

Changements d'échelles et lien (un exemple de lien) entre modèles probabilistes et déterministes

Caricature : modèles microscopiques (individus-centrés) $\hat{=}$ probabiliste (aléatoire)
macroscopiques (pop. globale) $\hat{=}$ déterministe.

Faux car on peut avoir des modèles macroscopiques aléatoires, etc,
mais il existe quand même des liens entre certains de ces approches.
On va billarder sur des exemples qui rappelleront au passage les notions
vues précédemment.

I Changements d'échelle.

a) Philosophie

Outil très pratique pour saisir le comportement "principal" d'un système.
(et du coup très utilisé aussi).

On a vu le passage d'une marche aléatoire au mouvement brownien

$$X_k = \sum_{i=1}^k Y_i \quad \text{où les } (Y_i)_{i \geq 1} \text{ sont i.i.d.} \\ X_0 = x \quad \mathbb{E}(Y_i) = 0 \quad (\text{ou } = 0)$$

On a posé $X_E^N = \frac{1}{\sqrt{N}} X_{\lfloor NE \rfloor}$ parce qu'on savait par le TCL

$$\text{que } \sqrt{N} \left(\frac{1}{N} X_N \right) \xrightarrow[N \rightarrow \infty]{\text{loi}} \mathcal{N}(0, \text{Var}(Y))$$

et si $\text{Var}(Y) = 1$, on obtient alors mouvement brownien à la limite.

Si on avait posé $X_E^N = \frac{1}{N} X_{\lfloor NE \rfloor}$, la loi des grands nombres
nous dit que la limite aurait été identiquement nulle,

et si en revanche on avait pris $X_E^N = X_{\lfloor NE \rfloor}$, les propriétés des
marches aléatoires (similaires à celles du Brownien) nous disent qu'il
n'y a pas de limite.

Donc le jeu ici consiste à trouver les bonnes échelles de temps et
d'espace pour obtenir un processus (déterministe ou aléatoire)

qui décrit le système souhaité au premier ordre (comportement principal),
 mais surtout que l'on sait analyser plus facilement.

b) Un peu de préparation : les changements d'échelles temporelles

• Processus de sauts

Soit X un processus de sauts, à valeurs dans un espace E et de taux de transition $q(x, y)$, $x \neq y$.
 i.e. : Si $X_t = x$, on attend un temps $\text{Exp}(\sum_{y \neq x} q(x, y))$ et à ce moment X saute en \bar{y} avec proba $\frac{q(x, \bar{y})}{\sum_{y \neq x} q(x, y)}$.

Soit $\alpha > 0$: comment peut-on décrire $X^{(\alpha)} : (X_{\alpha t})_{t \geq 0}$?

Lemme : Soit E une v.a. $\text{Exp}(\theta)$. Alors $\frac{1}{\alpha} E \sim \text{Exp}(\alpha\theta)$.

Preuve : $\mathbb{P}(\frac{1}{\alpha} E > t) = \mathbb{P}(E > \alpha t) = e^{-\theta \alpha t} = \mathbb{P}(\text{Exp}(\alpha\theta) > t) \quad \square$

Supposons que $X_0 = x$. Alors par déf., X saute en une nouvelle valeur après un temps $\text{Exp}(\sum_{y \neq x} q(x, y))$.

$\Rightarrow X^{(\alpha)}$ saute après un temps $\frac{1}{\alpha} \text{Exp}(\sum_{y \neq x} q(x, y)) \sim \text{Exp}(\alpha \sum_{y \neq x} q(x, y))$
 d'après le lemme.

Puis les transitions ne sont pas modifiées par le changement de temps,
 donc $X^{(\alpha)}$ saute en \bar{y} avec proba $\frac{q(x, \bar{y})}{\sum_y q(x, y)} = \frac{\alpha q(x, \bar{y})}{\sum_y \alpha q(x, y)}$.

Comme cette description caractérise $X^{(\alpha)}$, on en déduit que $X^{(\alpha)}$ est un processus de sauts de taux de transition $\alpha q(x, y)$.
 (\Rightarrow "accélérés" si $\alpha > 1$, "ralentis" si $\alpha < 1$)

Générateur : On sait que le générateur d'un processus de sauts est donné par

$$G_X f(x) = \sum_{y \neq x} q(x, y) [f(y) - f(x)], \text{ et donc}$$

$$G_{X^{(\alpha)}} f(x) = \sum_{y \neq x} \alpha q(x, y) [f(y) - f(x)] = \alpha G_X f(x)$$

\Rightarrow la dérivée du semi-groupe est simplement multipliée par α .

• Générateurs, de manière générale.

Si on a un générateur associé à notre processus (pas toujours évident), alors il y a un moyen encore plus simple de voir l'effet d'un changement de temps :

$$\lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}_x[f(X_{\alpha h})] - f(x)}{h} = \alpha \lim_{h \rightarrow 0} \frac{\mathbb{E}_x[f(X_{\alpha h})] - f(x)}{\alpha h} = \alpha G_x f(x).$$

Donc le générateur de $X^{(\alpha)} = (X_{\alpha t})_{t \geq 0}$ est simplement αG_x .

• Semi-groupe : $P_t^{(X^{(\alpha)})} = P_{\alpha t}^{(X)}$!

Beaucoup de trivialisés, mais les choses sont dites.

Les changements ^{à effectuer} se compliquent un peu lorsqu'on modifie la "composante spatiale" x également, mais l'intuition est généralement un bon guide. On verra plein d'exemples dans le chapitre suivant.

II Les processus de branchement dans tous leurs états ...

a) Processus de Galton-Watson

On va partir d'un processus de Galton-Watson à temps continu et ou discret voir ce que différents changements d'échelles donnent.

Soit ξ une v.a. à valeurs entières ! On note $m = \mathbb{E}[\xi]$, en $\sigma^2 = \text{Var}(\xi)$, en supposant que ces quantités existent.

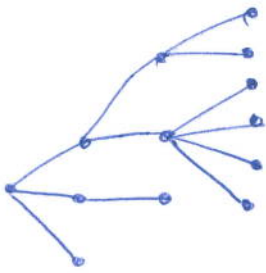
Modèle 1 : On appelle processus de Galton-Watson de loi de reproduction ξ le processus (markovien) $(Z_n)_{n \geq 0}$ décrivant la taille d'une population évoluant de la manière suivante : On part de $Z_0 = z$ individus.

$n \rightarrow n+1$: chaque individu i de la gén. n ^{meurt et laisse} un nombre ξ^i de descendants à la génération $n+1$, où les ξ^i sont iid de même loi que ξ .

Autrement dit, conditionnellement à Z_n ,

$$Z_{n+1} = \sum_{i=1}^{Z_n} \xi_{(n)}^i, \text{ où les } (\xi_{(n)}^i)_{i,m} \text{ sont iid de loi } \xi.$$

En image :



$$z_0 = 1 \quad z_1 = 3 \quad z_2 = 3 \quad z_3 = 6$$

et il se peut que personne ne se reproduise (si $\mathbb{P}(\xi = 0) > 0$) à une certaine génération et l'arbre s'éteint (reste la population constante égale à 0).

Modèle hyperclassique dont on peut citer au passage quelques propriétés :

$$\begin{aligned} \bullet \quad \mathbb{E}[z_{n+1}] &= \mathbb{E}[\mathbb{E}[z_{n+1} | z_n]] \\ &= \mathbb{E}\left[\sum_{i=1}^{z_n} \mathbb{E}[\xi_i]\right] = m \mathbb{E}[z_n] \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{E}[z_n] = m^n$$

Si $m < 1$, $\mathbb{E}[z_n] \rightarrow 0$ et on peut montrer que $(z_n)_{n \geq 0}$ est absorbé en 0 en temps fini (la pop s'éteint) avec proba 1.

Si $m > 1$, $\mathbb{E}[z_n] \rightarrow +\infty$ et on peut montrer^{la dichotomie suivante :} soit z_n touche 0 (avec proba > 0 si $\mathbb{P}(\xi = 0) > 0$), soit $z_n \rightarrow +\infty$ à vitesse m^n .

Pas de comportement intermédiaire.

Si $m = 1$, $\mathbb{E}[z_n] \equiv \mathbb{E}[z_0]$ mais la pop s'éteint en temps fini p.s. Au passage, on obtient ici une martingale.

Au lieu de faire en sorte que tous les individus se reproduisent en même temps, on peut définir une variante (à temps continu).

5

Modèle 2 : Chaque individu se reproduit à taux 1 en étant remplacé par un nombre de nouveaux individus donné par une réalisation indépendante (du reste) de ξ . Si on note $(Y_t)_{t \geq 0}$ ce processus, alors Y est un processus de saut de taux de transition $x \rightarrow x+k-1$ égal à $x \times \mathbb{P}(\xi = k)$

↑
taux total de saut

↑
prob de produire exactement k enfant par la reproduction.

→ Mêmes propriétés d'extinction/croissance que la version 1.

On peut préférer l'un ou l'autre, suivant le contexte biologique et sous différentes conditions. On va considérer ces 2 modèles sous différents changements d'échelles, et voir qu'au 1^{er} ordre ils ont des comportements globaux identiques.

On part de N individus et on fait tendre N vers $+\infty$.

Dorénavant, $m = \mathbb{E}[\xi] < \infty$ et $\sigma^2 = \text{Var}(\xi) < \infty$.

Modèle 1 : Pas de changement de temps.

$X_m^{(N)} = \frac{1}{N} Z_n^{(N)}$ ← Commence avec N individus

$X_0^{(N)} = 1$

$\left\{ \begin{array}{l} \times \frac{1}{N} \text{ pour que la taille de pop.} \\ \text{n'explode pas, au moins au début} \end{array} \right.$

Première transition : $X_1^{(N)} = \frac{1}{N} \sum_{i=1}^N \xi_i^{(N)} \xrightarrow[\text{p.s.}]{N \rightarrow \infty} m = \mathbb{E}[\xi]$

Puis les nombres de descendants \hat{X}_k issus d'un indiv. initial sont i.i.d à la gén. k

d'espérance m^k , donc on "obtient" que

$(X_m^{(N)})_{n \geq 0} \xrightarrow{N \rightarrow \infty} (1, m, m^2, \dots)$

On a complètement gommé l'aspect stochastique en faisant tendre la taille de la pop. vers l'infini. Il ne reste que le comportement en espérance. En particulier, plus d'extinction en temps fini, qui est plutôt une propriété de "petites" populations ($X_0 < \infty$).

Modèle 2 : C'est un processus de sauts, donc pour se faire une idée de la réponse, calculons le générateur de

$$V_t^{(N)} := \frac{1}{N} Y_t^{(N)}, \quad \text{où } Y_0^{(N)} = N. \quad (\text{donc } V_0^{(N)} = 1).$$

$$G_{V^{(N)}}(w) = (Nw) \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(\xi=i) \left(f(w + \frac{i-1}{N}) - f(w) \right)$$

Sup(ξ) borné, $\xrightarrow{\text{par ex}}$
$$(Nw) \sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(\xi=i) \frac{i-1}{N} f'(w) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$= w f'(w) \left(\sum_{i=0}^{\infty} \mathbb{P}(\xi=i) (i-1) \right) + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

$$= (m-1) w f'(w) + \underbrace{\mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)}_{\rightarrow 0}$$

On vérifie facilement que ceci est le générateur du processus déterministe

solution de
$$\begin{cases} \frac{dw}{dt} = (m-1)w \\ w(0) = 1 \end{cases}$$

et donc s'il y a une limite à $(V^{(N)})_{N \rightarrow \infty}$ (et il y en a une), c'est ce processus déterministe.

Au passage, on remarque que $w \rightarrow 0$ si $m < 1$, $w \equiv 1$ si $m = 1$ et $w \rightarrow +\infty$ si $m > 1$.

Mêmes conclusions que pour le modèle 1 : on a une sorte de loi des grands nombres qui gomme l'aspect aléatoire pour ne retenir que la tendance générale.

Rq : On passe du modèle 1 au modèle 2 de la ^{même} manière qu'on passe de la suite $x_{n+1} = m x_n$ à l'équation $\frac{dx}{dt} = m' x$: en prenant des unités de temps $\frac{1}{N}$ plus courtes (= en accélérant le temps par N) et en prenant m_N de sorte que $N(m_N - 1) \xrightarrow{=} m'$, autrement dit $m_N = 1 + \frac{m'}{N}$ (car si $\Delta t = \frac{1}{N}$ et $w_t^{(N)} = x_{[Nt]}$, $\frac{w_{t+\Delta t}^{(N)} - w_t^{(N)}}{\Delta t} = N(m_N - 1) w_t^{(N)}$)

Donc les liens entre les modèles déterministes et entre les modèles aléatoires sont les mêmes. (faire le diagramme)

7

Creusons un peu ce qu'il se passe dans le cas où $m = 1$ pour le modèle 2. Globalement, sur l'échelle de temps initiale la population se maintient au même niveau lorsque $N \gg 1$ (enfin, à la limite surtout !).

Supposons comme dans la remarque précédente que la pop. se maintient à peu près, mais avec une légère tendance :

$$m_N = 1 + \frac{a}{N}, \quad a \in \mathbb{R}.$$

On va rencontrer ce type de système dans des populations quasiment à l'équilibre à notre échelle de temps mais qui ont une durée d'évolution très grande derrière ou devant elle.

Si à nouveau $Y_0^{(N)} = N$, les $\xi_t^{(N)}$ ont un support borné par $K < \infty$,

$$m_N = \mathbb{E}[\xi_t^{(N)}] = 1 + \frac{a}{N}$$

$$\sigma_N^2 = \text{Var}(\xi_t^{(N)}) \quad \text{est borné unif. en } N, \text{ et qu'on pose}$$

$$\text{à nouveau } V_t^{(N)} = \frac{1}{N} Y_t^{(N)}.$$

$$\text{Alors } G_V^{(N)}(v) = \frac{a}{N} v f'(v) + O\left(\frac{1}{N}\right) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} 0 \quad \text{et rien ne change...}$$

Que faut-il faire ? Les incréments sont très faibles, il faut donc en accumuler plein pour voir un changement macroscopique.

On pose donc

$$W_t^{(N)} = \frac{1}{N} Y_{Nt}^{(N)} \quad (\text{de sorte que } W_0^{(N)} = 1 \quad \forall N).$$

Le générateur se trouve multiplié par N , l'erreur aussi et donc il faut faire un développement limité plus précis. On suppose que toutes les dérivées écrites existent.

$$\begin{aligned}
 G_{w_N} f(w) &= N(Nw) \sum_{i=1}^{\infty \leftarrow K} \mathbb{P}(\xi_N = i) \left(f(w + \frac{i-1}{N}) - f(w) \right) \\
 &= N^2 w \sum_{i=1}^K \mathbb{P}(\xi_N = i) \left\{ \frac{i-1}{N} f'(w) + \frac{1}{2} \left(\frac{i-1}{N} \right)^2 f''(w) + \frac{1}{6} \frac{(i-1)^3}{N^3} f^{(3)}(w) + o\left(\frac{1}{N^4}\right) \right\} \\
 &= Nw (m_N - 1) f'(w) + \underbrace{\frac{w}{2} \left(\sum_{i=1}^K (i-1)^2 \right)}_{\mathbb{E}[(\xi_N - 1)^2]} f''(w) + \frac{1}{6N} w \mathbb{E}[(\xi_N - 1)^3] f^{(3)}(w) + o\left(\frac{1}{N}\right)
 \end{aligned}$$

mais $m_N - 1 = \frac{a}{N}$, $\mathbb{E}[(\xi_N - 1)^2] = \cancel{\sigma_N^2} + \frac{a^2}{N^2} - 2\left(\frac{a}{N} + 1\right)$

$$\begin{aligned}
 &= \sigma_N^2 + \left(1 + \frac{a}{N}\right)^2 - 2\left(\frac{a}{N} + 1\right) + 1 \\
 &= \sigma_N^2 + \frac{a^2}{N^2}
 \end{aligned}$$

donc si on suppose que $\sigma_N^2 \rightarrow \sigma^2$, et $\mathbb{E}[(\xi_N - 1)^3]$ reste borné,

alors $G_{w_N} f(w) \xrightarrow{N \rightarrow \infty} a w f'(w) + \frac{\sigma^2}{2} w f''(w)$.

C'est le générateur du processus aléatoire (de la diffusion)

$$dW_t = a W_t dt + \sigma \sqrt{W_t} dB_t,$$

où B_t est un MB standard (uni-dimensionnel).

On appelle ce processus diffusion de Feller, de dérive $a W_t$ et de coef. de diffusion $\sigma \sqrt{W_t}$.

La dérive donne la tendance générale : si $a < 0$ le processus tend à diminuer (mais Δ fluctuations browniennes)

si $a > 0$ le processus tend à

Et si $a = 0$, comme dans la 1^{ère} analyse ? On trouve des fluctuations qui n'étaient pas là avant, mais Δ on regarde des temps beaucoup plus longs. (Sorte de TCL, à ce moment)

Concernant σ , on voit que plus la variance de $\xi_N^{(w)}$ est grande et plus les fluctuations sont importantes à la limite \rightarrow cohérent...

9

Conclusion: dans ces exemples on peut voir le processus déterministe comme le modèle macroscopique décrivant une très grande population dont chaque individu se comporte de manière aléatoire. On passe de l'un à l'autre par une sorte de loi des grands nombres qui gomme les fluctuations dues aux comportements individuels (d'où la terminologie "macroscopique"). En revanche l'EDS obtenue sur une échelle de temps plus longue est aussi un modèle qu'on peut qualifier de macroscopique (il décrit l'évolution de la taille de la pop à partir de sa taille actuelle sans préciser ce que fait chaque individu), mais il est aléatoire quand même.

↳ Processus à valeurs mesurées

Travaillons avec le modèle 2 (temps continu) et supposons en outre que les individus se déplacent indépendamment les uns des autres suivant des mouvements browniens sur \mathbb{R} .

Comment décrire cette population? Par une somme de masses de Dirac:

$$Y_t = \sum_{i=1}^{Y_t} \delta_{B_t^i},$$

où Y_t est le nombre de particules en vie à l'instant t et B_t^i est la position de la particule i à l'instant t (l'ordre des particules n'importe pas, il leur faut juste un nom)

~~Le générateur de Y se découpe en 2 parties: pour F continue bornée et $f \in C^\infty$, on a avec les notations ci-dessus~~

~~$$GE(\langle Y, f \rangle) = F'(\langle Y, f \rangle) \langle Y, \frac{1}{2} \Delta f \rangle$$~~

Comme on a vu avec χ , une manière agréable de caractériser Y est de passer par sa transformée de Laplace : pour $0 < c < f < 1$, on pose

$$\varphi_f(t, x) := \mathbb{E}_{\mathcal{D}_x} [e^{\langle Y_t, \log f \rangle}] = \mathbb{E}_{\mathcal{D}_x} \left[\prod_{i=1}^{Y_t} f(B_t^i) \right].$$

En effet :

Prop : la fonction φ_f est l'unique solution positive de l'équation intégrale $\varphi(0, x) = f(x)$ et

$$\varphi(t, x) - \mathbb{E}_x \left[\int_0^t \{ \mathbb{F}(\varphi(t-s, B_s)) - \varphi(t-s, B_s) \} ds \right] = \mathbb{E}_x [f(B_t)],$$

où $\mathbb{F}(s) = \mathbb{E}[s^\xi]$ est la fonction caractéristique de ξ .

⚠ 2 mesures de proba ici, qu'on a notées toutes les 2 \mathbb{E} pour simplifier. Mais on devrait noter $\mathbb{E}_{\mathcal{D}_x}$ et \mathbb{E}_x par ex.

Propriété de branchement : $\mathbb{E}_{m\mathcal{D}_x} [e^{\langle Y_t, \log f \rangle}] = \varphi_f(t, x)^m$.

Effectuons les mêmes changements d'échelle qu'auparavant.

Changement 1 : $N_0^N := N\delta_0$ (N particules en 0)
 $N_t^N := \frac{1}{N} \sum_{i=1}^{N V_t^N} \delta_{B_t^i}$ $\Rightarrow \sqrt{N} = \delta$.

Prenons $f_N = e^{-\frac{1}{N}g}$ et écrivons que

$$\mathbb{E}_{\mathcal{D}_x} [e^{\langle N_t^N, g \rangle}] = \mathbb{E}_{N\mathcal{D}_x} [e^{\langle Y_t^N, \log f_N \rangle}] = (\varphi_{f_N}(t, x))^N$$

Par ailleurs, $\varphi_{f_N}(t, x) = \mathbb{E}_x \left[\int_0^t \{ \mathbb{F}(\varphi_{f_N}(t-s, B_s)) - \varphi_{f_N}(t-s, B_s) \} ds \right] + \mathbb{E}_x [e^{-\frac{1}{N}g(B_t)}]$

Par conséquent, si on pose $\psi_N(t, x) = N(1 - \varphi_{f_N}(t, x))$, on obtient

$$\psi_N(t, x) = N \left(1 - \mathbb{E}_x [e^{-\frac{1}{N}g(B_t)}] \right) - N \mathbb{E}_x \left[\int_0^t \left\{ \mathbb{F} \left(1 - \frac{\psi_N(t-s, B_s)}{N} \right) - \left(1 - \frac{\psi_N(t-s, B_s)}{N} \right) \right\} ds \right]$$

$$\mathbb{F}(1) = 1$$

Or, on vérifie facilement que $\mathbb{F}'(1) = m = \mathbb{E}[\xi]$

$$\mathbb{F}''(1) = \mathbb{E}[\xi(\xi-1)] = \sigma^2 + m^2 - m \quad (= \sigma^2 \text{ si } m=1)$$

et en faisant en développant de Taylor de \mathbb{F} on obtient donc

$$\psi_N(t, x) \approx \mathbb{E}_x[g(B_t)] + (m-1) \mathbb{E}_x \left[\int_0^t \psi_N(t-s, B_s) ds \right] + \mathcal{O}\left(\frac{1}{N}\right)$$

donc à la limite, $\psi(t, x) = \mathbb{E}_x[g(B_t)] + (m-1) \mathbb{E}_x \left[\int_0^t \psi(t-s, B_s) ds \right]$.
(si elle existe)

D'autre part, $\mathbb{E}_x \left[e^{-\langle W_t^N, g \rangle} \right] = \left(1 - \frac{\psi_N(t, x)}{N} \right)^N \rightarrow e^{-\psi(t, x)}$

Quand on a l'habitude des processus de branchement, on reconnaît la caractérisation du processus déterministe donné par : $\forall g \in C_b(\mathbb{R}^d)$,

$$\forall t \geq 0, \quad \langle W_t, g \rangle := e^{(m-1)t} \mathbb{E}_x [g(B_t)] \quad \text{si } W_0 = \delta_x.$$

Si on remarque que ψ et $\tilde{\psi}(t, x) = e^{(m-1)t} \mathbb{E}_x [g(B_t)]$

satisfont la même équation aux dérivées partielles et donc sont égales. Ceci "implique" que $(W_t^N)_{t \geq 0}$ converge vers $(W_t)_{t \geq 0}$

\Rightarrow même loi des grands nombres que sans structure spatiale.

En fait, ce type de convergence apparaît dans différents contextes on peut rajouter de la compétition entre les individus, notamment, ce que Nicolas présentera. (cf articles de Chi, Nicolas et Sylvie)

Si on accélère le temps si $\sigma_N^2 \rightarrow \sigma^2$ et $m_N = 1 + \frac{a}{N}$ comme précédemment, on obtient à la limite (par exactement la méthode) un superprocessus i.e. une

collection ∞ de particules qui suivent des mouvements browniens indépendants et telle que la masse totale de la pop. suit une diffusion de Feller. Il est à nouveau caractérisé par sa transformée de Laplace : $\forall f \geq 0$, si on pose $\psi(t, x) = \mathbb{E}_x [e^{-\langle W_t, f \rangle}]$

alors ψ est l'unique solution positive de l'équation intégrale :

$$2\psi(t, x) + \mathbb{E}_x \left[\int_0^t \left\{ \frac{\sigma^2}{2} \psi(t-s, B_s)^2 - a \psi(t-s, B_s) \right\} ds \right] = \mathbb{E}_x [f(B_t)].$$

ou $\frac{\partial \psi}{\partial t} = a\psi - \frac{\sigma^2}{2} \psi^2 + \frac{1}{2} \Delta \psi$.

Pour finir, notons 2 liens importants entre probabilités et EDP/analyse.

1) On voit que l'analyse des processus de branchement, aléatoire ou déterministes, repose sur la compréhension de solutions d'EDP ou d'ED. C'est en particulier vrai pour les processus à valeurs mesurées.

2) "Inversement", des représentations probabilistes de solutions d'équations ont apporté un regard nouveau sur les propriétés de ces solutions, et ont simplifié leur simulation.

On pense pour commencer au problème de Dirichlet pour le mouvement brownien :

Th: Soit D un domaine borné de \mathbb{R}^d satisfaisant la condition de cône extérieure. Notons T le temps de sortie $T = \inf\{t : B_t \notin D\}$. Soit $g : \partial D \rightarrow \mathbb{R}$ une fonction continue. Alors la fonction $h(x) = \mathbb{E}_x[g(B_T)]$ est l'unique solution de l'équation $\Delta h = 0$ et est de classe C^2 et $\lim_{x \rightarrow y} h(x) = g(y)$ pour $y \in \partial D$.

$$\begin{cases} \Delta h = 0 \\ \forall y \in \partial D, \lim_{\substack{x \rightarrow y \\ x \in D}} h(x) = g(y) \end{cases}$$

Mais il existe le même type de résultat pour le super-mouvement brownien.

~~Dans les grandes lignes, considérons le supermouvement brownien $(W_t)_{t \geq 0}$ pour lequel $a = 0$ (sans croissance/décroissance en moyenne).~~

~~Supposons qu'on parte d'une masse infinitésimale en un point x . On note N_x la mesure associée à cette famille ∞ -ale (mesure d'excursion).~~

~~Soit D un domaine de \mathbb{R}^d et notons E^D la mesure~~

~~On peut représenter l'unique solution de~~

$$\begin{cases} \Delta u = 4\sigma^2 u^2 \text{ dans } D \\ u|_{\partial D} = g \end{cases}$$

~~en fonction de la "mesure de sortie" du SMB tel que $a = 0$ et $\sigma^2 > 0$~~

~~Très long à détailler. Cf le livre de J-F pour de plus amples infos.~~