

# Partitions minimales sur des surfaces

Rencontre ANR Optiform - Geometrya

Benjamin Bogosel

LJK, Grenoble

17/03/2016

## Problème

Trouver numériquement les partitions qui minimisent une certaine fonctionnelle coût

- méthode numérique efficace
- quantités géométriques, spectrales
- comparer avec autres travaux

# Partitions de longueur minimale

Coût minimal - production balles cousus à la main



# Résultats connus



Bernstein 1905 - deux demi-sphères



Masters 1996 - partition  $Y$  - angles  $2\pi/3$



Engelstein 2009 - 4 triangles - tétraèdre régulier



**pb. ouvert** - 6 carrés - cube



Hales 2002 - dodécaèdre

## F. Morgan

La partition de longueur minimale en cellules d'aire fixée existe et elle vérifie les propriétés suivantes :

- les bords des domaines ont courbure géodésique constante
- les points singuliers sont triples et les courbes font des angles de  $120^\circ$ .

Cox, Flikkema 2010 - Evolver

- partitions 2D : triangle équilatéral, carré, pentagone, hexagone, cercle,  $N \leq 42$
- partitions sphériques  $N \leq 32$ .

## Méthode

- évolution a partir des triangles
- changements de topologie à la main/recherche aléatoire
- pour  $n \geq 14$  : énumérer TOUTES les partitions de la sphère en pentagones et hexagones
- pour chaque partition - trouver le minimum local
- on retient le meilleur coût

# Formulation fonctionnelle - cas Euclidien

$$F_\varepsilon(u) = \varepsilon \int_D |\nabla u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_D u^2(u-1)^2, \int_D u = \text{const.}$$

$$F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} \frac{1}{3} \text{Per}()$$

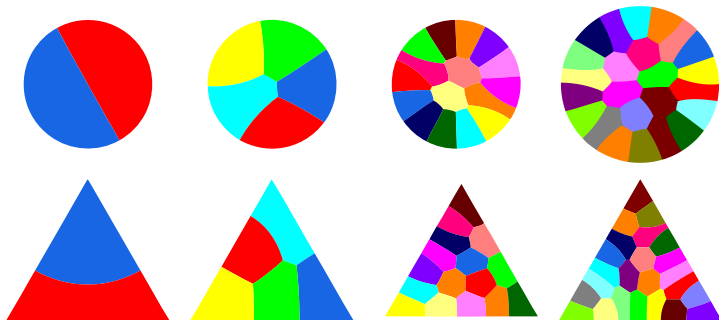
pour la topologie  $L^1$ .

Les minimiseurs de  $F_\varepsilon$  convergent vers le minimiseurs de Per a aire constante quand  $\varepsilon \rightarrow 0$ .

Oudet 2011. Même domaine de calcul pour chaque phase !



Extension au cas des partitions  $\rightarrow$  Conjecture de Kelvin en 3D.  
Calculs 2D



# Domaines non-rectangulaires

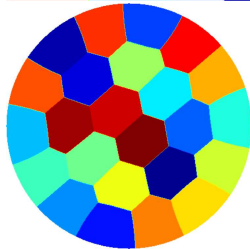
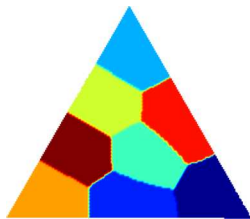
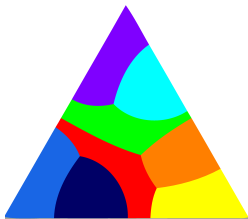
1. Différences finies - négliger les points à l'extérieur du domaine.

- problèmes près du bord
- ça marche si on a une grande résolution depuis le début

2. Éléments finis

- $\int_D |\nabla u|^2 = u^T K u$  ou  $K = (\int_D \nabla \phi_i \nabla \phi_j)_{i,j=1\dots n}$
- $\int_D u^2 (u-1)^2 = v^T M v$  ou  $M = (\int_D \phi_i \phi_j)_{i,j=1\dots n}$ .
- pas de problèmes au bord
- extension directe sur de surfaces...

# Amélioration 2D



# Extension - surfaces ?

$$\text{Per}(\Omega) \approx \varepsilon \int_S |\nabla_\tau u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_S u^2(1-u)^2$$

Théorème  $\Gamma$ -convergence ?

- Espaces  $BV$  sur des surfaces (div. tangentielle)

$$\text{Per}(\omega) = \sup \left\{ \int_\omega \text{div}_\Gamma g d\sigma : g \in C^1(S; \mathbb{R}^d), |g| \leq 1 \right\} < +\infty$$

# Théorème $\Gamma$ -convergence

$$F_\varepsilon(u) = \begin{cases} \int_S \left( \varepsilon |\nabla_\tau u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} u^2 (1-u)^2 \right) & \text{si } u \in H^1(S) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$$F(u) = \begin{cases} \frac{1}{3} \text{Per}(\omega) & \text{si } u = \chi_\omega \in BV(S) \\ +\infty & \text{sinon} \end{cases}$$

$F_\varepsilon \xrightarrow{\Gamma} F$  pour la topologie  $L^1(S)$ .

# Comment faire la preuve ?

$$\forall (u_\varepsilon) \rightarrow u \Rightarrow \liminf_{\varepsilon \rightarrow 0} F(u_\varepsilon) \geq F(u)$$

- $a^2 + b^2 \geq 2ab$
- Semi-continuité inférieure de la variation totale

$$\exists (u_\varepsilon) \rightarrow u \text{ t.q. } \limsup_{\varepsilon \rightarrow 0} F(u_\varepsilon) \leq F(u)$$

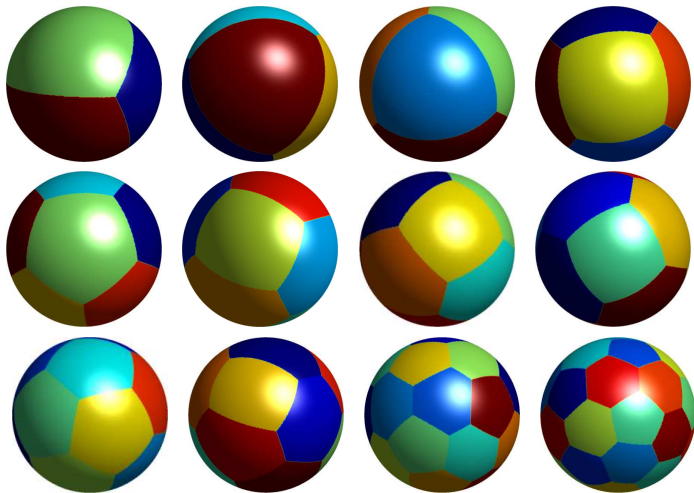
- $u = \chi_\omega$  avec  $\omega$  régulier
- $u_\varepsilon = \varphi_\varepsilon(d^\pm(x, \partial\Omega))$
- formule co-aire sur des surfaces

Extension au cas des partitions ? Même argument qu'en 2D

- Éléments finis  $P_1$  surfaciques  $\rightarrow$  matrices de rigidité et de masse  $K, M$ .
- $\varepsilon \int_S |\nabla_\tau u|^2 + \frac{1}{\varepsilon} \int_S u^2(1-u)^2 = \varepsilon u^T K u + \frac{1}{\varepsilon} v^T M v$  avec  $v = u \otimes (1-u)$  (mult. par composantes).
- algorithme de descente basé sur le gradient
- contrainte de partition :  $u_1 + \dots + u_n = 1$ .
- contrainte d'aire fixée :

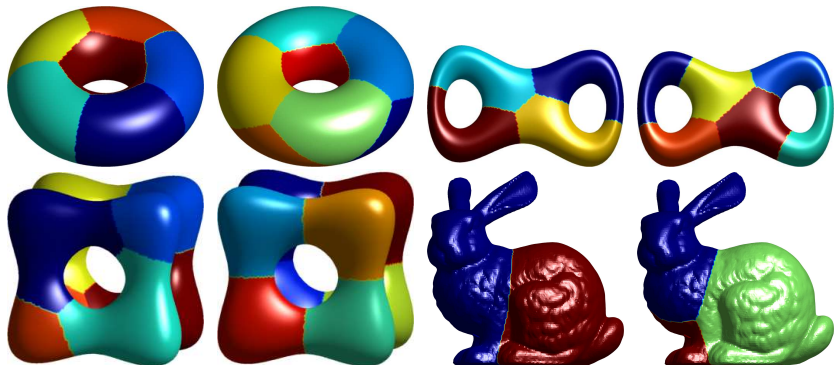
$$\int_S u_i = c \Leftrightarrow (1, 1, \dots, 1) M u_i = c.$$

# Résultats - la sphère





# Autre types de surfaces



# Comparaison Cox Flikkema - cas sphérique ?

- coût relaxé - pas assez précis

# Comparaison Cox Flikkema - cas sphérique ?

- coût relaxé - pas assez précis
- extraire la structure polyédrale : points triples, arêtes, faces

# Comparaison Cox Flikkema - cas sphérique ?

- coût relaxé - pas assez précis
- extraire la structure polyédrale : points triples, arêtes, faces
- courbure géodésique constante  $\rightarrow$  arcs de cercles

# Comparaison Cox Flikkema - cas sphérique ?

- coût relaxé - pas assez précis
- extraire la structure polyédrale : points triples, arêtes, faces
- courbure géodésique constante  $\rightarrow$  arcs de cercles
- calcul aire - Gauss-Bonnet

$$\int_M K + \int_{\partial M} k_g + \sum \theta_i = 2\pi\chi(M)$$

# Comparaison Cox Flikkema - cas sphérique ?

- coût relaxé - pas assez précis
- extraire la structure polyédrale : points triples, arêtes, faces
- courbure géodésique constante  $\rightarrow$  arcs de cercles
- calcul aire - Gauss-Bonnet

$$\int_M K + \int_{\partial M} k_g + \sum \theta_i = 2\pi\chi(M)$$

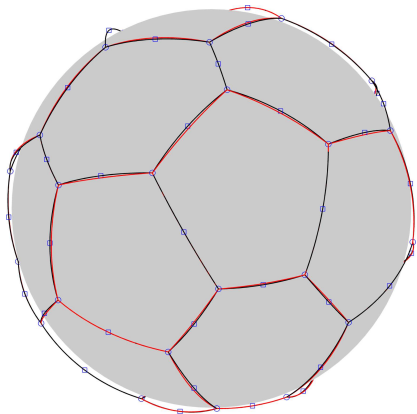
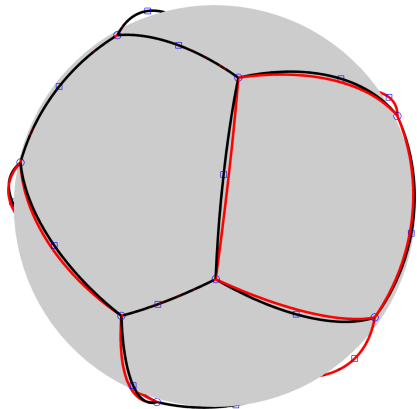
Les frontières ne sont pas tous des géodésiques

# Comparaison Cox Flikkema - cas sphérique ?

- coût relaxé - pas assez précis
- extraire la structure polyédrale : points triples, arêtes, faces
- courbure géodésique constante  $\rightarrow$  arcs de cercles
- calcul aire - Gauss-Bonnet
- traitement des contraintes

$$G_\varepsilon((\omega_i)) = \sum_{i=1}^n \text{Per}(\omega_i) + \frac{1}{\varepsilon} \sum_{i=1}^{n-1} \sum_{j=i+1}^n (\text{Aire}(\omega_i) - \text{Aire}(\omega_j))^2.$$

# Deux exemples, $n = 9, 20$

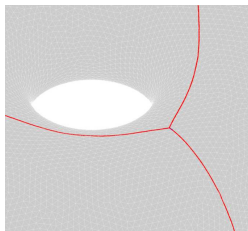
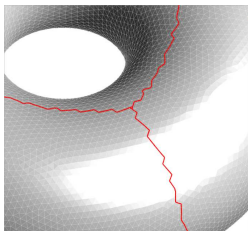
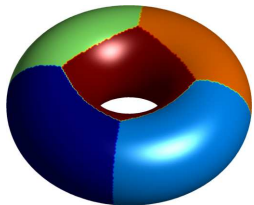




- Même résultats que Cox-Flikkema
- pas besoin de chercher la configuration polyédrale
- une seule optimisation pour  $n \in [3, 24] \cup \{32\}$ .
- plusieurs tests pour  $n \in [25, 31]$

# Calcul explicite - autres surfaces

- extraire les contours :  $\omega_i \rightarrow u_i > \max_{j \neq i} u_j$
- optimisation sur le maillage



# Quantités spectrales

$(\omega_i)$  partition d'une surface  $S$

$$\min \lambda_1(\omega_1) + \dots + \lambda_1(\omega_n)$$

- Elliott-Ranner (2014) -  $n \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 16, 32\}$

$$\min_{\|u_i\|=1} \sum_{i=1}^n \int_S |\nabla u_i|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} u_i^2 u_j^2.$$

- B. (2015) -  $n \leq 32$  solutions fondamentales

# Optimisation spectrale

$(\omega_i)$  partition d'une surface  $S$

$$\min \lambda_1(\omega_1) + \dots + \lambda_1(\omega_n)$$

- Elliott-Ranner (2014) -  $n \in \{3, 4, 5, 6, 7, 8, 16, 32\}$

$$\min_{\|u_i\|=1} \sum_{i=1}^n \int_S |\nabla u_i|^2 + \frac{1}{\varepsilon^2} \sum_{1 \leq i < j \leq n} u_i^2 u_j^2.$$

- B. (2015) -  $n \leq 32$  solutions fondamentales

Configuration asymptotique  $n$  grand ?

Sphère - 12 pentagones + hexagones ( $S + F = A + 2$ )

$$\min \lambda_1(\omega_1) + \dots + \lambda_1(\omega_n)$$

2D - approche Bourdin, Bucur, Oudet

$$-\Delta u + C(1 - \varphi)u = \lambda u, \quad C \gg 1, \varphi \approx \chi_\omega$$

différences finies :  $(A + C(1 - \text{diag}(\varphi)))u = \lambda u$

éléments finis :  $(K + C(1 - \text{diag}(\varphi)))u = \lambda Mu.$

# Exemples - la sphère

- 5000 points - OK -  $n \leq 10$  - quelques heures  
 $n = 32$  - 3 jours ...
- 10000 points - matrices  $10000 \times 10000$  - quelques min  
par calcul de vp - 1h par iteration pour  $n = 32$

possibilité d'amélioration ?

$$\min_i \max \lambda_1(\omega_i).$$

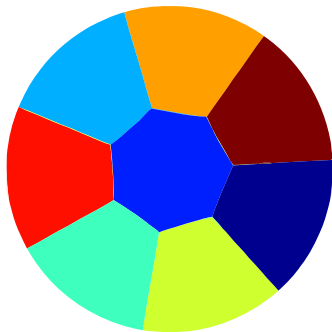
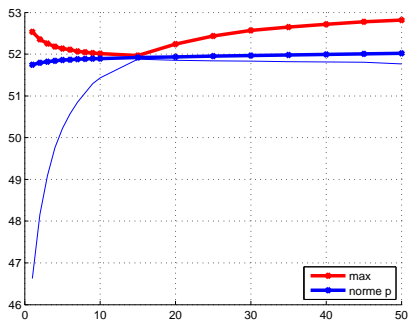
Fonctionnelle non-différentiable...

$$\min \left( \frac{\lambda_1(\omega_1)^p + \dots + \lambda_1(\omega_n)^p}{n} \right)^{1/p}$$

pour  $p$  grand.



# Premiers résultats



$C = 10000$ ,  $480 \times 480$ ,  $p = 1, 2, \dots, 50$

Meilleure valeur pour le max -  $n = 8 \rightarrow 51.96$

# Le paramètre de pénalisation

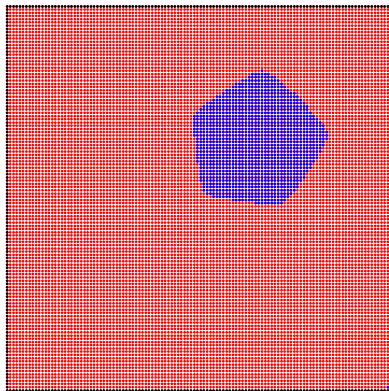
BBO - vp relaxée approche vp exacte quand  $C \rightarrow \infty$

$$\text{BV} - \frac{|\lambda_k(\omega) - \lambda_k(C)|}{\lambda_k(\omega)} = O(C^{-1/(d+4)}).$$

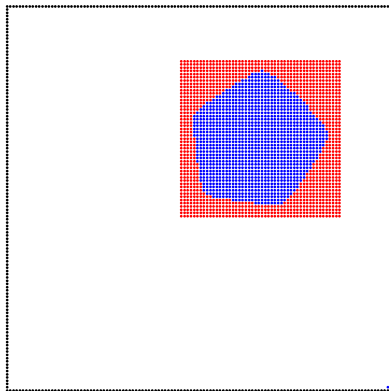
$\Rightarrow C$  doit être grand

$C > 10000$  pas possible -  $480 \times 480$

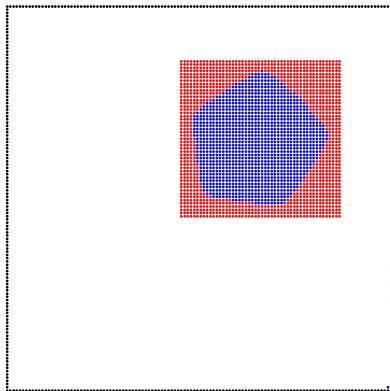
# Grille de calcul



# Grille de calcul

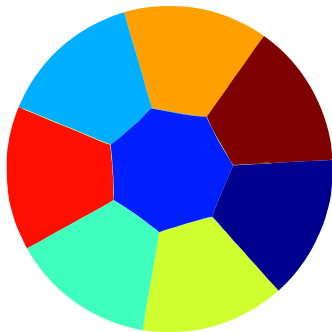
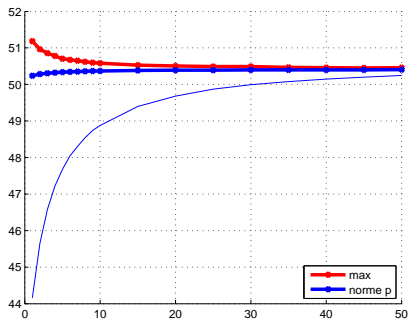


# Grille de calcul



- gradient zéro loin de la cellule

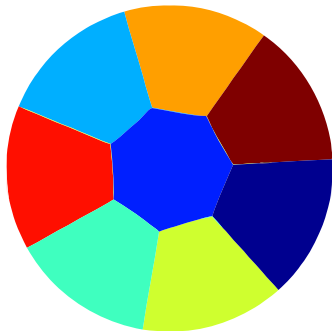
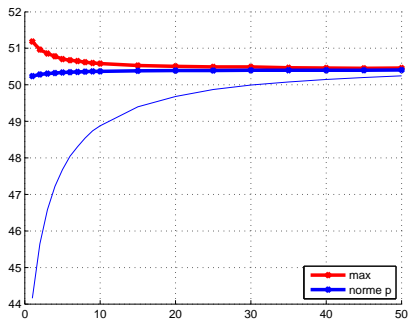
# Nouveaux résultats



$C = 200000$ ,  $480 \times 480$ ,  $p = 1, 2, \dots, 50$

Meilleure valeur pour le max -  $n = 8 \rightarrow 50.45$

# Nouveaux résultats



$C = 200000$ ,  $480 \times 480$ ,  $p = 1, 2, \dots, 50$

Meilleure valeur pour le max -  $n = 8 \rightarrow 50.45$  (avant 51.96)

- taille de la matrice de calcul divisée par  $n$



- taille de la matrice de calcul divisée par  $n$
- gain énorme en temps de calcul

- taille de la matrice de calcul divisée par  $n$
- gain énorme en temps de calcul

Nouvel algorithme :

- taille de la matrice de calcul divisée par  $n$
- gain énorme en temps de calcul

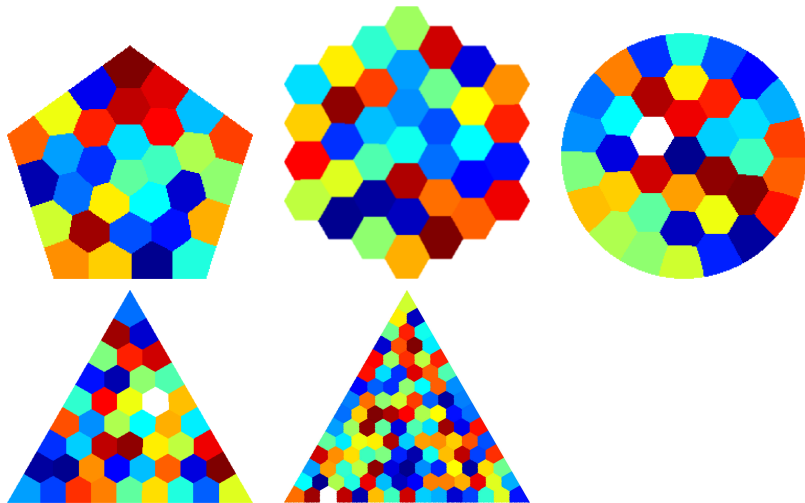
Nouvel algorithme :

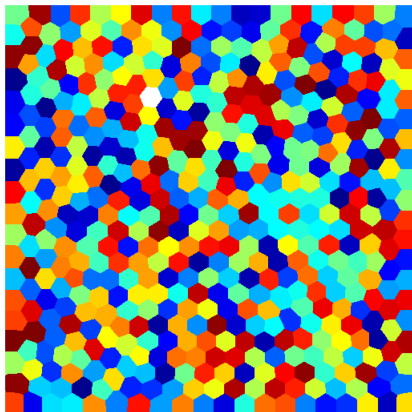
- faire émerger les cellules - discrétisation faible

- taille de la matrice de calcul divisée par  $n$
- gain énorme en temps de calcul

Nouvel algorithme :

- faire émerger les cellules - discrétisation faible
- interpoler et continuer les calculs sur une grille plus fine

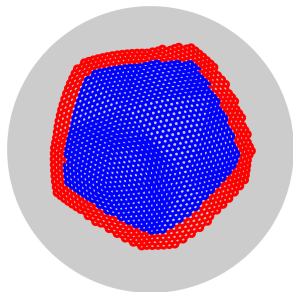




- BBO - Texas Advanced Computing Center
- avec le nouvel algo - un ordi personnel suffit

# Adapter l'algorithme sur les surfaces ?

- même principe : résoudre le problème sur un voisinage de la cellule
- trouver les nœuds qui sont proche du domaine



bleu -  $u > 0.1$

rouge - voisinage de la frontière

# La sphère

- Discrétisation 10000, 40000 points - pas envisageable au départ...



# La sphère

- Discrétisation 10000, 40000 points - pas envisageable au départ...
- Calculs pour  $n = 48, 60, 72, 80, 90, 100, 110, 120, 130$

# La sphère

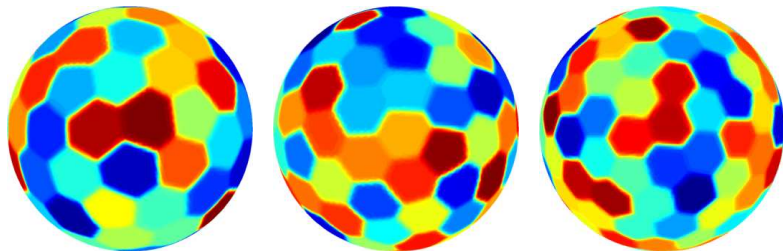
- Discrétisation 10000, 40000 points - pas envisageable au départ...
- Calculs pour  $n = 48, 60, 72, 80, 90, 100, 110, 120, 130$
- 12 pentagones +  $n - 12$  hexagones

# La sphère

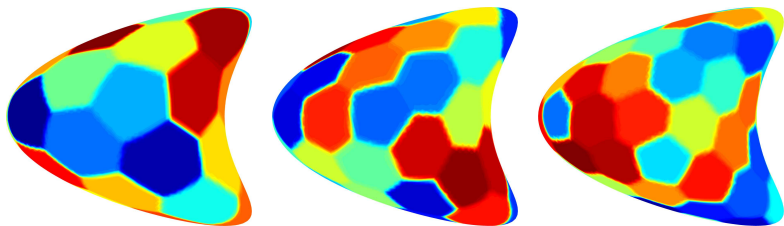
- Discrétisation 10000, 40000 points - pas envisageable au départ...
- Calculs pour  $n = 48, 60, 72, 80, 90, 100, 110, 120, 130$
- 12 pentagones +  $n - 12$  hexagones
- $n = 2, \dots, 32$  - mêmes configurations que pour le périmètre

# La sphère

- Discrétisation 10000, 40000 points - pas envisageable au départ...
- Calculs pour  $n = 48, 60, 72, 80, 90, 100, 110, 120, 130$
- 12 pentagones +  $n - 12$  hexagones
- $n = 2, \dots, 32$  - mêmes configurations que pour le périmètre

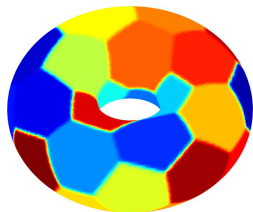


# Autres surfaces

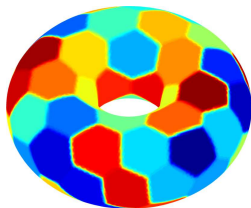


- 12 pentagones et  $n - 12$  hexagones
- pentagones - courbure large

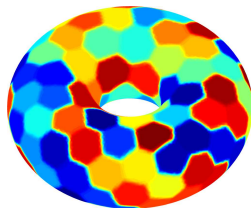
# Autres surfaces



8 pentagones  
18 hexagones  
4 heptagones  
2 octogones



11 pentagones  
42 hexagones  
11 heptagones



14 pentagones  
100 hexagones  
14 heptagones

# La suite...

- comportement asymptotique - périmètre ?
- projection  $\longrightarrow$  multiplicateurs de Lagrange
- stockage des données - économiser le RAM

Merci !