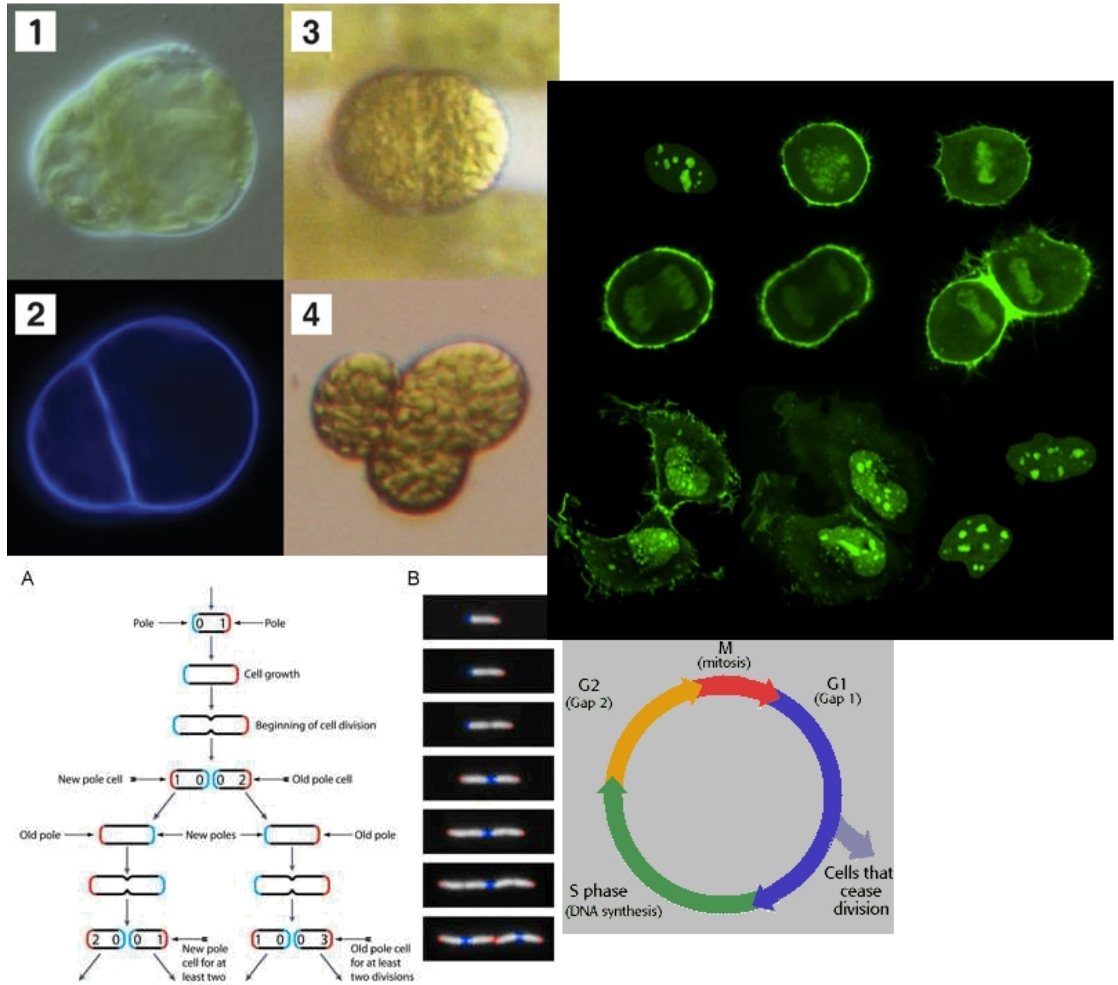
Equations de renouvellement et de division cellulaire



Michel Philippe, ICJ Université Lyon 1 - ECL 6/9/12

Discret Temps-Espace (Chaînes de Markov)

Continu Temps Discret Espace

(Equations Diff. Ord.)

Continu Temps-Espace

(Equations Dérivées Part.)

Discret Temps-Espace (Chaînes de Markov)

Continu Temps Discret Espace

(Equations Diff. Ord.)

Continu Temps-Espace

(Equations Dérivées Part.)

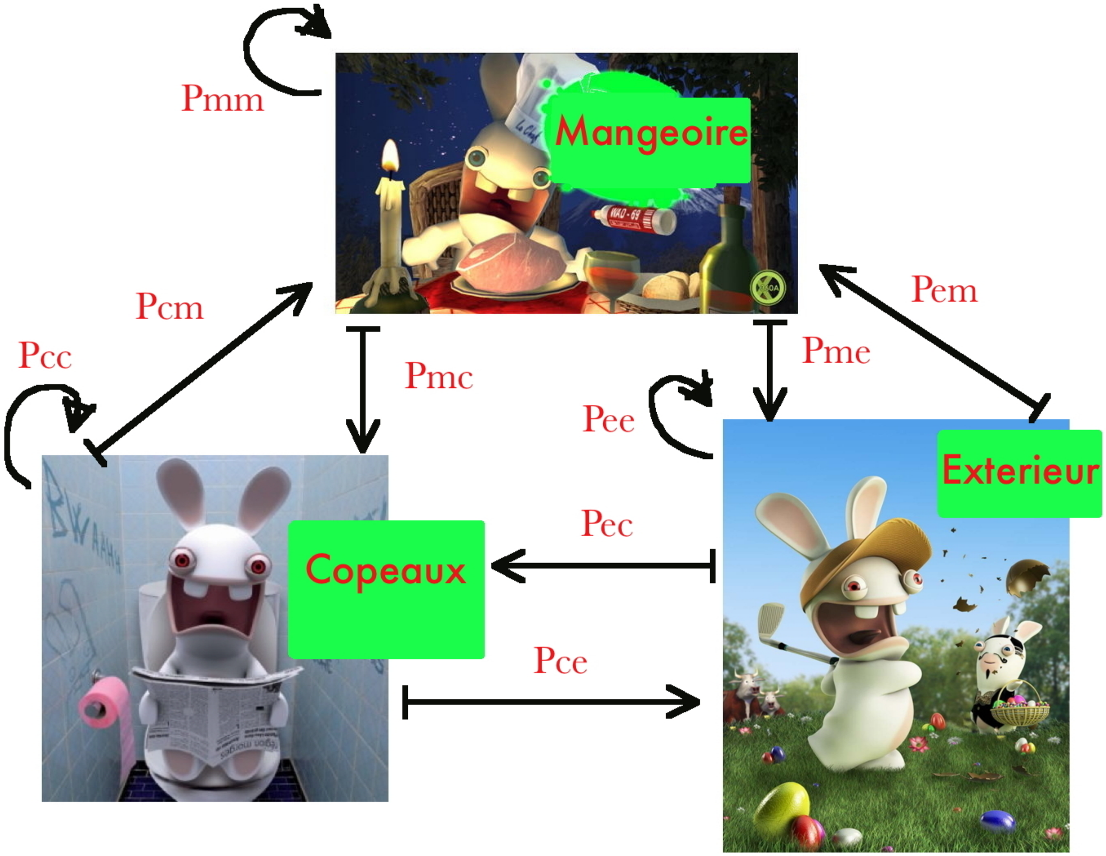
MODELISATION & ANALYSE

Equation de Fragmentation
Renouvellement Cellulaire

Entropie Relative
Valeurs/Vecteurs propres

I - Chaînes de Markov : Temps - Espace Discrets

Un début à tout : le déplacement du lapin



I - Chaînes de Markov : Temps - Espace Discrets

Un début à tout : le déplacement du lapin

Au temps n : $\Pi_n^m =$ Proba. Lapin soit dans la Mangeoire
Au temps n : $\Pi_n^c =$ Proba. Lapin soit dans les Copeaux
Au temps n : $\Pi_n^e =$ Proba. Lapin soit dehors

I - Chaînes de Markov : Temps - Espace Discrets

Un début à tout : le déplacement du lapin

Au temps n : Π_n^m = Proba. Lapin soit dans la Mangeoire
Au temps n : Π_n^c = Proba. Lapin soit dans les Copeaux
Au temps n : Π_n^e = Proba. Lapin soit dehors

Sous l'hypothèse :
Le Lapin est crétin et ne se souvient pas des temps $< n-1$

Alors (formule des probabilité totale) :

$$(\Pi_n^m \; \Pi_n^c \; \Pi_n^e) = (\Pi_{n-1}^m \; \Pi_{n-1}^c \; \Pi_{n-1}^e)Q$$

I - Chaînes de Markov : Temps - Espace Discrets

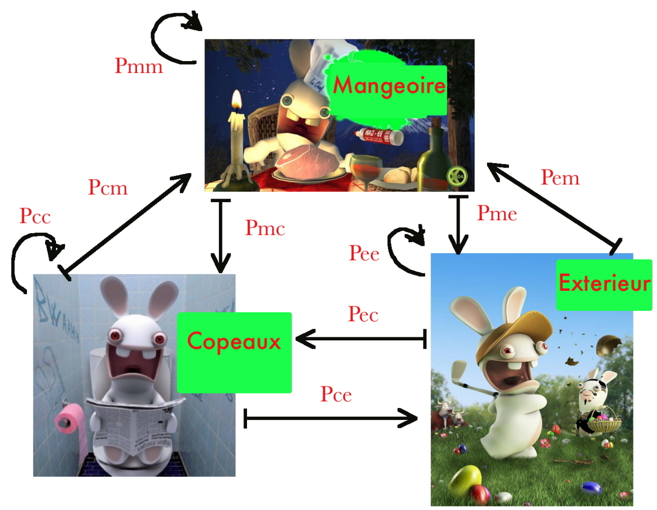
Un début à tout : le déplacement du lapin

Alors (formule des probabilité totale) :

$$(\Pi_n^m \ \Pi_n^c \ \Pi_n^e) = (\Pi_{n-1}^m \ \Pi_{n-1}^c \ \Pi_{n-1}^e)Q$$

Avec

$$Q = \begin{pmatrix} P_{mm} & P_{cm} & P_{em} \\ P_{mc} & P_{cc} & P_{ec} \\ P_{me} & P_{ce} & P_{ee} \end{pmatrix}$$



I - Chaînes de Markov : Temps - Espace Discrets

Un début à tout : le déplacement du lapin

Sous l'hypothèse (pas optimale du tout) :

$$Q > 0,\ i.e.\ P_{ij} > 0 \quad \forall i, j \in \{e, c, m\},$$

impliquant *irréductibilité et apèriodicité*, on a

Théorème 0.1 *Sous les hypothèses précédentes :*
1) Il existe un unique $(\Pi^m\ \Pi^c\ \Pi^e)$ *positif non nul tel que* $\Pi^m + \Pi^c + \Pi^e = 1$ *et* $(\Pi^m\ \Pi^c\ \Pi^e) = (\Pi^m\ \Pi^c\ \Pi^e)Q$
(Valeur/Vecteur propre - Th. Perron-Frobenius)

2) $\lim_{n\to\infty}(\Pi^m_n\ \Pi^c_n\ \Pi^e_n) = (\Pi^m\ \Pi^c\ \Pi^e)$

I - Chaînes de Markov : Temps - Espace Discrets

Un début à tout : le déplacement du lapin

Hypothèses sur les proba. de transitions (on mélange "bien" les états)

$$\Downarrow$$

Comprendre la dynamique de la Chaîne de Markov

II - EDO : Temps continu - Espace Discrets

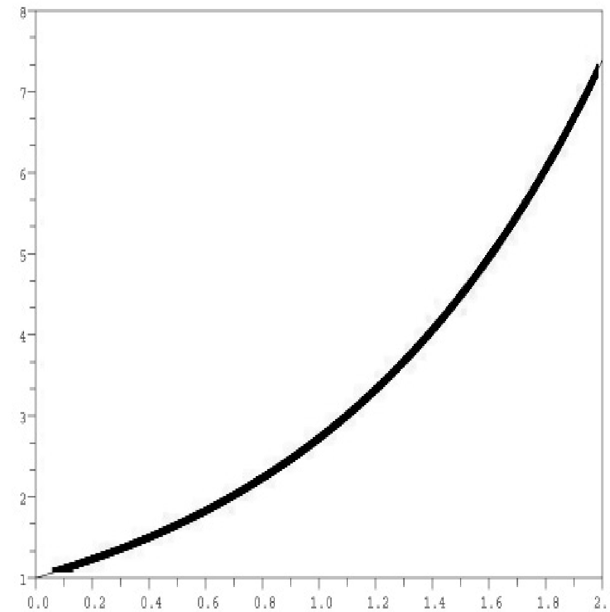
Suite : Modélisation Malthusienne

Population totale au temps t : $N(t)$

Mort avec un taux $d = 0,9\%$

Taux de naissance $b = 1,3\%$

$N'(t) = bN(t) - dN(t)$



$$\boxed{N(t) = N(0)e^{(b-d)t}}$$

II - EDO : Temps continu - Espace Discrets

Les limites du modèle liées aux hypothèses !

I - *Croissance exponentielle* : Ressources limite la croissance

II - *Décroissance exponentielle* : La population devrait s'éteindre en temps fini

III - Il y a croissance exponentielle de la population, quelque soit la population de départ...

II - EDO : Temps continu - Espace Discrets

Il y a croissance exponentielle de la population, quelque soit la population de départ.

Population Représentative :

- Jeunes

- Adultes (en âge de se reproduire)

Le taux de naissance est plus élevé et le taux de mortalité plus faible.

II - EDO : Temps continu - Espace Discrets

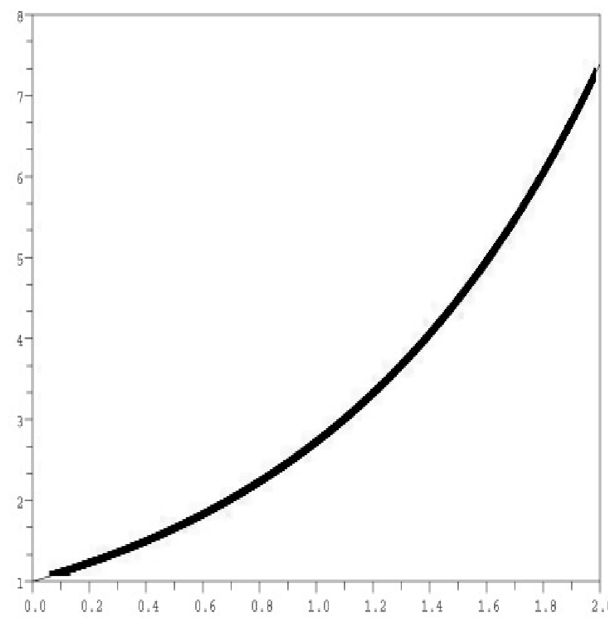
Il y a croissance exponentielle de la population, quelque soit la population de départ.

Population Représentative :

- Jeunes

- Adultes (en âge de se reproduire)

Le taux de naissance est plus élevé et le taux de mortalité plus faible.



II - EDO : Temps continu - Espace Discrets

Il y a croissance exponentielle de la population, quelque soit la population de départ.

Population d'un centre de Gériatrie :

- Vieux

- Très vieux

Le taux de naissance est nul et le taux de mortalité plus élevé.

II - EDO : Temps continu - Espace Discrets

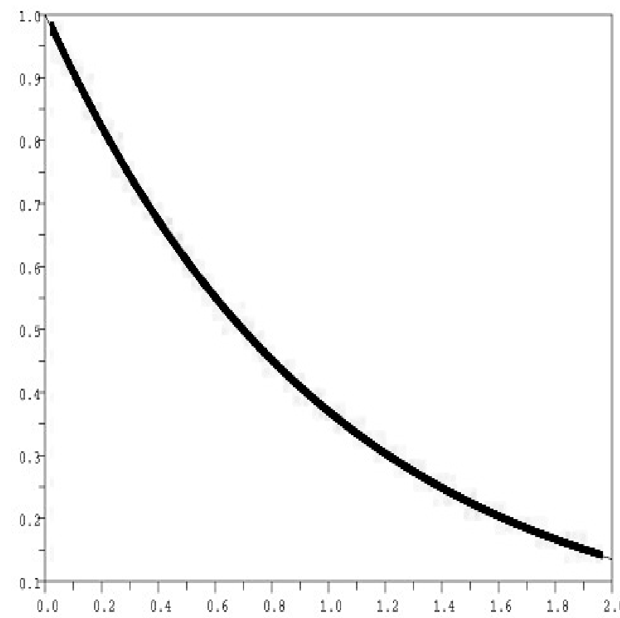
~~Il y a croissance exponentielle de la population, quelque soit la population de départ.~~

Population d'un centre de Gériatrie :

- Vieux

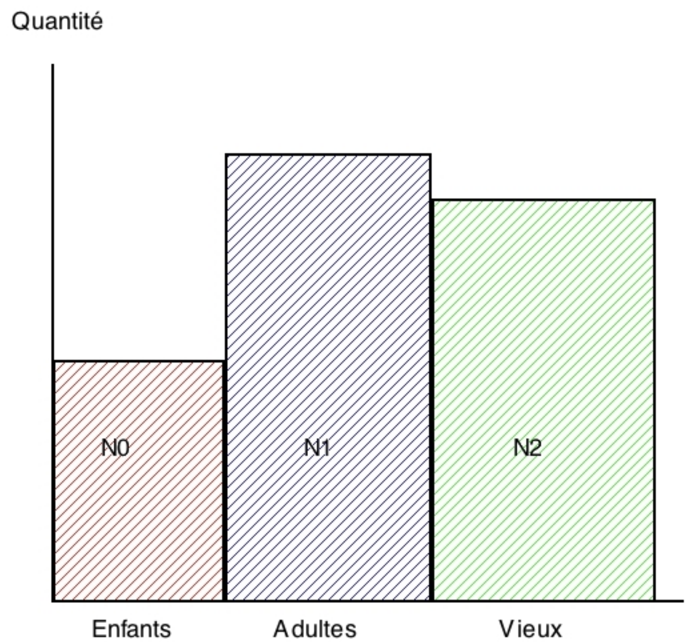
- Très vieux

Le taux de naissance est nul et le taux de mortalité plus élevé.



II - EDO : Temps continu - Espace Discrets

Il faut prendre en compte l'âge de la population.



$$N_0(t) = \text{Nombre d'individus d'âge} \subset [0, a_0],$$
$$N_1(t) = \text{Nombre d'individus d'âge} \subset [a_0, a_1],$$
$$N_2(t) = \text{Nombre d'individus d'âge} \subset [a_1, \infty[$$

II - EDO : Temps continu - Espace Discrets

$\mathcal{DANS\ LES\ CHOUX}$...

$$N_0'(t) = bN_1(t) - t_{0\mapsto 1}N_0(t) - d_0N_0(t)$$

où b est le taux de natalité chez l'adulte,

d_0 le taux de mortalité chez l'enfant,

$t_{0\mapsto 1}$ le taux de passage de "Enfant" vers "Adulte".

II - EDO : Temps continu - Espace Discrets

$\mathcal{GRANDS}\ \mathcal{ENFANTS}$...

$$N_1'(t) = t_{0\longmapsto 1}N_0(t) - t_{1\longmapsto 2}N_1(t) - d_1 N_1(t)$$

$t_{0\longmapsto 1}$ le taux de passage de "Enfant" vers "Adulte",

d_1 le taux de mortalité chez l'adulte,

$t_{1\longmapsto 2}$ le taux de passage de "Adulte" vers "Vieux".

II - EDO : Temps continu - Espace Discrets

...

$$N_2'(t) = t_{1\mapsto 2}N_1(t) - d_2N_2(t)$$

d_2 le taux de mortalité chez l'adulte,

$t_{1\mapsto 2}$ le taux de passage de "Adulte" vers "Vieux".

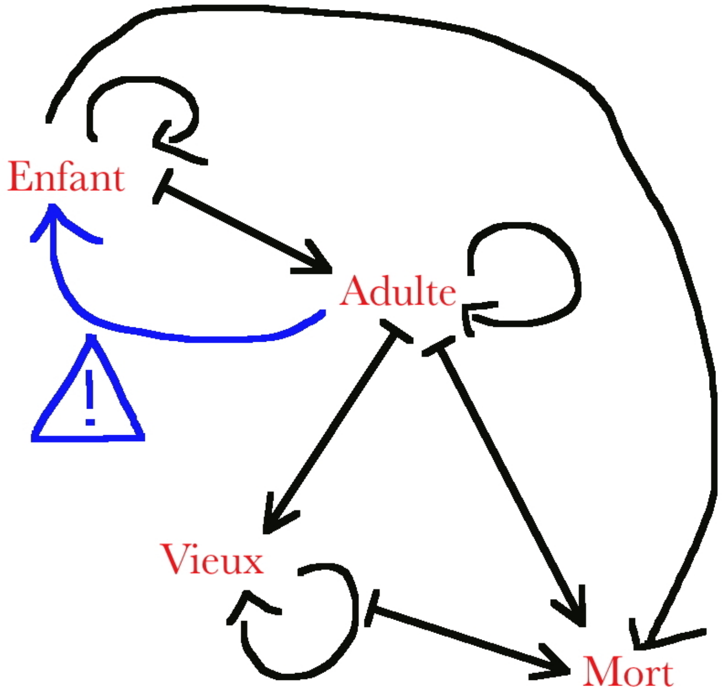
II - EDO : Temps continu - Espace Discrets

On parle alors de population **STRUCTUREE** en âge : on classe les individus par catégorie d'âge.

$$\boxed{\begin{pmatrix} N_0 \\ N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} -d_0 - t_{01} & b & 0 \\ t_{01} & -d_1 - t_{12} & 0 \\ 0 & t_{12} & -d_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_0 \\ N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}}$$

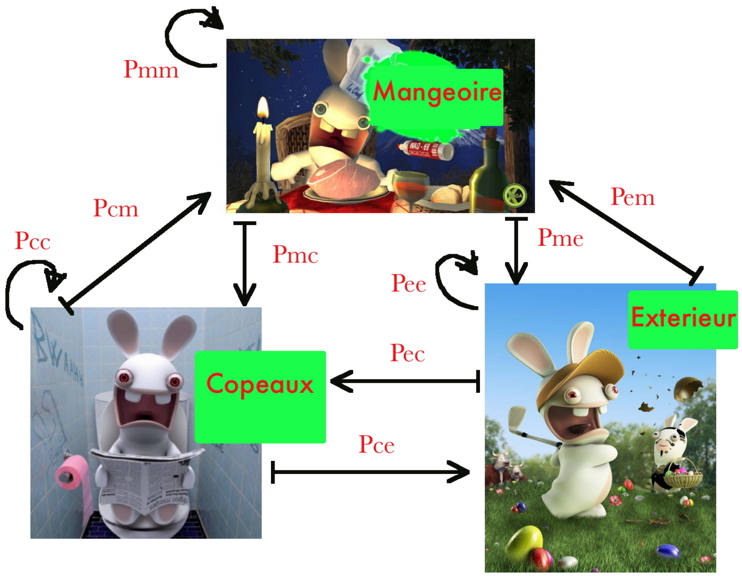
On obtient un **système d'EDO linéaires**.

II - EDO : Temps continu - Espace Discrets



$$\begin{pmatrix} N_0 \\ N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}' = Q \begin{pmatrix} N_0 \\ N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}$$

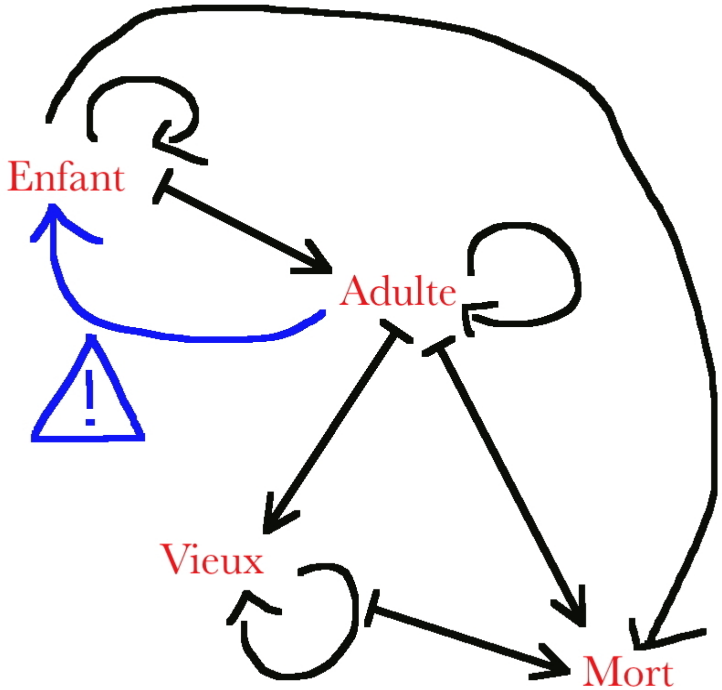
II - EDO : Temps continu - Espace Discrets



$$(\Pi_n^m \; \Pi_n^c \; \Pi_n^e) = (\Pi_{n-1}^m \; \Pi_{n-1}^c \; \Pi_{n-1}^e)Q$$

$$\Pi_n^m + \Pi_n^c + \Pi_n^e = 1$$

II - EDO : Temps continu - Espace Discrets



$$\begin{pmatrix} N_0 \\ N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}' = Q \begin{pmatrix} N_0 \\ N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}$$

$$N_0 + N_1 + N_2 \neq Constante$$

Proposition 0.2 *Si la matrice Q est diagonalisable, alors il existe une base X_i de vecteurs propres (de vap. λ_i) et pour N solution de*

$$N'(t) = AN(t),$$

(avec $N(0) = \sum_i a_i X_i$) on a

$$N(t) = \sum_i a_i e^{\lambda_i t} X_i.$$

⌈ Il suffit de vérifier que $N' = AN$:

$$N'(t) = \sum_i a_i \underbrace{\lambda_i e^{\lambda_i t} X_i}_{AX_i = \lambda_i X_i} = \sum_i a_i e^{\lambda_i t} AX_i = AN(t).\rfloor$$

II - EDO : Temps continu - Espace Discrets

Si

$$N(t) = \sum_i a_i e^{\lambda_i t} X_i.$$

La valeur propre de partie réelle maximale $\Lambda = \lambda_{i_0}$ donne le comportement dominant de la dynamique :

$$N(t) e^{-\Lambda t} \to_{t \to \infty} a_{i_0} X_{i_0}.$$

On a le <u>taux de croissance exponentiel (Malthusien)</u> : Λ.

On a le <u>profil asymptotique</u> : $a_{i_0} X_{i_0}$.

II - EDO : Temps continu - Espace Discrets

Théorème 0.3 *(Théorème de Perron-Frobenius)*
Si Q est une matrice carrée **positive et irréductible** *alors*

- le rayon spectral de Q est une valeur propre simple > 0 de Q,
- Il n'existe pas d'autre valeur propre de module égal à $\rho(Q)$,
- Il existe un vecteur propre > 0 associé à la valeur propre $\rho(Q)$ pour la matrice ${}^tQ$.

Le comportement dominant de $N' = QN$ est donné par $\Lambda = \rho(Q)$!!!

II - EDO : Temps continu - Espace Discrets

Définition 0.4 *Une matrice carrée* $Q = (q_{i,j})$ *de* $\mathbb{R}^p$ *est dite* **positive** *(resp.* **strictement positive***) si pour tout* $i, j \in [1, p]$, $q_{i,j} \geq 0$ *(resp.* > 0*) et on note* $Q \geq 0$ *(resp.* > 0*).*

Définition 0.5 *Une matrice* $Q \geq 0$ *est* **irréductible** *ssi son* **graphe** $G(Q)$ **est fortement connecté** *(il y a un mélange suffisant des états)*

II - EDO : Temps continu - Espace Discrets

$$\boxed{N'(t) = QN(t),}$$

Théorème 0.6 *(Entropie)*
Si Q est une matrice carrée **positive et irréductible** *alors*

$$\boxed{N(t)e^{-\rho(Q)t} \to CX,}$$

avec

$$\boxed{X, \Psi > 0, \quad QX = \rho(Q)X \quad et \quad {}^tQ\Psi = \rho(Q)\Psi,}$$

et $C = \sum_i N_i(t=0)\Psi_i / \sum_i X_i \Psi_i$.

$$N(t) \sim_{t\to\infty} CXe^{\rho(Q)t}$$

III - EDP : Temps - Espace continus

De Leslie-Usher vers un modèle de renouvellement de population

$$\frac{d}{dt}n = Qn,$$

avec

$$Q = \begin{pmatrix} f_1\delta a - s_1/\delta t & f_2\delta a & f_3\delta a & \dots & f_k\delta a \\ s_1/\delta t & -s_2/\delta t - d_2 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & s_2/\delta t & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \ddots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & s_{k-1}/\delta t & -d_k \end{pmatrix}$$

s_i sont les "taux" de transition d'une classe d'âge à l'autre,
f_i les "taux" de naissance,
d_i les "tau"x de mort.

III - EDP : Temps - Espace continus

Soit en discrétisant en temps

$$n(i\delta a, t+\delta t) \sim n(i\delta a, t) + \\ \delta t\big[\frac{s_{i-1}}{\delta t} n((i-1)\delta a, t) - \frac{s_i}{\delta t} n(i\delta, t) - d_i n(i\delta a, t)\big],$$

avec pour condition au bord (renouvellement) :

$$n(0, t+dt) = \sum_i f_i \delta a n(i\delta a, t),$$

$$\frac{n(i\delta a, t+\delta t) - n(i\delta a, t)}{\delta t} \sim s_{i-1}\frac{\delta a}{\delta t}\frac{n((i-1)\delta a, t) - n(i\delta a, t)}{\delta a} \\ - [d_i + \frac{(s_{i-1} - s_i)}{\delta t}] n(i\delta a, t).$$

III - EDP : Temps - Espace continus

$$\frac{n(i\delta a, t+\delta t) - n(i\delta a, t)}{\delta t} \sim s_{i-1}\frac{\delta a}{\delta t}\frac{n((i-1)\delta a, t) - n(i\delta a, t)}{\delta a}$$
$$- [d_i + \frac{(s_{i-1} - s_i)}{\delta t}]n(i\delta a, t).$$

$$n(0, t+dt) = \sum_i f_i \delta a n(i\delta a, t),$$

En passant à la limite $\delta a = \delta t \to 0$, on trouve :

$$\frac{\partial}{\partial t}n + \frac{\partial}{\partial a}sn = -dn,$$

$$n(0,t) = \int f(a)n(a,t)da.$$

III - EDP : Temps - Espace continus

$$\frac{\partial}{\partial t}n + \frac{\partial}{\partial a}sn = -dn,$$
$$n(0,t) = \int f(a)n(a,t)da.$$

Taux constants : $f(t,a) = F, \quad s(t,a) = S, \quad d(t,a) = D$, on a

$$\frac{\partial}{\partial t}n + S\frac{\partial}{\partial a}n = -Dn, \quad n(0,t) = F\int_0^\infty n(a,t)da.$$

Proposition 0.7 *On a* $\rho(t) := \int_0^\infty n(a,t)da,$

$$\frac{d}{dt}\rho(t) = (SF - D)\rho(t) \quad et \quad \lim_{t\to\infty} n(a,t)e^{-(SF-D)t} = \rho(0)e^{-Fa}$$

III - EDP : Temps - Espace continus

$$\frac{\partial}{\partial t}n + S\frac{\partial}{\partial a}n = -Dn, \quad n(0,t) = F\int_0^\infty n(a,t)da = F\rho(t).$$

$$\text{INT.} \quad \int_0^\infty \frac{\partial}{\partial t}nda + S\int_0^\infty \frac{\partial}{\partial a}nda = -D\int_0^\infty nda,$$

$$\frac{d}{dt}\rho(t) + S[n(\infty,t) - n(0,t)] = -D\rho(t),$$

$$\frac{d}{dt}\rho(t) + S[0 - F\rho(t)] = -D\rho(t),$$

DONC

$$\rho(t) = \rho(0)e^{(SF-D)t},$$

III - EDP : Temps - Espace continus

Taux constants : $f(t,a) = F, \quad s(t,a) = S, \quad d(t,a) = D$, on a

$$\frac{\partial}{\partial t} n + S \frac{\partial}{\partial a} n = -Dn, \quad n(0,t) = F \int_0^\infty n(a,t) da.$$

$$m_t(a) = n(aS, t{+}a), \quad \frac{d}{da} m_t(a) = S(\frac{\partial}{\partial a} n)(aS, t{+}a) + (\frac{\partial}{\partial t} n)(aS, t{+}a)$$

III - EDP : Temps - Espace continus

Taux constants : $f(t,a) = F, \quad s(t,a) = S, \quad d(t,a) = D$, on a

$$\frac{\partial}{\partial t}n + S\frac{\partial}{\partial a}n = -Dn, \quad n(0,t) = F\int_0^\infty n(a,t)da.$$

$$m_t(a) = n(aS, t+a), \quad \frac{d}{da}m_t(a) = -Dn(aS, t+a) = -Dm_t(a)$$

On intègre

$$m_t(a) = m_t(0)e^{-Da}$$

III - EDP : Temps - Espace continus

Taux constants : $f(t,a) = F, \quad s(t,a) = S, \quad d(t,a) = D$, on a

$$\frac{\partial}{\partial t}n + S\frac{\partial}{\partial a}n = -Dn, \quad n(0,t) = F\int_0^\infty n(a,t)da.$$

$$m_t(a) = n(aS, t+a), \quad m_t(a) = m_t(0)e^{-Da},$$

$$n(aS, t+a) = n(0, t+0)e^{-Da} = e^{-Da}F\rho(t)$$
$$= Fe^{-Da}\rho(0)e^{(SF-D)t}$$

III - EDP : Temps - Espace continus

Taux constants : $f(t,a) = F, \quad s(t,a) = S, \quad d(t,a) = D$, on a

$$\frac{\partial}{\partial t} n + S \frac{\partial}{\partial a} n = -Dn, \quad n(0,t) = F \int_0^\infty n(a,t)da.$$

$$n(aS, t+a) = Fe^{-Da} \rho(0) e^{(SF-D)t}$$

$$n(A,T) = Fe^{-DA/S} \rho(0) e^{(SF-D)(T-A/S)} = \rho(0) e^{(SF-D)T} e^{-FA}$$

DONC

$$\lim_{T \to \infty} n(A,T) e^{-(SF-D)T} = \rho(0) e^{-FA}$$

III - EDP : Temps - Espace continus

Dans le cas général

$$\frac{\partial}{\partial t} n + \frac{\partial}{\partial a} n = -dn.$$

$$n(0, t) = \int f(a) n(a, t) da.$$

En supposant que le taux de mortalité d et le taux de naissance f satisfont

$$d \in L^1([0, \infty[),$$

$$f \in L^1([0, \infty[),$$

$$\int_0^\infty f(a) e^{-\int_0^a d(w)dw} da > 1,$$

III - EDP : Temps - Espace continus

$$\frac{\partial}{\partial t}n + \frac{\partial}{\partial a}n = -dn.$$
$$n(0,t) = \int f(a)n(a,t)da.$$

? ? ?

$$N'(t) = QN(t),$$

Th. Q ≥ 0 et irréductible
alors

$$N(t)e^{-\rho(Q)t} \rightarrow CX,$$

avec $X, \Psi > 0$,

$$QX = \rho(Q)X \quad et \quad {}^tQ\Psi = \rho(Q)\Psi,$$

et $C = \frac{\sum_i N_i(0)\Psi_i}{\sum_i X_i\Psi_i}$.

III - EDP : Temps - Espace continus

$$\frac{\partial}{\partial t}n = -(\frac{\partial}{\partial a}n - dn) = \text{"}Q_1\text{"}n.$$
$$n(0,t) = \int f(a)n(a,t)da.$$

$$N'(t) = QN(t),$$

???

$$QX = \rho(Q)X,$$
$$(Xe^{-\rho(Q)t})' = Q(Xe^{-\rho(Q)t})$$

III - EDP : Temps - Espace continus

$$\frac{\partial}{\partial t} n = -(\frac{\partial}{\partial a} n - dn) = {}^{"}Q_1{}^{"} n.$$

$$n(0,t) = \int f(a) n(a,t) da.$$

$$N'(t) = QN(t),$$

$$\frac{\partial}{\partial t} X(a) e^{-\rho(Q)t} = -(\frac{\partial}{\partial a}(X(a)e^{-\rho(Q)t}) - d(a)(X(a)e^{-\rho(Q)t}).$$

$$X(0)e^{-\rho(Q)t} = \int f(a) X(a) e^{-\rho(Q)t} da.$$

!!!

$$QX = \rho(Q)X,$$

$$(Xe^{-\rho(Q)t})' = Q(Xe^{-\rho(Q)t})$$

III - EDP : Temps - Espace continus

$$\frac{\partial}{\partial t} n = -(\frac{\partial}{\partial a} n - dn) = {}^{\prime\prime}Q_1{}^{\prime\prime} n.$$
$$n(0,t) = \int f(a) n(a,t) da.$$

$$N'(t) = QN(t),$$

$$-\rho(Q) X(a) = -\frac{d}{da} X(a) - d(a) X(a).$$
$$X(0) = \int f(a) X(a) da.$$

$$X(a) = X(0) e^{\rho(Q)a - \int_0^a d(a')da'},$$
$$X(0) = \int f(a) X(a) da.$$

$$QX = \rho(Q) X,$$

III - EDP : Temps - Espace continus

$$\frac{\partial}{\partial t} n = -(\frac{\partial}{\partial a} n - dn) = "Q_1" n.$$
$$n(0,t) = \int f(a) n(a,t) da.$$

$$N'(t) = QN(t),$$

$$-\rho(Q) X(a) = -\frac{d}{da} X(a) - d(a) X(a).$$
$$X(0) = \int f(a) X(a) da.$$

$$X(a) = C e^{\rho(Q) a - \int_0^a d(a') da'},$$
$$C = X(0) = C \int f(a) e^{\rho(Q) a - \int_0^a d(a') da'} da.$$

III - EDP : Temps - Espace continus

$$\frac{\partial}{\partial t}n = -(\frac{\partial}{\partial a}n - dn) = \text{"}Q_1\text{"}n.$$

$$n(0,t) = \int f(a)n(a,t)da.$$

$$N'(t) = QN(t),$$

$$-\rho(Q)X(a) = -\frac{d}{da}X(a) - d(a)X(a).$$

$$X(0) = \int f(a)X(a)da.$$

$$X(a) = Ce^{\rho(Q)a - \int_0^a d(a')da'},$$

$$1 = \int f(a)e^{\rho(Q)a - \int_0^a d(a')da'}da \rightarrow \rho(Q).$$

III - EDP : Temps - Espace continus

$$\frac{\partial}{\partial t} n + \frac{\partial}{\partial a} n = -dn.$$
$$n(0,t) = \int f(a) n(a,t) da.$$

$$N'(t) = QN(t),$$

? ? ?

$${}^{t}Q\Psi = \rho(Q)\Psi,$$

III - EDP : Temps - Espace continus

$$\frac{\partial}{\partial t}n + \frac{\partial}{\partial a}n = -dn.$$
$$n(0,t) = \int f(a)n(a,t)da.$$

$$N'(t) = QN(t),$$

$$^tQ\Psi = \rho(Q)\Psi,$$

???

$$(\phi, {}^t Q\Psi) = \rho(Q)(\phi, \Psi), \quad \forall\phi$$

$$(Q\phi - \rho(Q)\phi, \Psi) = 0, \quad \forall\phi$$

III - EDP : Temps - Espace continus

$$\frac{\partial}{\partial t}n + \frac{\partial}{\partial a}n = -dn.$$

$$n(0,t) = \int f(a)n(a,t)da.$$

$$N'(t) = QN(t),$$

$$\int_0^\infty [-\rho(Q)\phi(a) - d(a)\phi(a) - \frac{\partial}{\partial a}\phi(a)]\Psi(a)da = 0,$$

$$\forall \phi \ : \ \phi(0) = \int f(a)\phi(a)da.$$

$$(Q\phi - \rho(Q)\phi, \Psi) = 0, \quad \forall \phi$$

III - EDP : Temps - Espace continus

$$\frac{\partial}{\partial t}n + \frac{\partial}{\partial a}n = -dn.$$
$$n(0,t) = \int f(a)n(a,t)da.$$

$$N'(t) = QN(t),$$

$$\int_0^\infty [-\rho(Q)\Psi(a) - d(a)\Psi(a) + \frac{\partial}{\partial a}\Psi(a)]\phi(a)da + \Psi(0)\phi(0) = 0,$$
$$\forall \phi \ : \ \phi(0) = \int f(a)\phi(a)da.$$

$$(Q\phi - \rho(Q)\phi, \Psi) = 0, \quad \forall \phi$$

III - EDP : Temps - Espace continus

$$\frac{\partial}{\partial t}n + \frac{\partial}{\partial a}n = -dn.$$
$$n(0,t) = \int f(a)n(a,t)da.$$

$$N'(t) = QN(t),$$

$$\int_0^\infty [-\rho(Q)\Psi(a) - d(a)\Psi(a) + \frac{\partial}{\partial a}\Psi(a) + f(a)\Psi(0)]\phi(a)da = 0,$$
$$\forall\phi \ : \ \phi(0) = \int f(a)\phi(a)da.$$

$$(Q\phi - \rho(Q)\phi, \Psi) = 0, \quad \forall\phi$$

III - EDP : Temps - Espace continus

$$\frac{\partial}{\partial t}n + \frac{\partial}{\partial a}n = -dn.$$
$$n(0,t) = \int f(a)n(a,t)da.$$

$$N'(t) = QN(t),$$

$$[-d(a)\Psi(a)+\frac{\partial}{\partial a}\Psi(a)+f(a)\Psi(0)] = \rho(Q)\Psi(a),$$

$${}^{t}Q\Psi = \rho(Q)\Psi(a)$$

III - EDP : Temps - Espace continus

Proposition 0.8 *Pour H est positive et convexe, la quantité (entropie relative, energie...)*

$$\mathcal{H}(t) = \int H(n(a,t)e^{-\lambda t}/N(a))N(a)\phi(a)da \text{ est décroissante.}$$

$\mathbf{Q} \geq 0$ **et irréductible** $\quad \rightarrow \quad f > 0$ **sur** $]\alpha, \beta[$

Th. Alors

$$n(a,t)e^{-\rho(Q)t} \rightarrow_{t\rightarrow\infty} CX(a),$$

avec $X, \Psi > 0,$

$$QX = \rho(Q)X \quad et \quad ``{}^tQ\Psi" = \rho(Q)\Psi,$$

et $C = \int n(a,0)\Psi(a)da / \int X(a)\Psi(a)da.$

III - EDP : Temps - Espace continus

Equations de renouvellement et de division cellulaire

$$\frac{\partial}{\partial t}n + \frac{\partial}{\partial a}n = -dn.$$
$$n(0,t) = \int f(a)n(a,t)da.$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial t}n} + \frac{\partial}{\partial a}n = -dn.$$
$$n(0,t) = \int f(a)n(a,t)da.$$

III - EDP : Temps - Espace continus

Equations de renouvellement et de division cellulaire

$$\frac{\partial}{\partial t}n + \frac{\partial}{\partial a}n = -dn.$$
$$n(0,t) = \int f(a)n(a,t)da.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}n + \boxed{\frac{\partial}{\partial a}n} = -dn.$$
$$n(0,t) = \int f(a)n(a,t)da.$$

III - EDP : Temps - Espace continus

Equations de renouvellement et de division cellulaire

$$\frac{\partial}{\partial t}n + \frac{\partial}{\partial a}n = -dn.$$
$$n(0,t) = \int f(a)n(a,t)da.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}n + \frac{\partial}{\partial a}n = \boxed{-dn}.$$
$$n(0,t) = \int f(a)n(a,t)da.$$

III - EDP : Temps - Espace continus

Equations de renouvellement et de division cellulaire

$$\frac{\partial}{\partial t}n + \frac{\partial}{\partial a}n = -dn.$$

$$n(0,t) = \int f(a)n(a,t)da.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}n + \frac{\partial}{\partial a}n = -dn.$$

$$\boxed{n(0,t) = \int f(a)n(a,t)da}.$$

III - EDP : Temps - Espace continus

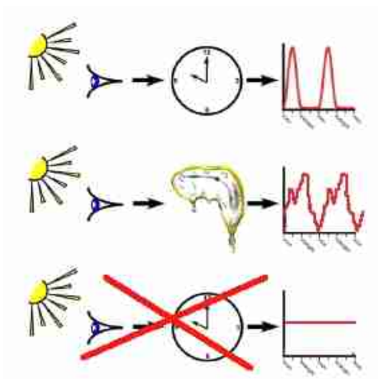
Equations de renouvellement et de division cellulaire

$$\frac{\partial}{\partial t}n + \frac{\partial}{\partial a}n = -dn.$$
$$n(0,t) = \int f(a)n(a,t)da.$$

$$\frac{\partial}{\partial t}n + \frac{\partial}{\partial a}n = -dn.$$
$$\boxed{n(0,t) = \int f(a)n(a,t)da}.$$

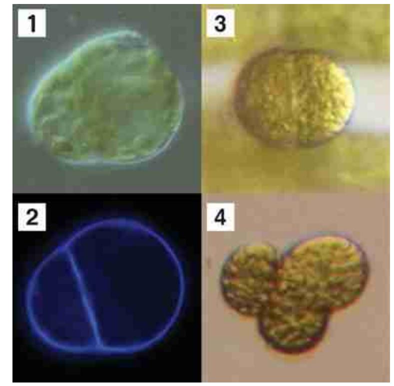
III - EDP : Temps - Espace continus

En âge (âge et maturité)



$$(1)\begin{cases} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} n(t,y)}_{\text{évol temp}} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} n(t,y)}_{\text{vieillissement}} + \underbrace{d(t,y)n(t,y)}_{\text{mort}} = 0, \\ \underbrace{n(t,0) = \int_0^\infty B(t,y')n(t,y')dy',}_{\text{naissance}} \end{cases}$$

En taille

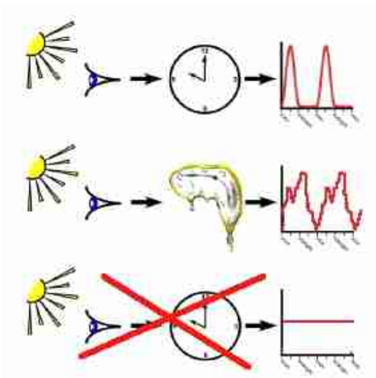


$$\begin{cases} \underbrace{\frac{\partial}{\partial t} n(t,y)} + \underbrace{\frac{\partial}{\partial y} n(t,y)} + \underbrace{B(y)n(t,y)} = \underbrace{\int_y^\infty b(y,y')n(t,y')dy',} \\ \underbrace{n(t,0) = 0} \quad , \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{\partial}{\partial t} n(t,y) + \frac{\partial}{\partial y} n(t,y) + B(y)n(t,y) = \underbrace{4B(2y)n(t,2y)} \\ n(t,0) = 0, \end{cases}$$

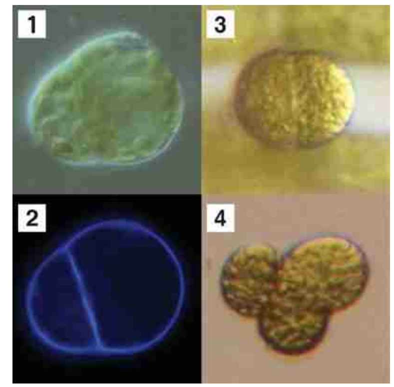
III - EDP : Temps - Espace continus

En âge (âge et maturité)



$$
(1)\begin{cases}
\underbrace{\dfrac{\partial}{\partial t}n(t,y)}_{\text{évol temp}} + \underbrace{\dfrac{\partial}{\partial y}n(t,y)}_{\text{vieillissement}} + \underbrace{d(t,y)n(t,y)}_{\text{mort}} = 0, \\[2ex]
\underbrace{n(t,0) = \displaystyle\int_0^\infty B(t,y')n(t,y')dy',}_{\text{naissance}}
\end{cases}
$$

En taille



$$
\begin{cases}
\underbrace{\dfrac{\partial}{\partial t}n(t,y)}_{\text{évol temp}} + \underbrace{\dfrac{\partial}{\partial y}n(t,y)}_{\text{croissance}} + \underbrace{B(y)n(t,y)}_{\text{'mort' après div}} = \underbrace{\displaystyle\int_y^\infty b(y,y')n(t,y')dy',}_{\text{naiss après div}} \\[2ex]
\underbrace{n(t,0) = 0}_{\text{pas d'individu de taille 0}} \quad ,
\end{cases}
$$

$$
\begin{cases}
\frac{\partial}{\partial t}n(t,y) + \frac{\partial}{\partial y}n(t,y) + B(y)n(t,y) = \underbrace{4B(2y)n(t,2y),}_{\text{naiss après mitose}} \\[2ex]
n(t,0) = 0,
\end{cases}
$$

IV - Convergence CM

$$\Pi_{n+1} = \Pi_n Q$$

et $\Pi = \Pi Q$, $(1) = (1)^t Q$ (Th. Perron Frobenius). On pose

$$\boxed{V_n = \sum_i H(\Pi_n^i / \Pi^i)\Pi^i,} \tag{0.1}$$

On a

$$V_{n+1} = \sum_i H(\Pi_{n+1}^i / \Pi^i)\Pi^i = \sum_i H(\sum_j \Pi_n^j Q_{ji} / \Pi^i)\Pi^i$$

$$= \sum_i H(\sum_j \frac{Q_{ji}\Pi^j}{\sum_k Q_{ki}\Pi^k} \frac{\Pi_n^j}{\Pi^j})\Pi^i = \sum_i H(\sum_j \beta_{ij} r_j^n)\Pi^i, \tag{0.2}$$

où $\beta_{ij} = \frac{Q_{ji}\Pi^j}{\sum_k Q_{ki}\Pi^k}$ et $r_j^n = \frac{\Pi_n^j}{\Pi^j}$.

IV - Convergence CM

$$V_n = \sum_i H(r_i^n)\Pi^i, \Longrightarrow V_{n+1} = \sum_i H(\sum_j \beta_{ij} r_j^n)\Pi^i, \qquad (0.3)$$

où $\beta_{ij} = \frac{Q_{ji}\Pi^j}{\sum_k Q_{ki}\Pi^k}$ et $r_j^n = \frac{\Pi_n^j}{\Pi^j}$.

Lemme 0.9 *Si on suppose que* <u>*H est strictement convexe*</u>*, alors*

$$V_{n+1} \leq V_n.$$

Preuve En effet, $\sum_j \beta_{ij} = 1$ pour tout i et H strictement convexe impliquent $H(\sum_j \beta_{ij} r_j^n) \leq \sum_j \beta_{ij} H(r_j^n)$. Or, $\sum_i \beta_{ij}\Pi^i/\Pi^j = \sum_i Q_{ji} = 1$ puisque Q est une matrice stochastique, donc

$$V_{n+1} = \sum_i H(\sum_j \beta_{ij} r_j^n)\Pi^i \leq \sum_j \underbrace{[\sum_i \beta_{ij}\Pi^i/\Pi^j]}_{=1} H(r_j^n)\Pi^j = V_n.$$

IV - Convergence CM

Définition 0.10 *On note*

$$\mathcal{C}_i = \Big\{ j : Q_{ji} > 0 \Big\} \tag{0.4}$$

ALORS par stricte convexité, si

$$\exists i_0 \; \exists (j', j'') \in \mathcal{C}_{i_0}$$

tel que $r^n_{j'} \neq r^n_{j''}$ on a

$$H(\sum_j \beta_{i_0 j} r^n_j) < \sum_j \beta_{i_0 j} H(r^n_j).$$

et $V_{n+1} < V_n$.

IV - Convergence CM

Définition 0.11 *On note*

$$\mathcal{C}_i = \left\{ j : Q_{ji} > 0 \right\} \tag{0.5}$$

Hyp.

$$\forall i, j \; \exists i_2 ..., i_{n-1} \quad : \quad \mathcal{C}_i \bigcap \mathcal{C}_{i_1}, \quad \mathcal{C}_{i_k} \bigcap \mathcal{C}_{i_{k+1}}, \quad \mathcal{C}_{i_{n-1}} \bigcap \mathcal{C}_j \neq \emptyset.$$

ALORS par stricte convexité, si $\exists (j', j'')$ tel que $r^n_{j'} \neq r^n_{j''}$ on a

$$V_{n+1} < V_n$$

IV - Convergence CM

Définition 0.12 *On note*

$$\mathcal{C}_i = \left\{ j : Q_{ji} > 0 \right\} \tag{0.6}$$

Hyp.

$$\forall i, j \ \exists i_2 ..., i_{n-1} \quad : \quad \mathcal{C}_i \bigcap \mathcal{C}_{i_1}, \quad \mathcal{C}_{i_k} \bigcap \mathcal{C}_{i_{k+1}}, \quad \mathcal{C}_{i_{n-1}} \bigcap \mathcal{C}_j \neq \emptyset.$$

On note que $\forall (j', j'') : r^n_{j'} = r^n_{j''} = R$ implique

$$\Pi_{j'} r^n_{j'} = \Pi^n_{j'} \quad \Rightarrow R = R \sum_{j'} \Pi_{j'} = \sum_{j'} \Pi_{j'} r^n_{j'} = \sum_{j'} \Pi^n_{j'} = 1$$

DONC tant que le vecteur $(r^n_j)_j$ n'est pas égal à (1 1... 1),

$$0 \leq V_{n+1} < V_n$$

IV - Convergence CM

Puisque $0 \leq V_{n+1} \leq V_n$, la suite V_n est convergente, donc

$$V_{n+1} - V_n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 0.$$

et donc

$$r_j^n \rightarrow_{n \rightarrow \infty} 1, \quad \forall j$$

IV - Convergence CM

Puisque $0 \leq V_{n+1} \leq V_n$, la suite V_n est convergente, donc

$$V_{n+1} - V_n \rightarrow_{n\rightarrow\infty} 0.$$

II- Compact) $r^n = (r_j^n)_j$ bornée de $\mathbb{R}^M \Rightarrow \lim_{n\rightarrow\infty} r^{\phi(n)} = r$

III - $V_{\phi(n)} \geq 0$ décroissante donc convergente et
$\lim_{n\rightarrow\infty} V_{\phi(n)} = \sum_j H(r_j)\Pi^j$
$\lim_{n\rightarrow\infty} V_{\phi(n+1)} \leq \sum_i H(\sum_j \beta_{ij} r_j)\Pi^i$

$$\sum_i H(\sum_j \beta_{ij} r_j)\Pi^i = \sum_j H(r_j)\Pi^j \Rightarrow r = (1)$$

$$r_j^{\phi}(n) \rightarrow_{n\rightarrow\infty} 1, \quad \forall j$$

IV - Convergence CM

Puisque $0 \leq V_{n+1} \leq V_n$, la suite V_n est convergente, donc

$$V_{n+1} - V_n \to_{n\to\infty} 0.$$

II- Compact) $r^n = (r_j^n)_j$ bornée de $\mathbb{R}^M \Rightarrow \lim_{n\to\infty} r^{\phi(n)} = r$

III - Diss. Entropie) $V_{n+1} - V_n \to_{n\to\infty} 0$

$$r_j^{\phi(n)} \to_{n\to\infty} 1, \quad \forall j$$

IV - $H : z \mapsto (z-1)^2$. $V_n^2 = \sum_i (\Pi_n^i/\Pi^i - 1)^2 \Pi^i$, décroissante et $V_{\phi(n)}^2 \to_{n\to\infty} 0$ donc $V_n^2 \to_{n\to\infty} 0$ et $\Pi_n^i \to_{n\to\infty} \Pi^i$

IV - Convergence CM

I- Th. Perron Frobenius/Krein Rutman) Il existe Π solution de $\Pi = \Pi Q$ (+problème dual)

II- Compact) $r^n = (r_j^n)_j$ bornée de $\mathbb{R}^M \Rightarrow \lim_{n\to\infty} r^{\phi(n)} = r$

III - Diss. Entropie) $V_{n+1} - V_n \to_{n\to\infty} 0$

$$r_j^{\phi(n)} \to_{n\to\infty} 1, \quad \forall j$$

IV - $H : z \mapsto (z-1)^2$. $V_n^2 = \sum_i (\Pi_n^i/\Pi^i - 1)^2 \Pi^i$, décroissante et $V_{\phi(n)}^2 \to_{n\to\infty} 0$ donc $V_n^2 \to_{n\to\infty} 0$ et $\Pi_n^i \to_{n\to\infty} \Pi^i$