Modèles microscopiques et fluctuations pour l'équation F-KPP

Jean Bérard

Université de Lyon

Equation F-KPP

Fisher (1937), Kolmogorov, Petrovskii, Piscounov (1937)

Equation F-KPP

Fisher (1937), Kolmogorov, Petrovskii, Piscounov (1937)

$$u = u(x,t), \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; t \geq 0$$

Equation F-KPP

Fisher (1937), Kolmogorov, Petrovskii, Piscounov (1937)

$$u = u(x,t),\ \ x \in \mathbb{R},\ \ t \geq 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u)$$

Equation F-KPP

Fisher (1937), Kolmogorov, Petrovskii, Piscounov (1937)

$$u = u(x,t),\ x \in \mathbb{R},\ t \geq 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{diffusion}} + \underbrace{u(1-u)}_{\text{croissance logistique}}$$

Equation F-KPP

Fisher (1937), Kolmogorov, Petrovskii, Piscounov (1937)

$$u = u(x,t), \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; t \geq 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{diffusion}} + \underbrace{u(1-u)}_{\text{croissance logistique}}$$

Propriétés

- solutions de type onde progressive $u(x,t) = f(x - vt)$ pour $v \geq v_* = 2$, avec :
  f décroissante, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$

Equation F-KPP

Fisher (1937), Kolmogorov, Petrovskii, Piscounov (1937)

$$u = u(x,t), \;\; x \in \mathbb{R}, \;\; t \geq 0$$

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \underbrace{\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}}_{\text{diffusion}} + \underbrace{u(1-u)}_{\text{croissance logistique}}$$

Propriétés

- solutions de type onde progressive $u(x,t) = f(x - vt)$ pour $v \geq v_* = 2$, avec :
  f décroissante, $\lim_{x \to -\infty} f(x) = 1$, $\lim_{x \to +\infty} f(x) = 0$
- pour une condition initiale localisée, i.e.
  $u(x,0) = 1$ pour $x < a$, $u(x,0) = 0$ pour $x > b$,
  convergence vers l'onde progressive de vitesse v_*

Plus généralement

Plus généralement

- en général, la vitesse dépend de la décroissance de la condition initiale dans la queue

Plus généralement

- en général, la vitesse dépend de la décroissance de la condition initiale dans la queue
- versions plus générales $u(1-u) \to f(u)$
  $f(0) = f(1) = 0$; $0 < f(u) < uf'(0)$

Modèle de Richardson avec agitation

Modèle

Modèle de Richardson avec agitation

Modèle

- à la date $t \geq 0$, chaque site $x \in \mathbb{Z}$ porte un nombre de particules $\eta_t(x) \in \{0, 1\}$

Modèle de Richardson avec agitation

Modèle

- à la date $t \geq 0$, chaque site $x \in \mathbb{Z}$ porte un nombre de particules $\eta_t(x) \in \{0, 1\}$
- **croissance :** une particule en x tente de se copier au taux $\lambda > 0$ en $x - 1$ et $x + 1$,

Modèle de Richardson avec agitation

Modèle

- à la date $t \geq 0$, chaque site $x \in \mathbb{Z}$ porte un nombre de particules $\eta_t(x) \in \{0,1\}$
- **croissance :** une particule en x tente de se copier au taux $\lambda > 0$ en $x-1$ et $x+1$,
  la copie a lieu si le site est inoccupé

Modèle de Richardson avec agitation

Modèle

- à la date $t \geq 0$, chaque site $x \in \mathbb{Z}$ porte un nombre de particules $\eta_t(x) \in \{0, 1\}$
- **croissance :** une particule en x tente de se copier au taux $\lambda > 0$ en $x - 1$ et $x + 1$,
  la copie a lieu si le site est inoccupé
- **agitation :** $\eta(x) \leftrightarrow \eta(x+1)$ au taux $\mu > 0$

Modèle de Richardson avec agitation

Modèle

- à la date $t \geq 0$, chaque site $x \in \mathbb{Z}$ porte un nombre de particules $\eta_t(x) \in \{0, 1\}$
- **croissance :** une particule en x tente de se copier au taux $\lambda > 0$ en $x - 1$ et $x + 1$,
  la copie a lieu si le site est inoccupé
- **agitation :** $\eta(x) \leftrightarrow \eta(x + 1)$ au taux $\mu > 0$

Limite d'échelle

Modèle de Richardson avec agitation

Modèle

- à la date $t \geq 0$, chaque site $x \in \mathbb{Z}$ porte un nombre de particules $\eta_t(x) \in \{0, 1\}$
- **croissance :** une particule en x tente de se copier au taux $\lambda > 0$ en $x - 1$ et $x + 1$,
  la copie a lieu si le site est inoccupé
- **agitation :** $\eta(x) \leftrightarrow \eta(x+1)$ au taux $\mu > 0$

Limite d'échelle

- $x \to x/N$ et $\mu \to N^2\mu$

Modèle de Richardson avec agitation

Modèle

- à la date $t \geq 0$, chaque site $x \in \mathbb{Z}$ porte un nombre de particules $\eta_t(x) \in \{0, 1\}$
- **croissance :** une particule en x tente de se copier au taux $\lambda > 0$ en $x - 1$ et $x + 1$,
  la copie a lieu si le site est inoccupé
- **agitation :** $\eta(x) \leftrightarrow \eta(x+1)$ au taux $\mu > 0$

Limite d'échelle

- $x \to x/N$ et $\mu \to N^2\mu$
- densité d'occupation : $\pi_t^N := \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{Z}} \eta_t(x) \delta_{x/N}$

Modèle de Richardson avec agitation

Modèle

- à la date $t \geq 0$, chaque site $x \in \mathbb{Z}$ porte un nombre de particules $\eta_t(x) \in \{0, 1\}$
- **croissance :** une particule en x tente de se copier au taux $\lambda > 0$ en $x - 1$ et $x + 1$,
  la copie a lieu si le site est inoccupé
- **agitation :** $\eta(x) \leftrightarrow \eta(x + 1)$ au taux $\mu > 0$

Limite d'échelle

- $x \to x/N$ et $\mu \to N^2 \mu$
- densité d'occupation : $\pi_t^N := \frac{1}{N} \sum_{x \in \mathbb{Z}} \eta_t(x) \delta_{x/N}$

Modèle de Richardson avec agitation - convergence

Convergence vers F-KPP (De Masi, Ferrari, Lebowitz, 86)

- condition initiale :

Modèle de Richardson avec agitation - convergence

Convergence vers F-KPP (De Masi, Ferrari, Lebowitz, 86)

- condition initiale : on suppose que les $\eta_0(x)$ sont choisis indépendamment selon $P(\eta_0(x) = 1) = g(x/N)$ pour une fonction g régulière.

Modèle de Richardson avec agitation - convergence

Convergence vers F-KPP (De Masi, Ferrari, Lebowitz, 86)

- condition initiale : on suppose que les $\eta_0(x)$ sont choisis indépendamment selon $P(\eta_0(x) = 1) = g(x/N)$ pour une fonction g régulière. Lorsque $N \to +\infty$, pour $t \geq 0$ et $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\int f(x) d\pi_0^N(x) \xrightarrow{P} \int f(x) g(x) dx$$

Modèle de Richardson avec agitation - convergence

Convergence vers F-KPP (De Masi, Ferrari, Lebowitz, 86)

- condition initiale : on suppose que les $\eta_0(x)$ sont choisis indépendamment selon $P(\eta_0(x) = 1) = g(x/N)$ pour une fonction g régulière. Lorsque $N \to +\infty$, pour $t \geq 0$ et $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\int f(x) d\pi_0^N(x) \xrightarrow{P} \int f(x) g(x) dx$$

- convergence : lorsque $N \to +\infty$, pour $t \geq 0$ et $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\int f(x) d\pi_t^N(x) \xrightarrow{P} \int f(x) u(x,t) dx,$$

Modèle de Richardson avec agitation - convergence

Convergence vers F-KPP (De Masi, Ferrari, Lebowitz, 86)

- condition initiale : on suppose que les $\eta_0(x)$ sont choisis indépendamment selon $P(\eta_0(x) = 1) = g(x/N)$ pour une fonction g régulière. Lorsque $N \to +\infty$, pour $t \geq 0$ et $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\int f(x) d\pi_0^N(x) \xrightarrow{P} \int f(x) g(x) dx$$

- convergence : lorsque $N \to +\infty$, pour $t \geq 0$ et $f \in C_c^\infty(\mathbb{R})$,

$$\int f(x) d\pi_t^N(x) \xrightarrow{P} \int f(x) u(x,t) dx,$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = \mu \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\lambda u(1-u) \\ u(x,0) = g(x) \end{cases}$$

Modèle de Richardson avec agitation - convergence

Générateur infinitésimal: on définit $f(\nu) = \int f(x) d\nu(x)$,

Modèle de Richardson avec agitation - convergence

Générateur infinitésimal: on définit $f(\nu) = \int f(x) d\nu(x)$,

$$E(f(\pi^N_{t+dt})|\eta_t) = f(\pi^N_t) + G^N f(\eta_t) dt + o(dt).$$

Modèle de Richardson avec agitation - convergence

Générateur infinitésimal: on définit $f(\nu) = \int f(x)d\nu(x)$,

$$E(f(\pi^N_{t+dt})|\eta_t) = f(\pi^N_t) + G^N f(\eta_t)dt + o(dt).$$

$$G^N f = \underbrace{G_1^N f}_{\text{croissance}} + \underbrace{G_2^N f}_{\text{agitation}}$$

Modèle de Richardson avec agitation - convergence

Générateur infinitésimal: on définit $f(\nu) = \int f(x) d\nu(x)$,

$$E(f(\pi^N_{t+dt})|\eta_t) = f(\pi^N_t) + G^N f(\eta_t)dt + o(dt).$$

$$G^N f = \underbrace{G_1^N f}_{\text{croissance}} + \underbrace{G_2^N f}_{\text{agitation}}$$

$$G_1^N f(\eta) = \frac{1}{N} \sum_{y \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}} \lambda \left(\eta \left(y - \frac{1}{N} \right) + \eta \left(y + \frac{1}{N} \right) \right) (1 - \eta(y)) f(y)$$

Modèle de Richardson avec agitation - convergence

Générateur infinitésimal: on définit $f(\nu) = \int f(x)d\nu(x)$,

$$E(f(\pi^N_{t+dt})|\eta_t) = f(\pi^N_t) + G^N f(\eta_t)dt + o(dt).$$

$$G^N f = \underbrace{G_1^N f}_{\text{croissance}} + \underbrace{G_2^N f}_{\text{agitation}}$$

$$G_1^N f(\eta) = \frac{1}{N} \sum_{y \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}} \lambda \left(\eta\left(y - \frac{1}{N}\right) + \eta\left(y + \frac{1}{N}\right) \right) (1 - \eta(y)) f(y)$$

$$G_2^N f(\eta) = \frac{1}{N} \sum_{y \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}} \frac{\mu N^2}{2} \left(\eta\left(y - \frac{1}{N}\right) - \eta(y) + \eta\left(y + \frac{1}{N}\right) - \eta(y) \right) f(y)$$

Modèle de Richardson avec agitation - convergence

Générateur infinitésimal: on définit $f(\nu) = \int f(x) d\nu(x)$,

$$E(f(\pi^N_{t+dt})|\eta_t) = f(\pi^N_t) + G^N f(\eta_t)dt + o(dt).$$

$$G^N f = \underbrace{G_1^N f}_{\text{croissance}} + \underbrace{G_2^N f}_{\text{agitation}}$$

$$G_1^N f(\eta) = \frac{1}{N} \sum_{y \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}} \lambda \left(\eta\left(y - \frac{1}{N}\right) + \eta\left(y + \frac{1}{N}\right) \right) (1 - \eta(y)) f(y)$$

$$G_2^N f(\eta) = \frac{1}{N} \sum_{y \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}} \frac{\mu N^2}{2} \left(\eta\left(y - \frac{1}{N}\right) - \eta(y) + \eta\left(y + \frac{1}{N}\right) - \eta(y) \right) f(y)$$

$$G_2^N f(\eta) = \frac{\mu \eta(y)}{2N} \sum_{y \in \frac{1}{N}\mathbb{Z}} \left(\frac{f\left(y - \frac{1}{N}\right) + f\left(y + \frac{1}{N}\right) - 2f(y)}{1/N^2} \right)$$

Modèle de Richardson avec agitation - convergence

Si on suppose que $\pi_t^N \approx u(x,t)dx$,

Modèle de Richardson avec agitation - convergence

Si on suppose que $\pi_t^N \approx u(x,t)dx$,

$$G^N f(\eta_t) \approx \int 2\lambda f(x) u(x,t)(1-u(x,t))dx + \mu \int \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} u(x,t)dx$$

Modèle de Richardson avec agitation - convergence

Si on suppose que $\pi_t^N \approx u(x,t)dx$,

$$G^N f(\eta_t) \approx \int 2\lambda f(x) u(x,t)(1-u(x,t))dx + \mu \int \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} u(x,t)dx$$

$$f(\pi_t^N) = f(\pi_0^N) + \int_0^t G^N f(\eta_s)ds + M_t^N$$

Modèle de Richardson avec agitation - convergence

Si on suppose que $\pi_t^N \approx u(x,t)dx$,

$$G^N f(\eta_t) \approx \int 2\lambda f(x)u(x,t)(1-u(x,t))dx + \mu \int \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} u(x,t)dx$$

$$f(\pi_t^N) = f(\pi_0^N) + \int_0^t G^N f(\eta_s)ds + M_t^N$$

$(M_t^N)_t$ est une martingale centrée, négligeable lorsque $N \to +\infty$

Modèle de Richardson avec agitation - convergence

Si on suppose que $\pi_t^N \approx u(x,t)dx$,

$$G^N f(\eta_t) \approx \int 2\lambda f(x) u(x,t)(1-u(x,t))dx + \mu \int \frac{\partial^2 f(x)}{\partial x^2} u(x,t)dx$$

$$f(\pi_t^N) = f(\pi_0^N) + \int_0^t G^N f(\eta_s)ds + M_t^N$$

$(M_t^N)_t$ est une martingale centrée, négligeable lorsque $N \to +\infty$

NB : le terme de saturation de la croissance vient de la contrainte d'au plus une particule par site

Deux modèles de croissance logistique

Deux modèles de croissance logistique

Modèle I : système de réactions

$$A + B \to A + A \qquad \text{constante } k_1$$

$$A + B \to B + B \qquad \text{constante } k_2$$

Deux modèles de croissance logistique

Modèle I : système de réactions

$$A + B \to A + A \qquad \text{constante } k_1$$

$$A + B \to B + B \qquad \text{constante } k_2$$

Modèle microscopique "champ moyen"

Deux modèles de croissance logistique

Modèle I : système de réactions

$$A + B \to A + A \qquad \text{constante } k_1$$

$$A + B \to B + B \qquad \text{constante } k_2$$

Modèle microscopique "champ moyen"

- $N_A(t) + N_B(t) = N$

Deux modèles de croissance logistique

Modèle I : système de réactions

$$A + B \to A + A \qquad \text{constante } k_1$$

$$A + B \to B + B \qquad \text{constante } k_2$$

Modèle microscopique "champ moyen"

- $N_A(t) + N_B(t) = N$
- Ω =taille du réservoir, $\Omega = N$

Deux modèles de croissance logistique

Modèle I : système de réactions

$$A + B \to A + A \qquad \text{constante } k_1$$

$$A + B \to B + B \qquad \text{constante } k_2$$

Modèle microscopique "champ moyen"

- $N_A(t) + N_B(t) = N$
- Ω =taille du réservoir, $\Omega = N$
- $N_A(t) \to N_A(t) + 1$, $N_B(t) \to N_B(t) - 1$, taux $k_1 \Omega^{-1} N_A(t) N_B(t)$

Deux modèles de croissance logistique

Modèle I : système de réactions

$$A + B \to A + A \qquad \text{constante } k_1$$

$$A + B \to B + B \qquad \text{constante } k_2$$

Modèle microscopique "champ moyen"

- $N_A(t) + N_B(t) = N$
- Ω =taille du réservoir, $\Omega = N$
- $N_A(t) \to N_A(t) + 1$, $N_B(t) \to N_B(t) - 1$, taux $k_1 \Omega^{-1} N_A(t) N_B(t)$
- $N_A(t) \to N_A(t) - 1$, $N_B(t) \to N_B(t) + 1$, taux $k_2 \Omega^{-1} N_A(t) N_B(t)$

Deux modèles de croissance logistique

Deux modèles de croissance logistique

Générateur infinitésimal :

$$Ef\left(\frac{N_A(t+dt)}{N}\,\middle|\,N_A(t)\right) = f\left(\frac{N_A(t)}{N}\right) + G_I^N f(N_A(t))dt + o(dt)$$

Deux modèles de croissance logistique

Générateur infinitésimal :

$$Ef\left(\frac{N_A(t+dt)}{N}\,\middle|\,N_A(t)\right) = f\left(\frac{N_A(t)}{N}\right) + G_I^N f(N_A(t))dt + o(dt)$$

$$\begin{aligned} G_I^N f(n) = \quad & k_1\Omega^{-1} n(N-n)\left(f\left(\tfrac{n+1}{N}\right) - f\left(\tfrac{n}{N}\right)\right) + \\ & k_2\Omega^{-1} n(N-n)\left(f\left(\tfrac{n-1}{N}\right) - f\left(\tfrac{n}{N}\right)\right) \end{aligned}$$

Deux modèles de croissance logistique

Générateur infinitésimal :

$$Ef\left(\frac{N_A(t+dt)}{N}\,\middle|\,N_A(t)\right) = f\left(\frac{N_A(t)}{N}\right) + G_l^N f(N_A(t))dt + o(dt)$$

$$\begin{aligned} G_l^N f(n) = \quad & k_1\Omega^{-1} n(N-n)\left(f\left(\tfrac{n+1}{N}\right) - f\left(\tfrac{n}{N}\right)\right) + \\ & k_2\Omega^{-1} n(N-n)\left(f\left(\tfrac{n-1}{N}\right) - f\left(\tfrac{n}{N}\right)\right) \end{aligned}$$

$$G_l^N f(n) \approx (k_1-k_2)x(1-x)f'(x),\ x = \frac{n}{N}$$

Deux modèles de croissance logistique

Générateur infinitésimal :

$$Ef\left(\frac{N_A(t+dt)}{N}\,\middle|\,N_A(t)\right) = f\left(\frac{N_A(t)}{N}\right) + G_I^N f(N_A(t))dt + o(dt)$$

$$\begin{aligned} G_I^N f(n) = \quad & k_1\Omega^{-1}n(N-n)\left(f\left(\tfrac{n+1}{N}\right) - f\left(\tfrac{n}{N}\right)\right) + \\ & k_2\Omega^{-1}n(N-n)\left(f\left(\tfrac{n-1}{N}\right) - f\left(\tfrac{n}{N}\right)\right) \end{aligned}$$

$$G_I^N f(n) \approx (k_1 - k_2)x(1-x)f'(x),\ x = \frac{n}{N}$$

Conséquence

Convergence de $\left(\frac{N_A(t)}{N}\right)_{t\geq 0}$ vers la solution de l'e.d.o.

$$\frac{d\rho_A(t)}{dt} = (k_1 - k_2)\rho_A(t)(1-\rho_A(t)),\ \rho_A(0) = \frac{N_A(0)}{N}.$$

Deux modèles de croissance logistique

Deux modèles de croissance logistique

Modèle 2 : système de réactions

$$A \to A + A \qquad \text{constante } \alpha$$

$$A + A \to A \qquad \text{constante } \beta$$

Deux modèles de croissance logistique

Modèle 2 : système de réactions

$$A \to A + A \qquad \text{constante } \alpha$$

$$A + A \to A \qquad \text{constante } \beta$$

Modèle microscopique "champ moyen"

Deux modèles de croissance logistique

Modèle 2 : système de réactions

$$A \to A + A \qquad \text{constante } \alpha$$

$$A + A \to A \qquad \text{constante } \beta$$

Modèle microscopique "champ moyen"

- $N_A(t) \to N_A(t) + 1$, taux $\alpha N_A(t)$

Deux modèles de croissance logistique

Modèle 2 : système de réactions

$$A \to A + A \qquad \text{constante } \alpha$$

$$A + A \to A \qquad \text{constante } \beta$$

Modèle microscopique "champ moyen"

- $N_A(t) \to N_A(t) + 1$, taux $\alpha N_A(t)$
- $N_A(t) \to N_A(t) - 1$, taux $\beta \Omega^{-1} N_A(t)^2$

Deux modèles de croissance logistique

Deux modèles de croissance logistique

Générateur infinitésimal :

$$Ef\left(\frac{N_A(t+dt)}{\Omega}\,\middle|\,N_A(t)\right) = f\left(\frac{N_A(t)}{\Omega}\right) + G_{II}^{\Omega} f(N_A(t))dt + o(dt)$$

Deux modèles de croissance logistique

Générateur infinitésimal :

$$E f\left(\frac{N_A(t+dt)}{\Omega} \,\middle|\, N_A(t)\right) = f\left(\frac{N_A(t)}{\Omega}\right) + G_{II}^{\Omega} f(N_A(t))dt + o(dt)$$

$$\begin{aligned} G_{II}^{\Omega} f(n) = \quad & \alpha n \left(f\left(\tfrac{n+1}{\Omega}\right) - f\left(\tfrac{n}{\Omega}\right)\right) + \\ & \beta \Omega^{-1} n^2 \left(f\left(\tfrac{n-1}{\Omega}\right) - f\left(\tfrac{n}{\Omega}\right)\right) \end{aligned}$$

Deux modèles de croissance logistique

Générateur infinitésimal :

$$Ef\left(\frac{N_A(t+dt)}{\Omega}\,\middle|\,N_A(t)\right) = f\left(\frac{N_A(t)}{\Omega}\right) + G_{II}^{\Omega} f(N_A(t))dt + o(dt)$$

$$\begin{aligned} G_{II}^{\Omega} f(n) = \quad & \alpha n \left(f\left(\tfrac{n+1}{\Omega}\right) - f\left(\tfrac{n}{\Omega}\right)\right) + \\ & \beta\Omega^{-1} n^2 \left(f\left(\tfrac{n-1}{\Omega}\right) - f\left(\tfrac{n}{\Omega}\right)\right) \end{aligned}$$

$$G_{II}^{\Omega} f(n) \approx \alpha x(1-(\beta/\alpha)x)f'(x),\ x = \frac{n}{\Omega}$$

Deux modèles de croissance logistique

Générateur infinitésimal :

$$Ef\left(\frac{N_A(t+dt)}{\Omega}\,\middle|\,N_A(t)\right) = f\left(\frac{N_A(t)}{\Omega}\right) + G_{II}^{\Omega}f(N_A(t))dt + o(dt)$$

$$\begin{aligned} G_{II}^{\Omega}f(n) = \quad & \alpha n\left(f\left(\tfrac{n+1}{\Omega}\right) - f\left(\tfrac{n}{\Omega}\right)\right) + \\ & \beta\Omega^{-1}n^2\left(f\left(\tfrac{n-1}{\Omega}\right) - f\left(\tfrac{n}{\Omega}\right)\right) \end{aligned}$$

$$G_{II}^{\Omega}f(n) \approx \alpha x(1-(\beta/\alpha)x)f'(x),\ x = \frac{n}{\Omega}$$

Conséquence

Convergence de $\left(\frac{N_A(t)}{\Omega}\right)_{t\geq 0}$ vers la solution de l'e.d.o.

$$\frac{d\rho_A(t)}{dt} = \alpha\rho_A(t)(1-(\beta/\alpha)\rho_A(t)),\ \rho_A(0) = \frac{N_A(0)}{\Omega}.$$

Fluctuations

Fluctuations

Les générateurs G_I^N et G_{II}^N ne font intervenir que l'espérance des sauts.

Fluctuations

Les générateurs G_I^N et G_{II}^N ne font intervenir que l'espérance des sauts. Pour étudier les fluctuations, on doit prendre en compte les moments d'ordre 2.

Fluctuations

Les générateurs G_I^N et G_{II}^N ne font intervenir que l'espérance des sauts. Pour étudier les fluctuations, on doit prendre en compte les moments d'ordre 2.

$$E\left[\left(\frac{N_A(t+dt)}{N}-\frac{N_A(t)}{N}\right)^2 \,\middle|\, N_A(t)\right]=(k_1+k_2)x(1-x)dt$$

Fluctuations

Les générateurs G_I^N et G_{II}^N ne font intervenir que l'espérance des sauts. Pour étudier les fluctuations, on doit prendre en compte les moments d'ordre 2.

$$E\left[\left(\frac{N_A(t+dt)}{N}-\frac{N_A(t)}{N}\right)^2 \,\middle|\, N_A(t)\right] = (k_1+k_2)x(1-x)dt$$

$$b_I(x) := (k_1-k_2)x(1-x),\ \sigma_I(x) := \sqrt{(k_1+k_2)x(1-x)}$$

Fluctuations

Les générateurs G_I^N et G_{II}^N ne font intervenir que l'espérance des sauts. Pour étudier les fluctuations, on doit prendre en compte les moments d'ordre 2.

$$E\left[\left(\frac{N_A(t+dt)}{N}-\frac{N_A(t)}{N}\right)^2 \middle| N_A(t)\right]=(k_1+k_2)x(1-x)dt$$

$$b_I(x) := (k_1-k_2)x(1-x),\ \sigma_I(x) := \sqrt{(k_1+k_2)x(1-x)}$$

Fluctuations

A l'échelle des fluctuations, $N^{1/2}\left(\frac{N_A(t)}{N}-\rho_A(t)\right)_{t\geq 0}$ est décrite par l'e.d.s.

$$dZ_t = \sigma_I(Z_t)dW_t + b_I'(Z_t)Z_t dt.$$

Fluctuations

Fluctuations

$$E\left[\left(\frac{N_A(t+dt)}{N}-\frac{N_A(t)}{N}\right)^2 \,\middle|\, N_A(t)\right]=(\alpha x+\beta x^2)dt$$

Fluctuations

$$E\left[\left(\frac{N_A(t+dt)}{N}-\frac{N_A(t)}{N}\right)^2 \,\middle|\, N_A(t)\right]=(\alpha x+\beta x^2)dt$$

$$b_{II}(x):=\alpha x(1-(\beta/\alpha)x),\ \sigma_{II}(x):=\sqrt{\alpha x+\beta x^2}$$

Fluctuations

$$E\left[\left(\frac{N_A(t+dt)}{N}-\frac{N_A(t)}{N}\right)^2 \,\middle|\, N_A(t)\right]=(\alpha x+\beta x^2)dt$$

$$b_{II}(x):=\alpha x(1-(\beta/\alpha)x),\ \sigma_{II}(x):=\sqrt{\alpha x+\beta x^2}$$

Fluctuations

A l'échelle des fluctuations, $N^{1/2}\left(\frac{N_A(t)}{N}-\rho_A(t)\right)_{t\geq 0}$ est décrite par l'e.d.s.

$$dZ_t=\sigma_{II}(Z_t)dW_t+b'_{II}(Z_t)Z_t dt.$$

Fluctuations

Fluctuations

En chaque site $x \in \mathbb{Z}$, on applique le modèle I, et on ajoute une dynamique de saut au plus proche voisin à taux μ, puis on normalise, comme pour le modèle de Richardson.

Fluctuations

En chaque site $x \in \mathbb{Z}$, on applique le modèle I, et on ajoute une dynamique de saut au plus proche voisin à taux μ, puis on normalise, comme pour le modèle de Richardson.

Heuristique

A l'échelle des fluctuations, on peut tenter de décrire la dynamique par une équation du type F-KPP bruitée :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u) + \sqrt{\frac{u(1-u)}{N}}\dot{W},$$

Fluctuations

En chaque site $x \in \mathbb{Z}$, on applique le modèle I, et on ajoute une dynamique de saut au plus proche voisin à taux μ, puis on normalise, comme pour le modèle de Richardson.

Heuristique

A l'échelle des fluctuations, on peut tenter de décrire la dynamique par une équation du type F-KPP bruitée :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u) + \sqrt{\frac{u(1-u)}{N}}\dot{W},$$

où $\dot{W}$ est un bruit blanc gaussien en espace-temps

Fluctuations

$\dot{W}$ est défini par son action sur les fonctions de carré intégrable

$$W(\phi) := \int \int \phi(x,t) W(dx,dt)$$

Fluctuations

$\dot{W}$ est défini par son action sur les fonctions de carré intégrable

$$W(\phi) := \int\int \phi(x,t) W(dx,dt)$$

$W(\phi)_\phi$ est une famille gaussienne centrée de covariance

$$E(W(\phi)W(\psi)) = \int\int \phi(x,t)\psi(x,t) dxdt$$

Fluctuations

$\dot{W}$ est défini par son action sur les fonctions de carré intégrable

$$W(\phi) := \int\int \phi(x,t) W(dx,dt)$$

$W(\phi)_\phi$ est une famille gaussienne centrée de covariance

$$E(W(\phi)W(\psi)) = \int\int \phi(x,t)\psi(x,t) dxdt$$

Version discrétisée de F-KPP bruitée

Fluctuations

$\dot{W}$ est défini par son action sur les fonctions de carré intégrable

$$W(\phi) := \int \int \phi(x,t) W(dx, dt)$$

$W(\phi)_\phi$ est une famille gaussienne centrée de covariance

$$E(W(\phi)W(\psi)) = \int \int \phi(x,t)\psi(x,t) dxdt$$

Version discrétisée de F-KPP bruitée

On discrétise l'espace en pas de taille $1/n$, $x = i/n$, $i \in \mathbb{Z}$, d'où un système d'e.d.s.

Fluctuations

$\dot{W}$ est défini par son action sur les fonctions de carré intégrable

$$W(\phi) := \int\int \phi(x,t) W(dx, dt)$$

$W(\phi)_\phi$ est une famille gaussienne centrée de covariance

$$E(W(\phi)W(\psi)) = \int\int \phi(x,t)\psi(x,t)dxdt$$

Version discrétisée de F-KPP bruitée

On discrétise l'espace en pas de taille $1/n$, $x = i/n$, $i \in \mathbb{Z}$, d'où un système d'e.d.s.

$$du_x(t) = \left[n^2(u_{x+1/n}(t) - 2u_x(t) + u_{x-1/n}(t)) + f(u_x(t))\right] dt \\ + n^{1/2}\sqrt{\frac{u_x(t)(1-u_x(t))}{N}} dW_t^x$$

Fluctuations

$\dot{W}$ est défini par son action sur les fonctions de carré intégrable

$$W(\phi) := \int\int \phi(x,t) W(dx,dt)$$

$W(\phi)_\phi$ est une famille gaussienne centrée de covariance

$$E(W(\phi)W(\psi)) = \int\int \phi(x,t)\psi(x,t) dxdt$$

Version discrétisée de F-KPP bruitée

On discrétise l'espace en pas de taille $1/n$, $x = i/n$, $i \in \mathbb{Z}$, d'où un système d'e.d.s.

$$du_x(t) = \left[n^2(u_{x+1/n}(t) - 2u_x(t) + u_{x-1/n}(t)) + f(u_x(t))\right] dt$$
$$+ n^{1/2}\sqrt{\frac{u_x(t)(1-u_x(t))}{N}} dW_t^x$$

les (W_t^x) sont des mouvements browniens indépendants

Convergence vers F-KPP bruitée

Convergence vers F-KPP bruitée

Modèle du votant à longue portée

Convergence vers F-KPP bruitée

Modèle du votant à longue portée

Modèle

- deux états pour chaque site $x \in \mathbb{Z}$, $\eta(x) \in \{0, 1\}$

Convergence vers F-KPP bruitée

Modèle du votant à longue portée

Modèle

- deux états pour chaque site $x \in \mathbb{Z}$, $\eta(x) \in \{0, 1\}$
- x est voisin de y si $|x - y| \leq \sqrt{n}$

Convergence vers F-KPP bruitée

Modèle du votant à longue portée

Modèle

- deux états pour chaque site $x \in \mathbb{Z}$, $\eta(x) \in \{0, 1\}$
- x est voisin de y si $|x - y| \leq \sqrt{n}$
- $\eta(x) \to \eta(y)$ au taux $\sqrt{n}$ pour chaque voisin y tel que $\eta(y) = 0$

Convergence vers F-KPP bruitée

Modèle du votant à longue portée

Modèle

- deux états pour chaque site $x \in \mathbb{Z}$, $\eta(x) \in \{0, 1\}$
- x est voisin de y si $|x - y| \leq \sqrt{n}$
- $\eta(x) \to \eta(y)$ au taux $\sqrt{n}$ pour chaque voisin y tel que $\eta(y) = 0$
- $\eta(x) \to \eta(y)$ au taux $\sqrt{n} + \frac{\theta}{\sqrt{n}}$ pour chaque voisin y tel que $\eta(y) = 1$

Convergence vers F-KPP bruitée

Modèle du votant à longue portée

Modèle

- deux états pour chaque site $x \in \mathbb{Z}$, $\eta(x) \in \{0, 1\}$
- x est voisin de y si $|x - y| \leq \sqrt{n}$
- $\eta(x) \to \eta(y)$ au taux $\sqrt{n}$ pour chaque voisin y tel que $\eta(y) = 0$
- $\eta(x) \to \eta(y)$ au taux $\sqrt{n} + \frac{\theta}{\sqrt{n}}$ pour chaque voisin y tel que $\eta(y) = 1$

Pour $x \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}$, $A^n(x, t) := n^{-1/2} \sum_{|k| \leq n^{1/2}} \eta_t(nx + k)$

Convergence vers F-KPP bruitée

Modèle du votant à longue portée

Modèle

- deux états pour chaque site $x \in \mathbb{Z}$, $\eta(x) \in \{0, 1\}$
- x est voisin de y si $|x - y| \leq \sqrt{n}$
- $\eta(x) \to \eta(y)$ au taux $\sqrt{n}$ pour chaque voisin y tel que $\eta(y) = 0$
- $\eta(x) \to \eta(y)$ au taux $\sqrt{n} + \frac{\theta}{\sqrt{n}}$ pour chaque voisin y tel que $\eta(y) = 1$

Pour $x \in \frac{1}{n}\mathbb{Z}$, $A^n(x,t) := n^{-1/2} \sum_{|k| \leq n^{1/2}} \eta_t(nx + k)$

Convergence (Mueller, Tribe, 95)

$$\text{On a } (A^n(x,t))_{t \geq 0} \overset{loi}{\to}_{n \to +\infty} (u_t)_{t \geq 0},$$

où

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{1}{6} \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + 2\theta u(1-u) + 4u(1-u)\dot{W}$$

Rappel : dualité MBB/F-KPP

Rappel : dualité MBB/F-KPP

Mouvement brownien avec branchement

- Système de particules : $X_1(t), \ldots, X_{N(t)}$

Rappel : dualité MBB/F-KPP

Mouvement brownien avec branchement

- Système de particules : $X_1(t), \ldots, X_{N(t)}$
- chaque particule se déplace selon un mouvement brownien

Rappel : dualité MBB/F-KPP

Mouvement brownien avec branchement

- Système de particules : $X_1(t), \ldots, X_{N(t)}$
- chaque particule se déplace selon un mouvement brownien
- chaque particule branche au taux 1

Rappel : dualité MBB/F-KPP

Mouvement brownien avec branchement

- Système de particules : $X_1(t), \dots, X_{N(t)}$
- chaque particule se déplace selon un mouvement brownien
- chaque particule branche au taux 1

Dualité F-KPP / MBB (McKean, 1975)

On a la relation

$$E\left[\prod_i (1 - u(t, X_i(0)))\right] = E\left[\prod_i (1 - u(0, X_i(t)))\right].$$

Rappel : dualité MBB/F-KPP

Mouvement brownien avec branchement

- Système de particules : $X_1(t), \ldots, X_{N(t)}$
- chaque particule se déplace selon un mouvement brownien
- chaque particule branche au taux 1

Dualité F-KPP / MBB (McKean, 1975)

On a la relation

$$E\left[\prod_i (1-u(t,X_i(0)))\right] = E\left[\prod_i (1-u(0,X_i(t)))\right].$$

Exemple : $u(x,0) = \mathbf{1}(x>a) \rightarrow$ loi de la particule la plus à droite du MBB

Dualité F-KPP bruitée/MBBC

Dualité F-KPP bruitée/MBBC

Mouvement brownien avec branchement et coalescence

- Système de particules : $X_1(t), \ldots, X_{n(t)}$

Dualité F-KPP bruitée/MBBC

Mouvement brownien avec branchement et coalescence

- Système de particules : $X_1(t), \ldots, X_{n(t)}$
- chaque particule se déplace selon un mouvement brownien

Dualité F-KPP bruitée/MBBC

Mouvement brownien avec branchement et coalescence

- Système de particules : $X_1(t), \ldots, X_{n(t)}$
- chaque particule se déplace selon un mouvement brownien
- chaque particule branche au taux 1
- chaque paire de particule coalesce au taux $1/N$ pendant son temps local d'intersection

Dualité F-KPP bruitée/MBBC

Mouvement brownien avec branchement et coalescence

- Système de particules : $X_1(t), \ldots, X_{n(t)}$
- chaque particule se déplace selon un mouvement brownien
- chaque particule branche au taux 1
- chaque paire de particule coalesce au taux $1/N$ pendant son temps local d'intersection

Dualité F-KPP bruitée / MBBC (Shiga 1988)

On a la relation

$$E\left[\prod_i (1 - u(t, X_i(0)))\right] = E\left[\prod_i (1 - u(0, X_i(t)))\right].$$

F-KPP bruitée

Equation du type F-KPP bruitée :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u) + \sqrt{\frac{u(1-u)}{N}}\dot{W},$$

F-KPP bruitée

Equation du type F-KPP bruitée :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u) + \sqrt{\frac{u(1-u)}{N}}\dot{W},$$

Comportement en temps long (Mueller, Sowers 1995)

Partant d'une condition initiale à support borné, et pour N assez grand :

F-KPP bruitée

Equation du type F-KPP bruitée :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u) + \sqrt{\frac{u(1-u)}{N}}\dot{W},$$

Comportement en temps long (Mueller, Sowers 1995)

Partant d'une condition initiale à support borné, et pour N assez grand :

- il existe des solutions continues

F-KPP bruitée

Equation du type F-KPP bruitée :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u) + \sqrt{\frac{u(1-u)}{N}}\dot{W},$$

Comportement en temps long (Mueller, Sowers 1995)

Partant d'une condition initiale à support borné, et pour N assez grand :

- il existe des solutions continues
- $r(t) := sup\{x;\ u(t,x) > 0\} < +\infty$

F-KPP bruitée

Equation du type F-KPP bruitée :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u(1-u) + \sqrt{\frac{u(1-u)}{N}}\dot{W},$$

Comportement en temps long (Mueller, Sowers 1995)

Partant d'une condition initiale à support borné, et pour N assez grand :

- il existe des solutions continues
- $r(t) := sup\{x;\ u(t,x) > 0\} < +\infty$
- vitesse asymptotique déterministe pour le front

$$\lim_{t \to +\infty} \frac{r(t)}{t} = v_N$$

Effet des fluctuations sur la vitesse

Effet des fluctuations sur la vitesse

Correction de la vitesse (Brunet, Derrida 1997)

Lorsque N tend vers l'infini,

$$v_* - v_N \sim \frac{\pi^2}{(\log N)^2}.$$

Effet des fluctuations sur la vitesse

Correction de la vitesse (Brunet, Derrida 1997)

Lorsque N tend vers l'infini,

$$v_* - v_N \sim \frac{\pi^2}{(\log N)^2}.$$

- cette correction est **énorme !**

Effet des fluctuations sur la vitesse

Correction de la vitesse (Brunet, Derrida 1997)

Lorsque N tend vers l'infini,

$$v_* - v_N \sim \frac{\pi^2}{(\log N)^2}.$$

- cette correction est **énorme !**
- lorsque $u \propto 1/N$, les fluctuations aléatoires sont du même ordre que le terme de réaction

Effet des fluctuations sur la vitesse

Correction de la vitesse (Brunet, Derrida 1997)

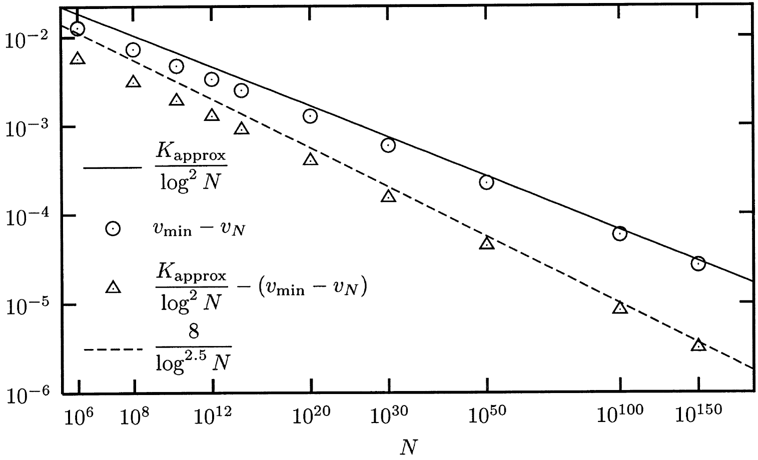
Lorsque N tend vers l'infini,

$$v_* - v_N \sim \frac{\pi^2}{(\log N)^2}.$$

- cette correction est **énorme !**
- lorsque $u \propto 1/N$, les fluctuations aléatoires sont du même ordre que le terme de réaction
- la propagation du front pour F-KPP est de type "pulled", déterminée par l'allure de la queue du front
- Une preuve mathématique a été donnée par (Mueller, Mytnik, Quastel 2011).

Comportement de Brunet-Derrida

Simulations numériques (Brunet et Derrida 2001)



Argument de Brunet et Derrida

Argument de Brunet et Derrida

- dans la zone où $1/N << u << 1$, on peut remplacer l'équation par sa linéarisation

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u$$

Argument de Brunet et Derrida

- dans la zone où $1/N << u << 1$, on peut remplacer l'équation par sa linéarisation
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u$$
- le comportement dans cette zone est décrit par une onde progressive de vitesse inférieure à v_*

Argument de Brunet et Derrida

- dans la zone où $1/N << u << 1$, on peut remplacer l'équation par sa linéarisation
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u$$
- le comportement dans cette zone est décrit par une onde progressive de vitesse inférieure à v_*
- solutions de la forme $u(x,t) = e^{-\gamma(x-vt)}$, $v = \gamma + 1/\gamma$

Argument de Brunet et Derrida

- dans la zone où $1/N << u << 1$, on peut remplacer l'équation par sa linéarisation
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u$$
- le comportement dans cette zone est décrit par une onde progressive de vitesse inférieure à v_*
- solutions de la forme $u(x,t) = e^{-\gamma(x-vt)}$, $v = \gamma + 1/\gamma$
- comme $v < v_*$, $\gamma = \gamma_R + i\gamma_I$ et la solution est oscillante

Argument de Brunet et Derrida

- dans la zone où $1/N << u << 1$, on peut remplacer l'équation par sa linéarisation
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u$$
- le comportement dans cette zone est décrit par une onde progressive de vitesse inférieure à v_*
- solutions de la forme $u(x,t) = e^{-\gamma(x-vt)}$, $v = \gamma + 1/\gamma$
- comme $v < v_*$, $\gamma = \gamma_R + i\gamma_I$ et la solution est oscillante
- $u(x+vt,t) = e^{-\gamma_R x}\sin(\gamma_I x)$

Argument de Brunet et Derrida

- dans la zone où $1/N << u << 1$, on peut remplacer l'équation par sa linéarisation
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u$$
- le comportement dans cette zone est décrit par une onde progressive de vitesse inférieure à v_*
- solutions de la forme $u(x,t) = e^{-\gamma(x-vt)}$, $v = \gamma + 1/\gamma$
- comme $v < v_*$, $\gamma = \gamma_R + i\gamma_I$ et la solution est oscillante
- $u(x+vt,t) = e^{-\gamma_R x}\sin(\gamma_I x)$
- on atteint $1/N$ pour $x = x^* \sim \frac{\log N}{\gamma_R}$

Argument de Brunet et Derrida

- dans la zone où $1/N << u << 1$, on peut remplacer l'équation par sa linéarisation
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u$$
- le comportement dans cette zone est décrit par une onde progressive de vitesse inférieure à v_*
- solutions de la forme $u(x,t) = e^{-\gamma(x-vt)}$, $v = \gamma + 1/\gamma$
- comme $v < v_*$, $\gamma = \gamma_R + i\gamma_I$ et la solution est oscillante
- $u(x+vt,t) = e^{-\gamma_R x}\sin(\gamma_I x)$
- on atteint $1/N$ pour $x = x^* \sim \frac{\log N}{\gamma_R}$
- au voisinage de x^*, on atteint 0 d'où $\gamma_I x^* \sim \pi$

Argument de Brunet et Derrida

- dans la zone où $1/N << u << 1$, on peut remplacer l'équation par sa linéarisation
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u$$
- le comportement dans cette zone est décrit par une onde progressive de vitesse inférieure à v_*
- solutions de la forme $u(x,t) = e^{-\gamma(x-vt)}$, $v = \gamma + 1/\gamma$
- comme $v < v_*$, $\gamma = \gamma_R + i\gamma_I$ et la solution est oscillante
- $u(x+vt,t) = e^{-\gamma_R x}\sin(\gamma_I x)$
- on atteint $1/N$ pour $x = x^* \sim \frac{\log N}{\gamma_R}$
- au voisinage de x^*, on atteint 0 d'où $\gamma_I x^* \sim \pi$
- $\gamma_I/\gamma_R \sim \frac{\pi}{\log N}$

Argument de Brunet et Derrida

- dans la zone où $1/N << u << 1$, on peut remplacer l'équation par sa linéarisation
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u$$
- le comportement dans cette zone est décrit par une onde progressive de vitesse inférieure à v_*
- solutions de la forme $u(x,t) = e^{-\gamma(x-vt)}$, $v = \gamma + 1/\gamma$
- comme $v < v_*$, $\gamma = \gamma_R + i\gamma_I$ et la solution est oscillante
- $u(x+vt,t) = e^{-\gamma_R x}\sin(\gamma_I x)$
- on atteint $1/N$ pour $x = x^* \sim \frac{\log N}{\gamma_R}$
- au voisinage de x^*, on atteint 0 d'où $\gamma_I x^* \sim \pi$
- $\gamma_I/\gamma_R \sim \frac{\pi}{\log N}$
- le fait que $v = \gamma + 1/\gamma$ est réel entraîne que $\gamma_R^2 + \gamma_I^2 = 1$

Argument de Brunet et Derrida

- dans la zone où $1/N << u << 1$, on peut remplacer l'équation par sa linéarisation
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u$$
- le comportement dans cette zone est décrit par une onde progressive de vitesse inférieure à v_*
- solutions de la forme $u(x,t) = e^{-\gamma(x-vt)}$, $v = \gamma + 1/\gamma$
- comme $v < v_*$, $\gamma = \gamma_R + i\gamma_I$ et la solution est oscillante
- $u(x+vt,t) = e^{-\gamma_R x} \sin(\gamma_I x)$
- on atteint $1/N$ pour $x = x^* \sim \frac{\log N}{\gamma_R}$
- au voisinage de x^*, on atteint 0 d'où $\gamma_I x^* \sim \pi$
- $\gamma_I/\gamma_R \sim \frac{\pi}{\log N}$
- le fait que $v = \gamma + 1/\gamma$ est réel entraîne que $\gamma_R^2 + \gamma_I^2 = 1$
- $\gamma = 1 - i\frac{\pi}{\log N} + o(\frac{1}{\log N})$

Argument de Brunet et Derrida

- dans la zone où $1/N << u << 1$, on peut remplacer l'équation par sa linéarisation
$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + u$$
- le comportement dans cette zone est décrit par une onde progressive de vitesse inférieure à v_*
- solutions de la forme $u(x,t) = e^{-\gamma(x-vt)}$, $v = \gamma + 1/\gamma$
- comme $v < v_*$, $\gamma = \gamma_R + i\gamma_I$ et la solution est oscillante
- $u(x+vt,t) = e^{-\gamma_R x}\sin(\gamma_I x)$
- on atteint $1/N$ pour $x = x^* \sim \frac{\log N}{\gamma_R}$
- au voisinage de x^*, on atteint 0 d'où $\gamma_I x^* \sim \pi$
- $\gamma_I/\gamma_R \sim \frac{\pi}{\log N}$
- le fait que $v = \gamma + 1/\gamma$ est réel entraîne que $\gamma_R^2 + \gamma_I^2 = 1$
- $\gamma = 1 - i\frac{\pi}{\log N} + o(\frac{1}{\log N})$

L'argument de Mueller, Mytnik, Quastel

Comparaison des solutions de F-KPP bruitée avec

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \ x < vt \\ h(x,t) = 0, \ x \geq vt \end{cases}$$

L'argument de Mueller, Mytnik, Quastel

Comparaison des solutions de F-KPP bruitée avec

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, \ x < vt \\ h(x,t) = 0, \ x \geq vt \end{cases}$$

- $v = v(\epsilon)$ est choisi de telle sorte qu'il existe une solution onde progressive $h(x,t) = g(x - vt)$ telle que $\lim_{x \to -\infty} h(x) = 1$ et $h'(0) = -\epsilon$.

L'argument de Mueller, Mytnik, Quastel

Comparaison des solutions de F-KPP bruitée avec

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, & x < vt \\ h(x,t) = 0, & x \geq vt \end{cases}$$

- $v = v(\epsilon)$ est choisi de telle sorte qu'il existe une solution onde progressive $h(x,t) = g(x - vt)$ telle que $\lim_{x \to -\infty} h(x) = 1$ et $h'(0) = -\epsilon$.
- on obtient que $v(\epsilon) = v_* - \frac{\pi^2}{(\log \epsilon)^2}$ par comparaison avec des versions linéarisées de l'équation

L'argument de Mueller, Mytnik, Quastel

Comparaison des solutions de F-KPP bruitée avec

$$\begin{cases} \frac{\partial h}{\partial t} = \frac{\partial^2 h}{\partial x^2}, & x < vt \\ h(x,t) = 0, & x \geq vt \end{cases}$$

- $v = v(\epsilon)$ est choisi de telle sorte qu'il existe une solution onde progressive $h(x,t) = g(x - vt)$ telle que $\lim_{x \to -\infty} h(x) = 1$ et $h'(0) = -\epsilon$.
- on obtient que $v(\epsilon) = v_* - \frac{\pi^2}{(\log \epsilon)^2}$ par comparaison avec des versions linéarisées de l'équation
- en choisissant $\epsilon = \frac{\gamma}{N}$ avec $\gamma >> 1$ et $\gamma << 1$, on "encadre" les solutions de F-KPP bruitée

Comportement à l'ordre suivant

Brunet, Derrida 2006

Lorsque $N \to +\infty$, on a

$$v_* - v_N - \frac{\pi^2}{(\log N)^2} \sim -6\pi^2 \frac{\log \log N}{(\log N)^3}.$$

On sait seulement prouver que

$$v_* - v_N - \frac{\pi^2}{(\log N)^2} = O\left(\frac{\log \log N}{(\log N)^3}\right)$$