
- les formes optimales sont presque toutes symétriques ; exceptions :



Conditions d'optimalité

- λ_k simple : $\Omega_\varepsilon = f_\varepsilon(\Omega)$, $V = \frac{d}{d\varepsilon} F_\varepsilon \Big|_{\varepsilon=0}$

$$\frac{d\lambda_k(\Omega)}{dV} = - \int_{\partial\Omega} \left(\frac{\partial u_k}{\partial n} \right)^2 V \cdot n d\sigma$$

→ a l'optimum on a $\left(\frac{\partial u_k}{\partial n} \right)^2 = c\mathcal{H}$

Conditions d'optimalité : multiplicité > 1

Contrainte de volume :

- λ_k multiple : on trouve une famille $(\phi_i)_{i=1}^m \subset E_k$ tel que

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right)^2 = 1$$

Ahmad El Soufi and Saïd Ilias. Domain deformations and eigenvalues of the Dirichlet Laplacian in a Riemannian manifold

Conditions d'optimalité : multiplicité > 1

Contrainte de périmètre :

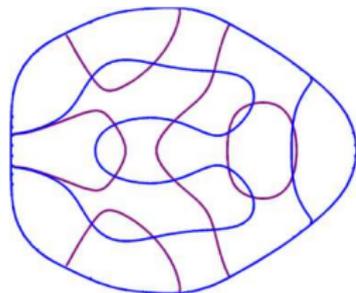
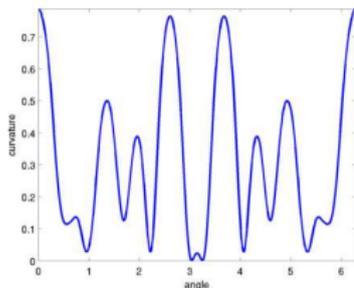
- λ_k multiple : on trouve une famille $(\phi_i)_{i=1}^m \subset E_k$ tel que

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right)^2 = \mathcal{H}$$

Conséquences

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right)^2 = \mathcal{H}$$

- $\mathcal{H}(x) = 0 \Rightarrow \frac{\partial \phi_i}{\partial n}(x) = 0$



- la frontière d'un minimiseur local ne contient pas un segment (partie plate en $\dim > 2$)

Conditions d'optimalité : vérification numérique

$$\sum_{i=1}^m \left(\frac{\partial \phi_i}{\partial n} \right)^2 = \mathcal{H}$$



$$\mathcal{H} \in \text{span} \left(\left\{ \left(\frac{\partial u_i}{\partial n} \right)^2, i = 1..p \right\} \cup \left\{ \frac{\partial u_i}{\partial n} \frac{\partial u_j}{\partial n}, 1 \leq i < j \leq p \right\} \right).$$

et la combinaison peut être exprimée comme une somme des carrés.

Conditions d'optimalité : vérification numérique

Numériquement - problème quadratique :

$$\min_{\substack{(\alpha_i)_{i=1}^p, \\ (\beta_{i,j})_{1 \leq i < j \leq n}}} \sum_{h=1}^l \left(\sum_{i=1}^p \alpha_i \left(\frac{\partial u_i}{\partial n}(x_h) \right)^2 + \right. \\ \left. + \sum_{1 \leq i < j \leq p} \beta_{i,j} \frac{\partial u_i}{\partial n}(x_h) \frac{\partial u_j}{\partial n}(x_h) - \mathcal{H}(x_h) \right)^2$$

- Observation : très bon indicateur d'un minimum local
- Erreur ponctuelle maximale $< 10^{-4}$ pour $k \leq 15$ en 2D

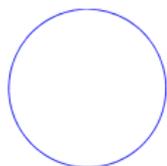
Deuxième méthode

- remplacer Ω par une densité φ
- pour $\mu = C(1 - \varphi)dx$ on considère $\lambda_k(\mu)$:

$$\begin{cases} -\Delta u + \mu u = \lambda_k(\mu)u \\ u \in H_1(D) \cap L^2(D, \mu) \end{cases}$$

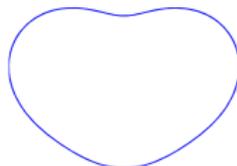
- $\lambda_k(\Omega) \approx \lambda_k(\mu)$
- approximer le périmètre avec Modica-Mortola

Calcul valeurs propres - pénalisation mesure



(1, 0, 0, 0, 0, 0, 0)

| k | erreur |
|-----|--------|
| 1 | 0.0033 |
| 2 | 0.0088 |
| 3 | 0.0088 |
| 4 | 0.0336 |
| 5 | 0.0008 |
| 6 | 0.0203 |
| 7 | 0.0287 |
| 8 | 0.0287 |
| 9 | 0.0360 |
| 10 | 0.0360 |



(1, 0, 0.2, 0, 0, 0, 0.1)

| k | erreur |
|-----|--------|
| 1 | 0.0081 |
| 2 | 0.0034 |
| 3 | 0.0259 |
| 4 | 0.0094 |
| 5 | 0.0186 |
| 6 | 0.0046 |
| 7 | 0.0483 |
| 8 | 0.0537 |
| 9 | 0.0264 |
| 10 | 0.0131 |



(1, 0.1, 0, 0, 0, 0.4, 0)

| k | erreur |
|-----|--------|
| 1 | 0.0143 |
| 2 | 0.0072 |
| 3 | 0.0048 |
| 4 | 0.0518 |
| 5 | 0.0029 |
| 6 | 0.0453 |
| 7 | 0.0518 |
| 8 | 0.0088 |
| 9 | 0.0569 |
| 10 | 0.0874 |



(1, 0.2, 0, -0.2, 0, 0, 0.1)

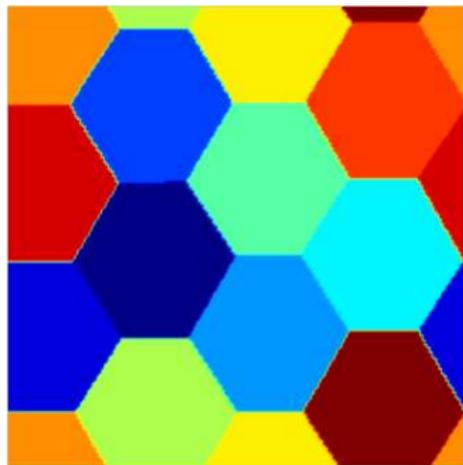
| k | erreur |
|-----|--------|
| 1 | 0.0114 |
| 2 | 0.0135 |
| 3 | 0.0269 |
| 4 | 0.0169 |
| 5 | 0.0425 |
| 6 | 0.0461 |
| 7 | 0.0329 |
| 8 | 0.0396 |
| 9 | 0.0643 |
| 10 | 0.0837 |

erreurs absolus; erreur relative : $\approx 10^{-3}$.

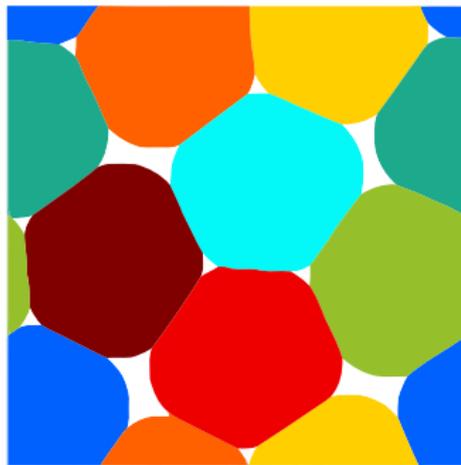
Motivation (1)

$\lambda_k(\Omega) \longrightarrow -\Delta u + C(1 - \varphi)u = \lambda_k u$ avec $C \gg 1$.

- Bourdin, Bucur, Oudet - étude numérique des partitions qui minimisent la somme des valeurs propres ;
- Bogosel, Velichkov - étude numérique des problèmes multiphases pour valeurs propres.



Benjamin Bogosel

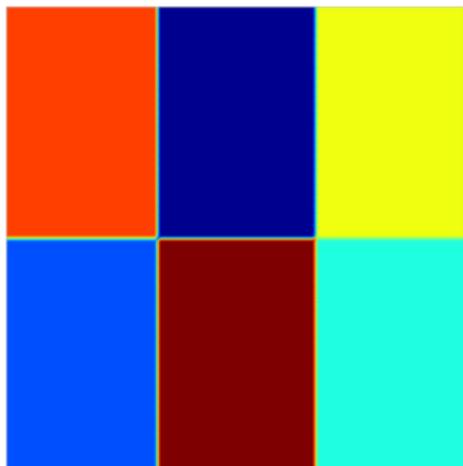
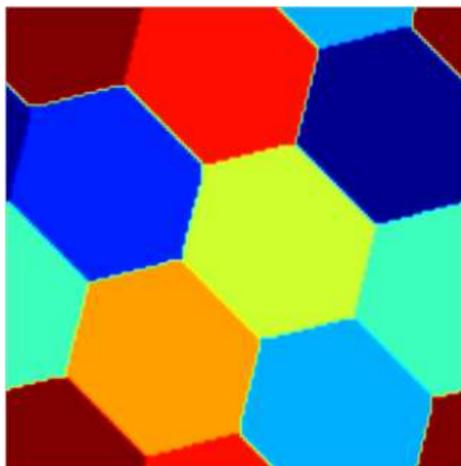


Optimisation spectrale - contrainte périmètre

Motivation (2)

$$\text{Per}(\Omega) \longrightarrow c \left(\int_D |\nabla \varphi|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_D \varphi^2 (1 - \varphi)^2 dx \right)$$

- Oudet - étude numérique des partitions qui minimisent la somme des périmètres en 2D et 3D.
- Bogosel - variante anisotrope.



Combiner les deux

$$\begin{array}{c} \lambda_k(\Omega) + \text{Per}(\Omega) \\ \downarrow \\ \lambda_k(C(1 - \varphi)dx) + \varepsilon \int_D |\nabla \varphi|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_D \varphi^2 (1 - \varphi)^2 dx \end{array}$$

Connexion entre C et ε ?

$$\lim_{\varepsilon \rightarrow 0} C_\varepsilon = +\infty.$$

On peut prendre $C_\varepsilon = 1/\varepsilon$.

Pour ε fixé on peut trouver $\varphi_\varepsilon \in H^1(D)$ qui réalise :

$$\min_{\varphi \in H^1(D)} \lambda_k \left(\frac{1 - \varphi}{\varepsilon} dx \right) + \varepsilon \int_D |\nabla \varphi|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_D \varphi^2 (1 - \varphi)^2 dx$$

Quand $\varepsilon \rightarrow 0$ on veut que

$$\varphi_\varepsilon \rightarrow \chi_\Omega \text{ dans } L^1(D),$$

ou Ω minimise

$$\lambda_k(\Omega) + \text{Per}(\Omega).$$

Γ -convergence

Soit $F_\varepsilon, F : X \rightarrow [0, \infty]$, ou $\varepsilon > 0$ et X est un espace métrique.

On dit que F_ε Γ -converges vers F si les deux conditions suivantes sont satisfaites :

(LI) Pour chaque $u \in X$ et chaque suite (u_ε) tel que $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans X on a

$$\liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \geq F(u)$$

(LS) Pour chaque $u \in X$ il existe une suite (u_ε) tel que $u_\varepsilon \rightarrow u$ dans X et

$$\limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F_\varepsilon(u_\varepsilon) \leq F(u)$$

Propriétés

- (i) La Γ -limite F est toujours semi continue-inférieurement sur X ;
- (ii) La Γ -convergence est stable pour des perturbations continues ;
- (iii) Si F_ε Γ -converges vers F et v_ε est un minimiseur pour F_ε sur X alors chaque point limite de (v_ε) est un minimiseur de F sur X .

Théorème de Modica-Mortola

$D \subset \mathbb{R}^N$ borné, ouvert.

$$F_\varepsilon(u) = \begin{cases} \int_D \left[\varepsilon |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} u^2 (1-u)^2 \right] dx & u \in H^1(D), \left(\int_D u = c \right) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F(u) = \begin{cases} \frac{1}{3} \text{Per}(\Omega, D) & u \in BV(D; \{0, 1\}), \Omega = u^{-1}(1), \left(\int_D u = c \right) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème Modica-Mortola

F_ε Γ -converge vers F dans la topologie $L^1(D)$.

Résultat Γ -convergence

$$J_\varepsilon, J : L^1(D) \rightarrow [0, +\infty]$$

$$J_\varepsilon(\varphi) = \begin{cases} \lambda_k \left(\frac{1-\varphi}{\varepsilon} dx \right) + \\ + \varepsilon \int_D |\nabla \varphi|^2 dx + \frac{1}{\varepsilon} \int_D \varphi^2 (1-\varphi)^2 dx & \text{si } \varphi \in H^1(D) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$J(\varphi) = \begin{cases} \lambda_k(\Omega) + \frac{1}{3} \text{Per}(\Omega) & \text{si } \varphi = \chi(\Omega) \in BV(D, \{0, 1\}) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

Théorème

$J_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} J$ dans la topologie de $L^1(D)$.

Difficultés

- $F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F$ et $G_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} G \not\Rightarrow F_\varepsilon + G_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F + G$;
- (LI) \longrightarrow OK ;
- (LS) non : on doit trouver la même suite qui réalise la limite dans (LS).

Calculs numériques

$D = [0, 1]^2$ avec une grille uniforme $N \times N$.

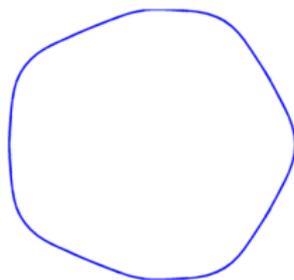
- quadrature + différences finies pour Modica-Mortola ;
- $\lambda_k \left(\frac{1-\varphi}{\varepsilon} dx \right) \longrightarrow \left[A + \frac{1}{\varepsilon}(1 - \varphi)I \right] u = \lambda u$;
- algorithme du gradient ;
- choix initial aléatoire $\Rightarrow k$ boules ;
- problème résolu si on met une concentration au centre.
- méthode moins précise : double approximation -
périmètre, valeur propre ;
- on obtient les mêmes résultats que avec la première
méthode ;

Comparaison Methodes

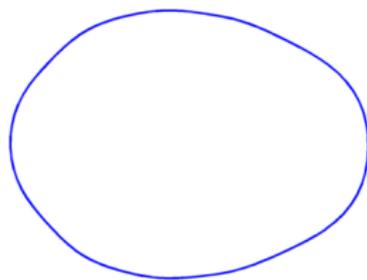
| k | mult. | Γ -conv | Fourier | k | mult. | Γ -conv | Fourier |
|-----|-------|----------------|---------|-----|-------|----------------|---------|
| 1 | 1 | 11.55 | 11.55 | 11 | 2 | 24.62 | 24.60 |
| 2 | 1 | 15.28 | 15.28 | 12 | 3 | 24.76 | 24.74 |
| 3 | 2 | 15.75 | 15.75 | 13 | 1 | 25.98 | 25.98 |
| 4 | 2 | 18.35 | 18.35 | 14 | 2 | 26.46 | 26.43 |
| 5 | 2 | 19.11 | 19.11 | 15 | 1 | 26.91 | 26.91 |
| 6 | 1 | 20.09 | 20.09 | 16 | 3 | 27.27 | 27.25 |
| 7 | 2 | 21.50 | 21.50 | 17 | 3 | 27.37 | 27.36 |
| 8 | 2 | 22.07 | 22.02 | 18 | 2 | 28.66 | 28.63 |
| 9 | 1 | 23.21 | 23.21 | 19 | 2 | 29.09 | 29.08 |
| 10 | 2 | 23.58 | 23.55 | 20 | 3 | 29.54 | 29.51 |

Avantages - deuxième méthode

- éviter certains minima locaux : $k = 20$.



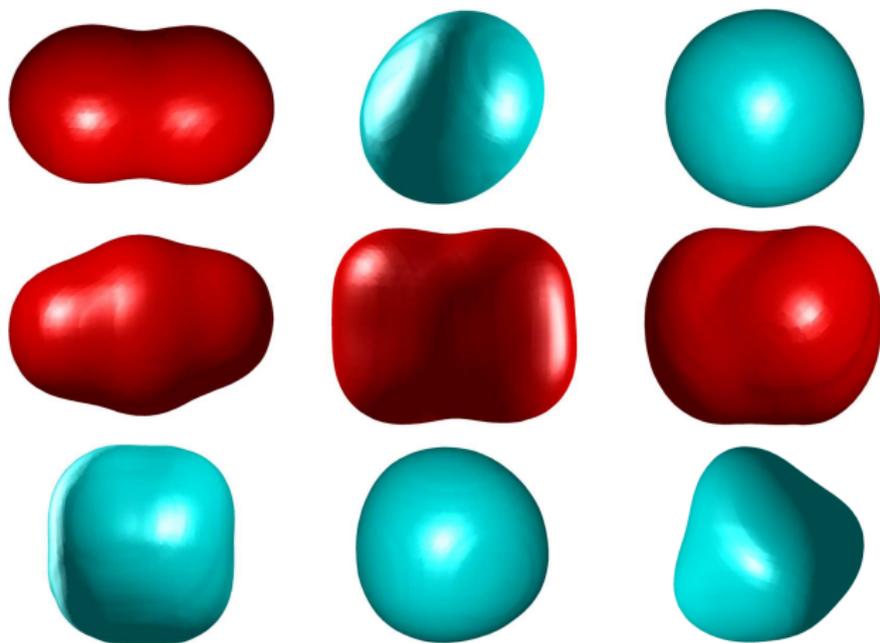
minimum local



minimum global

- extension immédiate en 3D.

Extension directe en 3 dimensions



Conclusions et perspectives

- méthode numérique basée sur Γ -convergence \rightarrow moins précise, mais donne les mêmes résultats ;
- on peut passer assez facilement en 3D ;
- on n'a pas de garantie de convergence ;
- on doit augmenter la précision en 3D ;

1 Valeurs propres - Laplacien Dirichlet

2 Valeurs propres Steklov

Pour $\Omega \subset \mathbb{R}^2$, assez régulier, simplement connexe on considère

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ \frac{\partial u}{\partial n} = \sigma u & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

Valeurs propres Steklov :

$$0 = \sigma_0 < \sigma_1(\Omega) \leq \sigma_2(\Omega) \leq \sigma_3(\Omega) \leq \dots \rightarrow +\infty$$

Caractérisation variationnelle :

$$\sigma_n(\Omega) = \inf_{S_n} \sup_{u \in S_n \setminus \{0\}} \frac{\int_{\Omega} |\nabla u|^2 dx}{\int_{\partial\Omega} u^2 d\sigma}, \quad n = 1, 2, \dots$$

$$S_n \subset H^1(\Omega) \cap \left\{ \int_{\partial\Omega} u = 0 \right\};$$

$$\sigma_k(t\Omega) = \frac{1}{t} \sigma_k(\Omega).$$

Optimisation des valeurs propres Steklov

- Le disque maximise $\sigma_1(\Omega)$ - parmi les simplement connexes, contr. vol/perim (Brock-Weinstock) ;
- Deux disques maximisent $\sigma_2(\Omega)$ parmi les domaines "sans trous" - (Girouard-Polterovich)
- $\sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_k(\Omega)}$ est minimisé par le disque - parmi les simplement connexes, contr. vol/perim (Hersch-Payne-Schiffer)
- Le disque maximise $\sigma_1(\Omega)\sigma_2(\Omega)$ parmi les simplement connexes, contr. vol/perim (Hersch-Payne-Schiffer)

Méthode

- trouver une borne supérieure/inférieure ;
- montrer que cette borne est atteinte dans un cas particulier (le disque).
- utiliser des techniques de dérivée de forme pour prouver la minimalité locale

→ On aimerait utiliser la méthode directe en calcul des variations pour prouver l'existence en général ;

→ Résultats de continuité/semi-continuité pour le spectre Steklov.

Stabilité des valeurs propres Steklov

$(\Omega_n), \Omega \subset D \subset \mathbb{R}^d$ vérifient une condition ε -cone et $\Omega_n \xrightarrow{H^c} \Omega$, alors :

(1) $\limsup_{n \rightarrow \infty} \sigma_k(\Omega_n) \leq \sigma_k(\Omega)$;

(2) Si $\text{Per}(\Omega_n) \rightarrow \text{Per}(\Omega)$ alors $\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_k(\Omega_n) = \sigma_k(\Omega)$.

Conséquence

On peut prouver des résultats d'existence pour des problèmes d'optimisation contenant les valeurs propres Steklov :
→ convexes, condition ε -cone.

Idée de la preuve

- formulation variationnelle ;
- $(\Omega_n), \Omega \subset D \subset \mathbb{R}^d$ vérifient une condition ε -cone,
 $\Omega_n \xrightarrow{H^c} \Omega, u_n \in H^1(\Omega_n), u_n \rightharpoonup u \in H^1(\Omega)$:
 - (1) $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega_n} u_n \geq \int_{\partial\Omega} u.$
 - (2) Si $\text{Per}(\Omega_n) \rightarrow \text{Per}(\Omega)$ alors $\liminf_{n \rightarrow \infty} \int_{\partial\Omega_n} u_n = \int_{\partial\Omega} u.$

Arguments similaires ont été utilisés par Bucur et Gazzola

Calcul numérique valeurs propres Steklov

- FreeFem++ - on a besoin d'une triangulation assez fine pour arriver a une precision importante, donc temps de calcul élevé.
- Méthode solutions fondamentales - gain de vitesse de calcul (0.05 sec pour les 10 premiers vp sur un i7 quad core, 2.2 Ghz) ; restriction sur la géométrie des formes : ça marche pas bien si on a des cusps.

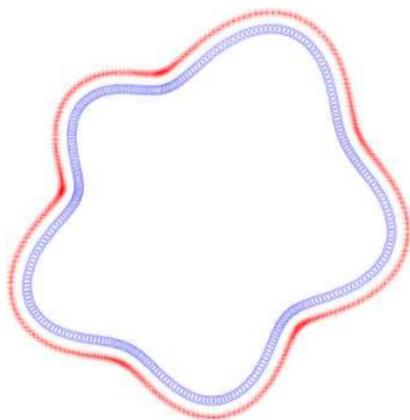
Méthode solutions fondamentales

- $(y_i)_{i=1}^N$ - une famille des points a l'extérieur du domain Ω ;
- ϕ_i - fonctions harmoniques radiales centrées en y_i ;
- $(x_i)_{i=1}^N$ - une discrétisation du $\partial\Omega$ ou on impose la condition au bord ;
- calcul valeurs propres généralises : `eigs` (Matlab)

Antunes, Freitas utilisent la même méthode pour les vp Dirichlet, Neumann. Pour les vp Steklov c'est plus simple : les solutions particuliers ne dépendent pas de valeurs propres.

Choix centres !

- Les (x_i) on les choisit uniformément sur $\partial\Omega$ (angles ou longueur d'arc) ;
- Les (y_i) on les choisit sur les normales en (x_i) a $\partial\Omega$ a distance r des (x_i) .
- Il faut bien choisir r ; problèmes conditionnement de matrices.



Comparaison FreeFem++

| | | FreeFem++ | | | |
|-----|----------|-----------|----------|----------|----------|
| k | MFS | 2096▲ | 33788▲ | 134898▲ | 211290▲ |
| 1 | 0.712751 | 0.714888 | 0.712886 | 0.712785 | 0.712773 |
| 2 | 0.940247 | 0.942837 | 0.940411 | 0.940288 | 0.940274 |
| 3 | 1.381278 | 1.38874 | 1.38175 | 1.3814 | 1.38135 |
| 4 | 1.443204 | 1.45137 | 1.44372 | 1.44333 | 1.44329 |
| 5 | 3.146037 | 3.15592 | 3.14665 | 3.14619 | 3.14614 |
| 6 | 3.443637 | 3.45562 | 3.44438 | 3.44382 | 3.44376 |
| 7 | 3.757833 | 3.78642 | 3.75962 | 3.75828 | 3.75812 |
| 8 | 3.922822 | 3.95461 | 3.92478 | 3.92331 | 3.92313 |
| 9 | 4.274362 | 4.32906 | 4.27774 | 4.27521 | 4.2749 |
| 10 | 4.693207 | 4.75819 | 4.69723 | 4.69422 | 4.69385 |

Dérivée de forme

$$\rho(\theta) \approx a_0 + \sum_{i=1}^n a_i \cos(i\theta) + \sum_{i=1}^n b_i \sin(i\theta).$$

Dambrine, Kateb, Lamboley, *An extremal eigenvalue problem for the Wentzell-Laplace operator*, Section E

$$\frac{\partial \sigma_k}{\partial a_i} = \int_0^{2\pi} (|\nabla u(\rho(\theta)\vec{r}(\theta))|^2 - (2\sigma_k^2 + \sigma_k \mathcal{H}) |u(\rho(\theta)\vec{r}(\theta))^2) \rho(\theta) \cos(i\theta) d\theta$$

$$\frac{\partial \sigma_k}{\partial b_i} = \int_0^{2\pi} (|\nabla u_k(\rho(\theta)\vec{r}(\theta))|^2 - (2\sigma_k^2 + \sigma_k \mathcal{H}) |u_k(\rho(\theta)\vec{r}(\theta))^2) \rho(\theta) \sin(i\theta) d\theta.$$

Estimations erreur

$$\begin{cases} -\Delta u_\varepsilon = 0 & \text{dans } \Omega \\ \frac{\partial u_\varepsilon}{\partial n} = \lambda_\varepsilon u_\varepsilon + f_\varepsilon & \text{sur } \partial\Omega. \end{cases}$$

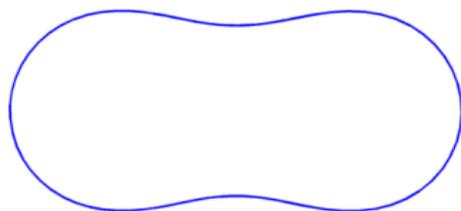
$\rightarrow \|f_\varepsilon\|_{L^2(\partial\Omega)}$ petit $\Rightarrow \lambda_\varepsilon$ est proche d'une vraie valeur propre

Résultats numériques

- Weinstock, Hersch-Payne
- $\min \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_i(\Omega)|\Omega|^{\frac{1}{2}}}$ réalisé par le disque
- $\min \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sigma_{2i-1}(\Omega)\sigma_{2i}(\Omega)|\Omega|}$ réalisé par le disque
- $\max |\Omega|^{\frac{n}{2}} \prod_{i=1}^n \sigma_i(\Omega)$ réalisé par le disque
- $\min \sum_{i \in A} \frac{1}{\sigma_i(\Omega)|\Omega|^{\frac{1}{2}}}$ réalisé par le disque, ou A a la propriété : $1 \in A, 2k \in A \Rightarrow 2k - 1 \in A$.

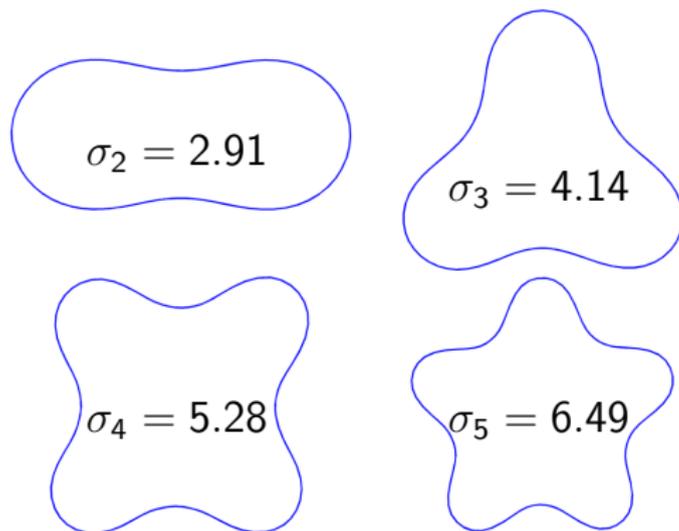
Résultats numériques

- Girouard, Polterovich - contrainte périmètre $\rightarrow \sigma_2(\Omega)$ est maximale pour 2 disques (domaines "sans trous") ;
- contrainte volume : on peut trouver des formes meilleures que deux disques



$$\sigma_2(\Omega^*) = 2.91 > 2.5066 = \sqrt{2\pi} = \sigma_2(\circ\circ)$$

Maximiseurs $\sigma_k, k \leq 5$



Autres applications (1)

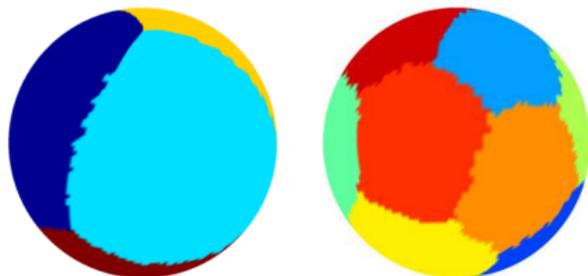
- Valeurs propres Wentzel (Δ_β est l'opérateur Laplacien-Beltrami sur $\partial\Omega$)

$$\begin{cases} -\Delta u = 0 & \text{in } \Omega, \\ -\beta \Delta_\tau + \frac{\partial u}{\partial n} = \sigma u & \text{on } \partial\Omega, \end{cases}$$

- La problème de maximiser $\sigma_{1,\beta}$ sous contrainte de volume est ouverte.
- Dambrine, Lamboley, Kateb : la boule maximiseur local.
- numériquement : le disque est optimal (en 2D).

Autres applications (2)

- étude valeurs propres Laplacien-Beltrami sur la sphere \mathbb{S}^2 .
- Ranner-Elliott : $\min_{(\Omega_i) \in \mathcal{P}} \sum_{i=1}^n \lambda_1^{LB}(\Omega_i)$. avec éléments finis.
- Avec solution fondamentales : $n \leq 12$.



Conclusions et perspectives

- résultat d'existence en cas général (simplement-connexes) ?
- calculs en 3D pour Steklov/Wentzell ?
- comment traiter les domaines qui ont des cusps ?

Merci !