Notes de cours

ENSMP, Option Automatique & DEA ATS Orsay

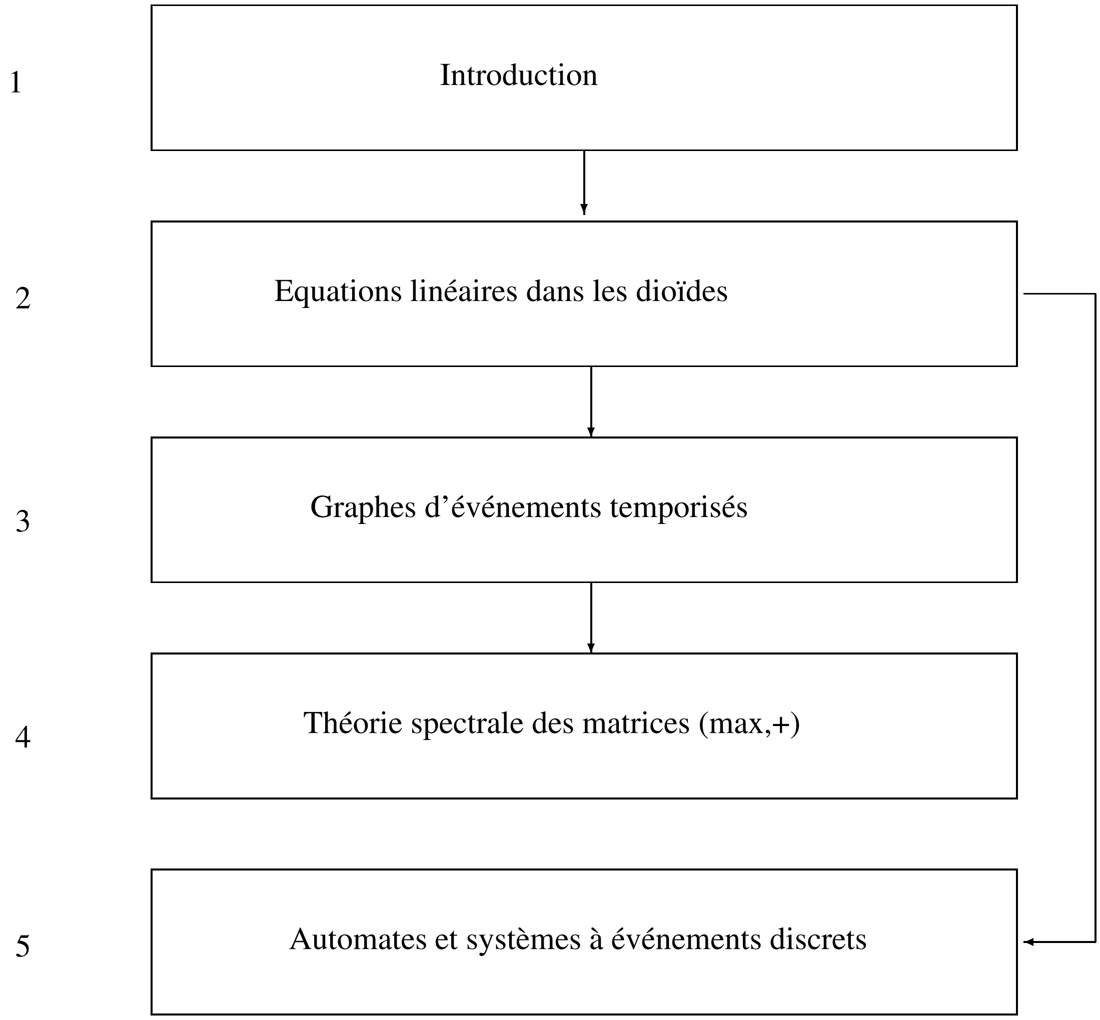
INTRODUCTION
aux
SYSTÈMES DYNAMIQUES À ÉVÉNEMENTS DISCRETS

STÉPHANE GAUBERT

INRIA Rocquencourt
Domaine de Voluceau, BP 105, 78153 Le Chesnay Cédex, France,
Mèl : Stephane.Gaubert@inria.fr
Toile : http ://amadeus.inria.fr/gaubert

12 février 1999

PLAN DU COURS



Avertissement

Ces notes ont été élaborées depuis 92 dans le cadre d'un cours donné selon les années en plusieurs endroits (troisième année à l'ENSTA, option automatique à l'École des Mines, DEA Automatique et Traitement du Signal d'Orsay, DEA Automatique-productique, ENSIEG).

En 21 heures, avec un public n'ayant jamais entendu parler de systèmes à événements discrets, les quatre premiers chapitres sont en général traités.

Hormis la théorie de la commande supervisée, initiée par Ramadge et Wonham, ce cours s'inspire largement du travail commun au sein du petit groupe de travail sur l'algèbre max-plus, à l'INRIA Rocquencourt, auquel ont participé ou participent toujours, en dehors de l'auteur, Guy Cohen, Jean-Pierre Quadrat, Michel Viot, Pierre Moller, Ramine Nikoukhah, Marianne Akian. D'autres chercheurs et d'autres écoles ont contribué fortement par ailleurs au développement de cette théorie, voir la petite bibliographie raisonnée à la fin du premier chapitre.

Depuis sa première rédaction, ce cours a subi des améliorations essentiellement cosmétiques (le plan étant inchangé). Notre intention initiale était de présenter en détail la théorie spectrale max-plus, qui est à notre avis le cœur du sujet. On obtient comme corollaire du théorème spectral des résultats importants, par exemple le théorème de périodicité énoncé par Chretienne pour les graphes d'événements, ou des théorèmes asymptotiques en commande optimale déterministe (à espace d'état et de commande finis) qui n'apparaissent pas en général avec ce degré de précision dans la litérature.

La théorie des séries rationnelles à coefficients sur le semi-anneau max-plus, qui offre un point de vue alternatif (de puissance équivalente) à la théorie spectrale, est seulement esquissée. La théorie de la résiduation, qui fournit un cadre algébrique au calcul des dates au plus tard, n'est pas abordée. En attendant la nouvelle version de ce cours, nous renvoyons le lecteur à "Synchronisation et Linéarité", op. cit.

Enfin, avec un peu de recul, ils nous semble que le progrès important de ces dernière années, et qui n'apparaît qu'en filigrane dans la version présente du cours écrit, et qui apparaît espère-t-on mieux dans le cours oral, est venu de l'augmentation du pouvoir de modélisation, grâce d'une part aux généralisation non-commutatives des graphes d'événements (automates max-plus, empilements de pièces), qui permettent de modéliser des phénomènes de concurrence (e.g. partage de ressources), et d'autres part aux systèmes dynamiques monotones homogènes, et en particulier aux "fonctions min-max" et "réseaux de Petri fluides", qui constituent des classes maintenant assez mieux comprises et algébriquement analysables de systèmes.

Chapitre 1

Introduction

1.1 Petite revue des Systèmes à Événements Discrets

1.1.1 Problèmes typiques et outils

Ce cours a pour but de présenter et d'illustrer les techniques d'analyse des systèmes dits "à événements discrets", pour lesquels des "événements" (arrivée d'un client, achèvement d'une tâche, envoi d'un signal) donnent lieu à des phénomènes de synchronisation, saturation ou concurrence. On trouvera de tels phénomènes dans les systèmes de production (ateliers flexibles) les systèmes multiprocesseur, les réseaux informatiques, réseaux de transport ... Les systèmes à événements discrets peuvent se définir négativement par rapport aux systèmes considérés en automatique classique. On peut dire que l'automatique classique étudie les systèmes de la forme $x' = f(x, u)$ où f est une fonction régulière (C^∞, voire linéaire) de l'état x et d'un contrôle u, ainsi que leurs analogues discrets. Il est clair que les phénomènes de saturation et de synchronisation propres aux systèmes à événements discrets se laissent difficilement modéliser dans ce cadre (concédons que certains systèmes à événements discrets sont réguliers par morceaux, mais toute la problématique réside précisément en l'étude des "changements de morceaux"). Les problèmes qui nous préoccupent sont typiquement

- la *spécification* de systèmes à événements discrets (description d'un comportement logique ou temporel admissible),
- la *conception* (le "design") de ces systèmes
- la détermination qualitative et quantitative du *comportement* des systèmes à événements discret, soit plus particulièrement
  - l'étude du comportement asymptotique et la mise en évidence d'un régime stationnaire ou périodique simple éventuel,
  - les questions d'évaluation de performance (typiquement, calcul du taux de production)
  - les questions de *stabilité* : les stocks de pièces ou le nombre de données en mémoire restent-ils finis, comment le système réagit-il à d'éventuelles perturbations ?
- certains problèmes d'*optimisation* : par exemple, minimiser le nombre de ressources (machines, palettes, processeurs) nécessaires pour réaliser un taux de production donné.

En l'absence de théorie standard des systèmes à événements discrets, de multiples techniques ont pu être appliquées, certaines classiques, d'autres plus exotiques. Nous mentionnons en particulier :

- Les approches "expérimentales" qui simulent ces systèmes sur ordinateur. Nous n'insisterons pas ici sur l'importance pratique de la simulation, qui constitue souvent le point de passage obligé avant la mise en place de tout modèle. Il y a tout un corpus théorique autour de la simulation, dont l'objet est de fabriquer de bons estimateurs (économes en temps de calcul), surtout pour des quantités intéressantes et difficiles (coûteuses) à calculer avec une précision raisonnable (gradients, fonctions d'événements rares). Nous mentionnerons particulièrement les approches de type "analyse de perturbation" [66, 39] qui visent à déterminer l'effet d'une perturbation sur le système sans avoir à le re-simuler, ce qui permet en particulier de mettre en œuvre des algorithmes d'optimisation de type gradient stochastique.
- Les modélisations probabilistes classiques (par exemple par des réseaux de Files d'attente ou des chaînes de Markov). L'on peut mettre en évidence des bonnes classes de systèmes pour lesquels on a certaines formules analytiques (par exemple, les réseaux de Jackson) ou pour des systèmes dont la description totale est trop complexe, on cherchera des résultats simples asymptotiques, un peu dans l'esprit de la mécanique statistique qui met en évidence des lois limites pour des systèmes de grande taille.
- Réseaux de Petri (temporisés) : il s'agit d'un langage graphique propre à la description et l'analyse des systèmes à événements discrets.
- Systèmes de transitions finis (automates finis). Cette approche traite principalement du comportement *logique* de ces systèmes : on cherche à vérifier certaines propriétés comme l'absence de blocage ou l'équité entre les différentes tâches à servir. L'on peut exprimer les propriétés requises pour les trajectoires du système dans certaines logiques dites *temporelles*[1] Ou bien, comme dans la théorie de Ramadge & Wonham, on exprimera les spécifications du système par l'appartenance à un langage légal (reconnu par un automate fini dans les cas les plus simples). Il y a ensuite toute une algorithmique qui permet de vérifier des sous classes de propriétés, que l'on ramènera par exemple à des problèmes d'accessibilité dans des graphes (en général gros). Pour résister un peu à la[2] "Np-complète dérision", on ne représente pas toujours l'automate en extension (par sa table), mais on code parfois sa fonction de transition par une formule Booleenne, qui peut se représenter de manière expérimentalement compacte sous forme de BDD (diagramme de décision binaire).
- Systèmes dynamiques sur des corps finis. On code les événements et l'état du système par des vecteurs à coefficients dans $\mathbb{Z}/p\mathbb{Z}$ (corps des entiers modulo p pour p premier) et l'on décrit la dynamique du système par des équations récurrentes polynômiales. Le pouvoir d'expression est identique aux systèmes de transition finis, mais la nouveauté consiste a voir les trajectoires comme des solutions d'un système dynamique polynomial, ce qui permet de ramener des problèmes dynamiques (e.g. calculs de points fixes, calcul d'ensembles invariants modulo l'action des commandes) à des problèmes de variétés algébriques ou d'idéaux, qui sont bien répertoriés mais assez coûteux en temps de calcul.

[1] Le terme "temporel" dit simplement que l'on parle des trajectoires (il s'agit d'un temps logique, à ne pas confondre avec le temps physique). Pour introduction détaillée, voir A. Arnold [2].

[2] Nous avons emprunté l'expression au poème de A. Lentin qui fait prélude à [51]. Le terme "curse of dimensionality" est sans doute plus classique.

– Systèmes dynamiques sur des algèbres exotiques (de type max, $+$ ou min, $+$).

Dans ce cours, nous utiliserons essentiellement trois de ces outils :

– les réseaux de Petri (temporisés), qui sont à la base de la spécification, représentation et simulation de ces systèmes.
– l'approche "systèmes dynamiques linéaires", qui est analogue à la théorie usuelle classique des systèmes linéaires, mais après un changement de structure algébrique. Ce cadre ne s'applique qu'à une sous classe de systèmes à événements discrets.
– l'approche à la Ramadge & Wonham via la théorie des automates. Celle-ci a un pouvoir de modélisation plus grand —on peut traiter certains phénomènes de concurrence. On privilégie les problèmes de nature logique[3](par exemple absence de blocage). Ici encore, le point de vue est celui de l'automaticien qui voit le système à événement discret comme un système dynamique et lui étend les notions familières (commandabilité, observabilité) à l'aide des outils standards de théorie des langages formels.

La littérature sur les réseaux de Petri est fort riche, et comprend en particulier de nombreux résultats analytiques. Ici, nous n'utilisons les réseaux de Petri (en fait, principalement, les graphes d'événements) qu'à des fins de modélisation. On décrit les systèmes en termes de réseau de Petri, puis on les analyse au vu des équations linéaires associées. C'est dire que ce cours se limite aux techniques élémentaires de nature *algébrique* utiles à l'étude des systèmes à événements discrets. Nous pensons qu'il s'agit là de la meilleure introduction à ces systèmes, dans la mesure où ces approches algébriques (via la théorie des automates et les systèmes (max, $+$)-linéaires) produisent les résultats les plus simples relatifs à des sous-classes de systèmes à événements discrets. Il faut bien voir ici que les systèmes à événements discrets forment une classe trop large pour que l'on puisse prétendre donner des résultats précis généraux. Il ne s'agit pas ici de tout résoudre, mais de distinguer ce qui se résoud et ce qui ne se résoud pas par la théorie et de comprendre la pertinence physique des sous-classes mises en évidence (essentiellement les graphes d'événements et les automates). En outre, ces sous-classes ont valeur de *modèles* pour passer aux systèmes à événements discrets plus généraux, pour lesquels on aura des difficultés supplémentaires. Par exemple, la théorie des graphes d'événements stochastiques [4] se comprend mieux si l'on sait déjà ce qui se passe dans le cas déterministe. De même, la théorie des réseaux de Petri (non temporisés) est moins aisée que la théorie des automates de base dans la mesure où les langages qui décrivent les comportement des réseaux de Petri sont plus généraux que les langages dits réguliers (ou rationnels) qui sont reconnus par des automates finis [54, 61].

1.1.2 Quelques exemples de Systèmes à Événements Discrets

EXEMPLE 1.1.2.1 *(Assemblage).* On considère le processus suivant. Dans un atelier, on assemble une pièce de type A et une pièce de type B ce qui prend une durée τ. Si $u_A(t)$ (resp. $u_B(t)$) dénote le nombre de pièces de type A (resp. B) arrivées jusqu'à l'instant t, et $y(t)$ représente le nombre de pièces produites à l'instant t, on a l'équation :

$$y(t) = \min(u_A(t-\tau), u_B(t-\tau)) \ . \tag{1.1}$$

[3] Il est possible d'intégrer le temps dans ce formalisme au prix d'une complexité plus grande. On peut comme Brandin et Wonham, rajouter une nouvelle lettre t dont l'occurrence représente un top d'horloge [15]. On peut aussi à la suite d'Alur, Courcoubetis et Dill [1] introduire des *automates temporisés*, c'est-à-dire des automates dont les transitions sont conditionnées par les valeurs de compteurs. Ce dernier formalisme est plus puissant, en ce qu'il autorise la modélisation d'un temps continu (réel) et non discret. On peut aussi utiliser des automates à multiplicités sur le semi-anneau (max,+) [37].

Les applications u_A, u_B, y qui mesurent des quantités méritent le nom de *compteurs*. Dualement, on peut introduire les *fonctions dateur* : $u'_A(n)$ = date d'arrivée de la n-ième pièce de type A, $u'_B(n) = \ldots$, $y'(n)$ = date de production de la n ième pièce. On a alors

$$y'(n) = \tau + \max(u'_A(n), u'_B(n)) \ . \tag{1.2}$$

EXEMPLE 1.1.2.2 *(Contrainte de débit)*. Considérons une unique machine pouvant traiter une seule pièce à la fois pendant τ unités de temps. Soit $u(t)$ le nombre de pièces brutes arrivées à l'instant t et $y(t)$ le nombre de pièces achevées au même instant. On peut écrire :

$$y(t) = \min(u(t-\tau), y(t-\tau)+1) \ . \tag{1.3}$$

Dualement, en notant $u'(n)$ la date d'arrivée de la n ième pièce brute et $y'(n)$ sa date d'achèvement, on a

$$y'(n) = \max(u'(n)+\tau, \tau + y'(n-1)) \ . \tag{1.4}$$

EXEMPLE 1.1.2.3 *(Cantonnement)*. Dans une version simplifiée, une portion de voie ferrée fonctionne comme suit : un train ne peut rentrer que si le train précédent est déjà sorti (sinon le feu est rouge). Les trains sont supposés traverser un canton en un temps constant τ. Soient $u(t)$ le nombre de trains arrivés à l'entrée du canton à l'instant t, $x_1(t)$ le nombre de trains rentrés, et $x_2(t)$ le nombre de trains sortis. On a

$$\begin{aligned} x_1(t) &= \min(x_2(t)+1, u(t)) \\ x_2(t) &= x_1(t-\tau) \ . \end{aligned}$$

En éliminant x_1, on obtient $x_2(t) = \min(x_2(t-\tau)+1, u(t-\tau))$, soit une contrainte de débit identique à (1.3) ci-dessus, ce qu'on aurait pu voir directement comme suit. Du point de vue des comportements temporels, il y a isomorphisme entre une machine et un canton : le train joue le role d'une pièce, et la contrainte d'exclusion mutuelle des trains sur un canton revient à dire que la machine ne peut traiter qu'une pièce à la fois.

EXEMPLE 1.1.2.4 *(Communications Inter-Processeur)*. Un processeur A adresse des messages vers un processeur B de la manière suivante. Les messages prêts à l'envoi sont placés en attente dans un tampon de capacité suffisante. A envoie le premier message à B ce qui prend un temps τ (que l'on pourra supposer constant si la taille des messages est fixe). A attend d'avoir reçu un accusé de réception de B (qui met τ' unités de temps pour parvenir de B à A) pour en envoyer un nouveau. Soit $u(t)$ le nombre de messages arrivés dans le tampon jusqu'à l'instant t, et soit $x_A(t)$ le nombre de messages envoyés par A jusqu'à l'instant t. On a

$$x_A(t) = \max(x_A(t-\tau-\tau')+1, u(t)) \ ,$$

où le lecteur, sans doute ecœuré, reconnait encore une variante de l'équation (1.3). Le même système dynamique apparait ainsi déguisé dans des applications différentes, d'où l'intérêt de développer une théorie des sytèmes à événements discrets qui parle de manière unifiée de ces systèmes (faisons un peu de prosélytisme).

EXEMPLE 1.1.2.5 *(Le professeur avisé)*. Un enseignant arrive à l'heure u' pour faire son cours d'1h. Il a n élèves inscrits. L'élève i arrive à l'heure x'_i. Calculons l'heure y' de fin de cours pour quelques politiques naturelles. Si notre enseignant attend tous les élèves pour commencer, le cours finira à

$$y' = 1 + \max(u',\ \max_{1\le i\neq n} x'_i) \ ,$$

où l'on reconnait une équation avec les lois max assez similaire aux équations écrites plus haut pour les dateurs, par ex. (1.2). Les choses étant ce qu'elles sont, une telle politique n'est pas toujours raisonnable, et notre enseignant peut choisir de ne jamais attendre plus de 1/4 d'heure, quitte à faire cours devant une classe vide. Le cours finira alors à :

$$y' = 1 + \min(u' + 1/4, \max(u',\ \max_{1\le i\neq n} x'_i)) \ . \tag{1.5}$$

Une politique plus avisée peut être de se fixer un quorum $q \le n$ d'élèves, et de commencer dès que les q premièrs élèves sont présents. On trouve alors

$$y' = 1 + \max\Big(u', \big(\min_{\substack{I\subset\{1,\dots,n\}\\ \mathrm{card}\, I = q}} \max_{i\in I} x'_i\big)\Big) \ . \tag{1.6}$$

Ce que l'on pourra retenir de cet exemple, c'est que les dates des événements, dans des systèmes à synchronisation limitée (quand on attend, mais pas trop) peuvent "souvent" s'écrire en hybridant avec la loi min les équations donnant les dates des systèmes purement synchronisés, lesquelles font seulement intervenir les lois max, et $+$.

EXEMPLE 1.1.2.6 *(Magasin de taille finie).* On considère un stock pouvant contenir au plus 3 pièces. On a les deux événements

a	une pièce entre dans le stock
b	une pièce est déstockée.

Ce système est représenté par le graphe de la Figure 1.1. Il s'agit d'un *automate* (déterministe). Il y a toute une théorie des automates (dont on introduit les éléments au chapitre 5). Ici, il nous suffit de savoir que de manière élémentaire, un automate est un graphe dont les sommets représentent les *états* possibles du systèmes et les arcs les changements d'états sous l'effet des événements (les lettres). L'état initial est distingué par une flèche rentrante. Ici, le sommet 0 représente l'état "0 pièce en stock" (initial), le sommet 1 une pièce en stock, etc. Par exemple, de l'état 1, les deux événements a, b sont admissibles (et conduisent respectivement à l'état 2 ou à l'état 0, comme les flèches l'indiquent). On cherche l'ensemble des séquences d'événements a et b admissibles (i.e. compatibles avec la capacité du magasin). Pour cela, à chaque chemin du graphe, on associe le mot lu de droite à gauche formé des lettres valuant les arcs. Ainsi, au chemin $0 \xrightarrow{a} 1 \xrightarrow{a} 2 \xrightarrow{b} 1$ correspond le mot baa. Par contre, le mot ab ne correspond pas à un comportement possible de l'automate (l'événement "b" arrivant à l'état 0 fait vendre une pièce que l'on n'a pas en stock). Plus généralement, il est clair que *l'ensemble des séquences d'événements admissibles correspond à l'ensemble des chemins du graphe partant de l'état initial* 0.

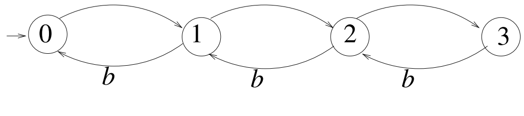


FIG. 1.1: Magasin de trois unités

De manière plus précise, on spécifie l'automate par un alphabet Σ (en l'occurrence $\Sigma = \{a, b\}$), un ensemble d'états Q (ici $Q = \{1, 2, 3\}$), un état initial q_0 (ici $q_0 = 0$) et une fonction de transition *partielle* (i.e. non nécessairement partout définie)

$$\delta : \Sigma \times Q \to Q$$

$$q' = \delta(u, q) \tag{1.7}$$

est le nouvel état si l'on lit la lettre u à partir de l'état q (ex : $\delta(a, 2) = 3$, $\delta(b, 2) = 1$). On peut donc voir les automates comme une version finie des systèmes en temps discret familiers à l'automaticien, qui sont de la forme

$$x_{n+1} = f(u_n, x_n), \quad x_n \in \mathbb{R}^p, \; u_n \in \mathbb{R}^k$$

clairement analogue à (1.7).

EXEMPLE 1.1.2.7 *(Chat et souris).* On considère un prédateur et une proie se déplaçant (de manière imprévisible et asynchrone[4]) dans un ensemble de pièces communiquant par certaines trappes. Chaque trappe est réservé pour l'usage exclusif d'un seul animal, i.e. seul le chat peut emprunter les trappes c_1, c_2 et seule la souris peut emprunter les trappes m_1, m_2. Notons "c_2" l'événement "le chat passe par la trappe c_2", et ainsi de suite pour les autres

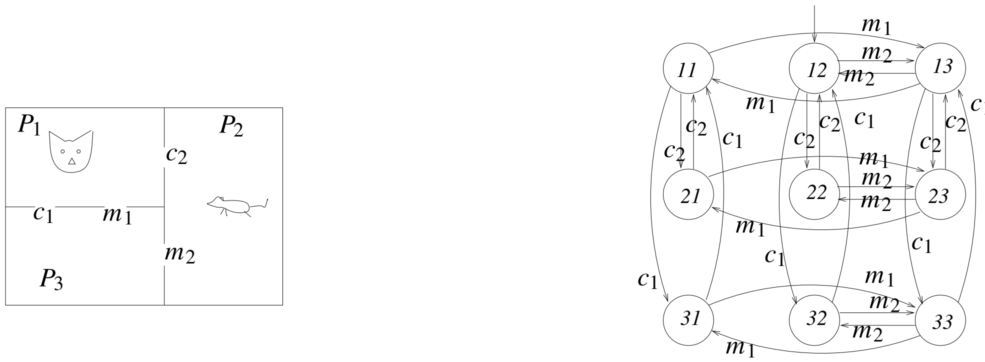


FIG. 1.2: Chat et souris dans un labyrinthe et automate correspondant

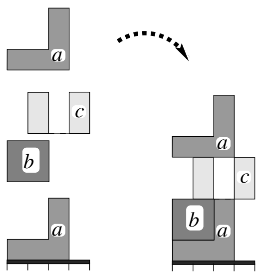
trappes. On se convainc que l'ensemble des comportements possibles du chat et de la souris est représenté par l'*automate* à droite de la Figure 1.2. Les sommets du graphe sont repérés par des couples "(i, j)" qui signifient "chat dans la pièce i et souris dans la pièce j". Les arcs représentent les changements d'état relatifs aux mouvements d'un seul des deux animaux, notés par des lettres c_i ou m_i (les mouvements sont supposés immédiats, et effectuent à des instants arbitraires, on exclut en outre le cas où le chat et la souris changent de pièce exactement au même instant). Les états diagonaux de l'automate (i.e. les étas (i, i), pour $i = 1, \ldots, 3$, où le chat peut manger la souris) peuvent être qualifiés d'indésirables. Le but de la théorie exposée au chapitre 5 est de synthétiser des contrôles (par exemple de bloquer certaines trappes en fonction de la position du chat et de la souris) de manière à garantir un bon comportement du système, particulièrement en présence de contraintes (impossibilité de verouiller certaines trappes), voire même en observation partielle (lorsque l'on ne peut voir si certaines pièces sont occuppées).

EXEMPLE 1.1.2.8 *(Jeu de Tetris et systèmes à ressources partagées).* Un "jeu de Tetris" ou système à ressources partagées peut être formalisé de la manière suivante. On se donne

[4]Le terme asynchrone signifie que le prédateur et la proie peuvent effectuer leurs mouvements à des instants physiques indépendants. On parle au contraire de système synchrone (par exemple pour un microprocesseur) lorsque toutes les actions ont lieu à des temps physiques donnés par les tops d'une horloge commune.

un ensemble de *positions* (en abscisse) ou de *ressources* $\mathcal{R}$ (e.g. $\mathcal{R} = \{1, \dots, n\}$). Nous appellerons *pièce* (ou *tâche*) a un bloc rigide éventuellement non connecté, représenté géométriquement par un ensemble de positions (ressources) occupées $R(a) \subset \mathcal{R}$, un contour bas (dates de début d'exécution sur les ressources) $\ell(a) : R(a) \to \mathbb{R}$, un contour haut (dates de libération des ressources) $h(a) : R(a) \to \mathbb{R}$, avec bien-sûr : $\forall a \in R(a), h(a) \geq \ell(a)$. Une pièce sera représenté par la région du plan $\mathcal{R} \times \mathbb{R}$: $P_a = \{(r, y) \in R(a) \times \mathbb{R} \mid \ell(a)_r \leq y \leq h(a)_r\}$, ce que l'on interprétera comme suit : la tâche a requiert l'ensemble des ressources (machines, processeurs, main d'œuvre) $R(a)$, et chaque ressource $r \in R(a)$ est employée de l'instant $\ell(a)_r$ à l'instant $h(a)_r$. Une pièce P_a peut être translatée verticalement d'une constante λ, ce qui donne la nouvelle région $\ell'(a) = \lambda + \ell(a),\ h'(a) = \lambda + h(a)$. Physiquement, cela correspond à exécuter la tâche λ unités de temps plus tard (ou $-\lambda$ unités de temps plus tôt si $\lambda < 0$). Un *sol* ou une *condition initiale* est un vecteur ligne $g \in \mathbb{R}^{\mathcal{R}}$: la ressource r devient disponible initialement à l'instant g_r. Si nous laissons tomber les k pièces $a_1 \dots a_k$, dans cette ordre, sur le sol g (on laisse tomber les pièces selon les lois de la gravité, en interdisant les translations horizontales et les rotations, exactement comme dans le vrai jeu de Tetris, voir la figure 1.3), nous obtenons un *tas de pièces*. Le contour haut $x(w)$ du tas $w = a_1 \dots a_k$ est le vecteur ligne dans $\mathbb{R}^{\mathcal{R}}$, dont la composante r est égale à la hauteur de crête du tas au droit de la ressource r, i.e. à la date de libération de la ressource r à l'issue de l'exécution de la suite de tâches w. La *hauteur* du tas est par définition $y(w) = \max_{r \in \mathcal{R}} x(w)_r$. Physiquement, $y(w)$ donne ce que la littérature de l'ordonnancement appelle le *makespan*, c'est-à-dire le temps d'exécution de la suite de tâches, ou de manière équivalente, la date de libération de la dernière ressource occupée. On établit aisément la récurrence suivante qui détermine complètement la dynamique au plus tôt du système ($\_$ dénote le tas vide) :

$$\begin{aligned} x(\_) = g, \qquad \forall r \in R(a),\ x(wa)_r &= \max_{s \in R(a)} [h(a)_r - \ell(a)_s + x(w)_s] \ , \\ \forall r \notin R(a),\ x(wa)_r &= x(w)_r \ . \end{aligned} \tag{1.8}$$



$R(c) = \{2, 4\}, \ell(c) = [\cdot, 0, \cdot, 0], h(c) = [\cdot, 2, \cdot, 2]$

$R(b) = \{1, 2\}, \ell(b) = [0, 0, \cdot, \cdot], h(b) = [2, 2, \cdot, \cdot]$

$R(a) = \{1, 2, 3\}, \ell(a) = [0, 0, 0, \cdot], h(a) = [1, 1, 3, \cdot]$

FIG. 1.3: Un jeu de Tetris à trois types de pièces et quatre ressources

1.2 De l'intérêt des algèbres exotiques

Arrivé à ce point, le lecteur a mérité une petite devinette : quel est le point commun entre les systèmes traités ci-dessus ? Cette section donne une première réponse : si l'on exclut les politiques trop avisées du professeur (Eq. (1.5) et (1.6)), nous allons voir que tous ces systèmes se représentent par des équations linéaires dans certaines structures algébriques exotiques. Nous verrons pour conclure que même l'exemple du professeur avisé, qui n'est pas linaire, partage avec le cas linéaire certaines propriétés fondamentales (monotonie, et homogénéité).

1.2.1 Systèmes (min,+)-linéaires

Considérons l'ensemble $\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$, muni du min (noté additivement, par exemple $2\oplus 3 = 2 = \min(2, 3)$) et de l'addition usuelle notée multiplicativement ($2 \otimes 3 = 5$, $0 \otimes 1 = 1$). Ces notations sont justifiées par le fait que les propriétés usuelles sont vérifiées :

$$\begin{aligned}
&(a \oplus b) \oplus c = a \oplus (b \oplus c) = \min(\min(a, b), c) = \min(a, b, c)\\
&a \oplus b = b \oplus a = \min(a, b)\\
&(a \otimes b) \otimes c = a \otimes (b \otimes c) = a + b + c\\
&(a \oplus b) \otimes c = a \otimes c \oplus b \otimes c = \min(a, b) + c = \min(a + c, b + c) \enspace .
\end{aligned} \tag{1.9}$$

Nous appellerons $\mathbb{R}_{\min}$ cette structure algébrique. Posons $\varepsilon = +\infty$. On a

$$\varepsilon \oplus x = x = \min(+\infty, x), \quad \varepsilon \otimes x = \varepsilon = +\infty + x = +\infty$$

ce qui montre que ε est l'élément neutre pour la somme et qu'il est absorbant pour le produit (ε joue le rôle du "zéro"). 0 est l'élément neutre pour le produit. L'équation (1.2) relative au processus d'assemblage se réécrit :

$$y(t) = u_A(t - \tau) \oplus u_B(t - \tau) \enspace .$$

L'équation du limitateur de débit (1.3) devient

$$y(t) = 1 \otimes y(t - \tau) \oplus u(t - \tau)$$

(noter que le 1 ne peut pas s'oublier). Sous cette forme, il est clair que ces systèmes sont *linéaires* (i.e. que si (u_1, y_1) et (u_2, y_2) sont des couples de solutions, $(u_1 \oplus u_2, y_1 \oplus y_2)$ et pour λ scalaire, $(\lambda u_1, \lambda y_1)$ dont également des couples de solutions).

1.2.2 Systèmes (max,+)-linéaires

Considérons maintenant l'ensemble $\mathbb{R}\cup\{-\infty\}$ muni du max (noté additivement, $2\oplus 3 = 3 = \max(2, 3)$) et de l'addition notée multiplicativement ($2 \otimes 4 = 6$). Nous noterons $\mathbb{R}_{\max}$ cette structure. Soit $\varepsilon = -\infty$. On a $\varepsilon \oplus x = x$ et $\varepsilon \otimes x$, i.e. ε est le zéro de $\mathbb{R}_{\max}$. L'équation aux dateurs du processus d'assemblage s'écrit maintenant dans $\mathbb{R}_{\max}$:

$$y'(n) = \tau \otimes (u'_A(n) \oplus u'_B(n)) \enspace .$$

De même, pour le limitateur de débit,

$$y'(n) = \tau \otimes u'(n) \oplus \tau \otimes y'(n - 1) \enspace .$$

Ici encore, la linéarité est claire. Les deux structures algébriques $\mathbb{R}_{\max}$ et $\mathbb{R}_{\min}$ sont des cas particuliers de *dioïde* (structure que nous définirons plus loin et qui fournit le cadre approprié pour traiter une classe de systèmes à événements discrets).

1.2.3 Description des langages de chemins par des récurrences linéaires

On considère à nouveau l'exemple du magasin à trois unités de stock 1.1. On note

$$\{a,b\}^* \stackrel{\text{def}}{=} \{\_, a, b, aa, ab, ba, bb, aaa, \dots ,\}$$

l'ensemble des mots formés seulement des lettres a et b. Nous avons admis le mot vide (contenant 0 occurrences de a et b), que nous avons noté "_". A chaque mot correspond une séquence d'événements. On définit le produit de deux mots par simple juxtaposition (par exemple, $ab \otimes b = abb$). Ce produit est associatif. Le mot vide est élément neutre pour le produit. On considère maintenant $\mathcal{P}(\{a,b\}^*)$ (ensemble des parties de $\{a,b\}^*$. Un élément de $\mathcal{P}(\{a,b\}^*)$ est un ensemble de mots (on dit aussi un langage). On munit $\mathcal{P}(\{a,b\}^*)$ de l'union (notée additivement par "$\oplus$") et du produit des langages défini par

$$L \otimes L' = \{l \otimes l' \mid l \in L,\ l' \in L'\} \ .$$

Par exemple, $\{a,b\} \otimes \{bb\} = \{abb, bbb\}$. Posons $\varepsilon = \emptyset$ et $e = \{\_\}$. On vérifie aisément que les propriétés de type associativité, commutativité de l'addition et distributivité comme en (1.9) sont encore vraies, ce qui justifie les notations $\oplus$ et $\otimes$. Le langage vide ε est neutre pour la somme et le langage e réduit au seul mot vide est neutre pour le produit. On cherche à calculer l'ensemble des événements possibles, c'est à dire l'ensemble des chemins du graphe 1.1 allant du sommet 0 à un sommet quelconque. On introduit à cet effet

$$X^n_{ij} = \text{ensemble des chemins de } j \text{ à } i \text{ de longueur } n \ .$$

On a $X^0_{ii} = e$, $X^0_{ij} = \emptyset$ pour $i \neq j$. Au vu du graphe, il est clair que

$$\begin{array}{lcl} X^{n+1}_{10} & = & X^n_{11} \otimes \{a\} \\ X^{n+1}_{00} & = & X^n_{01} \otimes \{a\} \\ X^{n+1}_{01} & = & X^n_{02} \otimes \{a\} \oplus X^n_{00} \otimes \{b\} \\ X^{n+1}_{11} & = & X^n_{12} \otimes \{a\} \oplus X^n_{10} \otimes \{b\} \\ \dots & & \end{array} \tag{1.10}$$

(par exemple, la première équation exprime qu'un chemin qui part de 0 commence forcément par a). Autrement dit, l'ensemble des chemins du graphe est donné par un système fini d'équations récurrentes linéaires dans la structure algébrique $(\mathcal{P}(\{a,b\}^*), \cup, .)$. En poursuivant les calculs dans (1.10), on obtient entre autres

$$X^1_{00} = \emptyset,\ X^1_{10} = \{a\}, X^1_{01} = \{b\}, X^2_{00} = X^1_{01} \otimes \{a\} = \{ba\}, X^2_{02} = \{bb\} \dots$$

$$X^4_{00} = X^3_{01} \otimes \{a\} = (X^2_{20}\{a\} \oplus X^2_{00}\{b\})\{a\} = \{bbaa, baba\} \ ,$$

ce qui corrobore l'intuition graphique.

1.2.4 Semi-anneaux et dioïdes

Le lecteur aura noté que les structures algébriques utilisées ci-dessus vérifient toutes les propriétés combinatoires usuelle de la somme et du produit (associativités, commutativité de la somme, distributivité), et en outre la propriété plus inhabituelle $a \oplus a = a$ ($\min(a,a) = a, \max(a,a) = a, a \cup a = a$). Cela motive les définitions suivantes.

DÉFINITION 1.2.4.1 (SEMI-ANNEAU). On appelle *semi-anneau* un ensemble $\mathcal{D}$ muni d'une loi associative (notée additivement "$\oplus$"), commutative, d'élément neutre ε, et d'une loi associative (notée multiplicativement "$\otimes$"), d'élément neutre e, telles que :

1. $\forall a, b, c \in \mathcal{D}$, $(a \oplus b) \otimes c = (a \otimes c) \ \oplus \ (b \otimes c)$
2. $\forall a, b, c \in \mathcal{D}$, $c \otimes (a \oplus b) = (c \otimes a) \ \oplus \ (c \otimes b)$
3. $\forall a \in \mathcal{D}$, $a \otimes \varepsilon = \varepsilon \otimes a = \varepsilon$.

On a là toutes les propriétés de structure des anneaux, sauf qu'il n'est pas requis que $\oplus$ soit une loi de groupe.

Lorsque $\oplus$ vérifie

$$a \oplus a = a \ , \tag{1.11}$$

on dit que $\mathcal{D}$ est un *semi-anneau idempotent*, ou *dioïde*. Si $(\mathcal{D} \setminus \{\varepsilon\}, \otimes)$ est un groupe, on qualifie $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$ de *semi-corps*. Un semicorps dont l'addition vérifie (1.11) sera dit *idempotent*. Un semi-anneau ou semicorps sera dit *commutatif* lorsque le produit est commutatif. On notera ordinairement le produit $a \otimes b$ par $a.b$ ou ab.

EXEMPLE 1.2.4.2 *(Dioïde des booléiens).* L'ensemble $\mathbb{B} \stackrel{\text{def}}{=} \{\varepsilon, e\}$, muni des lois $\oplus$ et $\otimes$ définies ci dessous est un dioïde commutatif, dit dioïde des booléiens.

$\oplus$	ε	e
ε	ε	e
e	e	e

$\otimes$	ε	e
ε	ε	ε
e	ε	e

Cette table revient à interpréter ε comme "faux", e comme "vrai", $\oplus$ comme "ou logique", et $\otimes$ comme "et logique". On notera que tout dioïde admet $\mathbb{B}$ comme sous-dioïde.

EXEMPLE 1.2.4.3 *(Algèbre* $(\max, +)$*).* La structure $\mathbb{R}_{\max}$ définie plus haut est un dioïde (et même un semicorps idempotent). On l'appelle aussi parfois "algèbre $(\max, +)$".

EXEMPLE 1.2.4.4 *(Algèbre* $(\min, +)$*).* La structure $\mathbb{R}_{\min}$ définie plus haut (traditionnellement appelée "algèbre $(\min, +)$") est également un dioïde. L'application $x \mapsto -x$ est un isomorphisme de $\mathbb{R}_{\max}$ sur $\mathbb{R}_{\min}$.

EXEMPLE 1.2.4.5 *(Dioïde des parties de* $\mathbb{R}$*).* L'ensemble des parties de $\mathbb{R}$, muni de l'union et de la somme vectorielle est un dioïde.

EXEMPLE 1.2.4.6 *(Dioïde des langages sur* $\{a, b\}$*).* La structure $(\mathcal{P}(\{a, b\}^*), \cup, .)$ définie en §1.2.3 est un dioïde.

AVERTISSEMENT 1.2.4.7. Semi-anneau est une francisation du terme "semiring" qui est bien établi dans la littérature de langue anglaise. Il faut aussi savoir qu'une certaine tradition française, due sans doute à Paul Dubreil (l'inventeur des demi-groupes, ou semi-groupes comme nous écrirons ici) appelait *demi-anneaux* les semi-anneaux et réservait le terme de semi-anneau a un demi-anneau symmétrisable (i.e. plongeable dans un anneau, par exemple $\mathbb{N}$ plongeable dans $\mathbb{Z}$ est un semi-anneau au sens ancien du terme). Cette tradition semble aujourd'hui tomber en déshérence à cause du conflit avec le terme anglais. Nous avons opté ici pour l'emploi systématique du terme semi-anneau pour des structures non nécessairement symmétrisables.

EXERCICE 1.2.4.8 *(Formule du binôme dans les dioïdes).* Donner une formule pour $(a \oplus b)^n$ dans un dioïde commutatif. Donner une formule plus simple dans le dioïde $\mathbb{R}_{\max}$.

EXERCICE 1.2.4.9 *(suite).* (¶sans l'indication) Soit $\mathcal{D}$ un dioïde commutatif dont le produit est simplifiable (i.e. $ax = ay$ et $a \neq \varepsilon$ entraîne $x = y$). Montrer que

$$(a \oplus b)^n = a^n \oplus b^n \quad .$$

[Indication : on pourra calculer $(a \oplus b)(a \oplus b)^2$ et $(a \oplus b)(a^2 \oplus b^2)$]

Dans un semi-anneau, on peut parler de matrices. Etant données $A, B \in \mathcal{D}^{n\times k}$ et $C \in \mathcal{D}^{k\times p}$, on pose

$$(A \oplus B)_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} A_{ij} \oplus B_{ij}, \quad (A \otimes C)_{ij} \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{l=1}^{k} A_{ik} \otimes C_{kj} \quad .$$

L'ensemble des matrices carrées de taille n est lui même un semi-anneau.

EXEMPLE 1.2.4.10. Soit $A = \begin{bmatrix} 3 & 7 \\ 2 & 4 \end{bmatrix}$ dans l'algèbre $(\max, +)$. On a

$$A^2 = \begin{bmatrix} \max(3+3, 7+2) & \max(3+7, 7+4) \\ \max(2+3, 4+2) & \max(2+7, 4+4) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 & 11 \\ 6 & 9 \end{bmatrix} \quad .$$

EXEMPLE 1.2.4.11 *(Tetris)*. Pour l'exemple du jeu de Tetris (ou des systèmes à ressources partagées), il est immédiat de reconnaître dans (1.8) un produit de matrices dans les semi-anneau $(\max, +)$

$$x(wa) = x(w)M(a) \quad ,$$

où le coefficient $M(a)_{rs}$ vaut $h(a)_r - \ell(a)_s$ si $s, r \in R(a)$, $M(a)_{rr} = 0$ quand $r \notin R(a)$, et où les autres coefficients sont $-\infty$.

Présentons, pour l'agrément du lecteur, quelques autres exemples plus ou moins classiques de semianneaux.

EXEMPLE 1.2.4.12 *(Semianneau tropical et autres semi-anneaux max-plusiens)*.
L'ensemble $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$, muni des lois min et $+$, est un dioïde, appelé semi-anneau tropical, en l'honneur de son inventeur, I. Simon [65]. On notera cette structure $\mathbb{N}_{\min}$. C'est bien-sûr un *sous-dioïde*[5] de $\mathbb{R}_{\min}$. Plus généralement, à n'importe quel sous-monoïde M de $(\mathbb{R}, +)$ sont associés les dioïdes $M_{\min} = (M \cup \{+\infty\}, \min, +)$ et $M_{\max} = (M \cup \{-\infty\}, \max, +)$. Ainsi, $\mathbb{Z}_{\min} = (\mathbb{Z} \cup \{+\infty\}, \min, +)$.

EXEMPLE 1.2.4.13 *(Semi-corps de Maslov et Pap)*. Pour tout réel non-nul p, définissons la loi $+_p : \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+$:

$$a +_p b = (a^p + b^p)^{\frac{1}{p}} \quad . \tag{1.12}$$

Évidemment, $\mathbb{R}_p^+ \stackrel{\text{def}}{=} (\mathbb{R}^+, +_p, \times)$ est un semi-corps, isomorphe à $\mathbb{R}_1^+ = (\mathbb{R}^+, +, \times)$, via l'application $x \mapsto x^p$ pour toute valeur de p. Cependant,

$$\lim_{p\to+\infty} a +_p b = \max(a, b) \quad ,$$

ce qui nous permet de voir le semicorps idempotent "max-fois" $\mathbb{R}_\infty^+ = (\mathbb{R}^+, \max, \times)$, isomorphe à $\mathbb{R}_{\max}$ (via $x \mapsto \log x$) comme la limite des semi-corps $\mathbb{R}_p^+$. Cette exemple exprime donc formellement que l'algèbre max-plus est la limite de l'algèbre usuelle.

---

[5]Les notions de sous-semianneau, sous-dioïde, morphisme de semi-anneau ou de dioïde, sont définies comme en algèbre habituelle. Un sous-semi-anneau S' d'un semi-anneau S est un sous-ensemble de S, contenant les éléments neutres ϵ et e, et stable par somme et produit. Un morphisme d'un semi-anneau $(S, \oplus, \otimes)$ de zero ε et d'unité e vers un semi-anneau $(S', \oplus, \otimes)$ de zero ε' et d'unité e' est une application $f : S \to S'$ telle que $f(a \oplus b) = f(a) \oplus' f(b)$, $f(a \otimes b) = f(a) \otimes (b)$, $f(e) = e'$, $f(\varepsilon) = \varepsilon'$. Comme il se doit, un semi-anneau S est donc sous-semianneau de S' s'il s'injecte dans S' et si l'injection est un morphisme de semi-anneau.

EXEMPLE 1.2.4.14 *(Semi-anneau goulot ou flou).* L'ensemble [0, 1], muni des lois max et min est un semi-anneau parfois appelé "algèbre goulot", où algèbre floue. C'est en fait un cas très particulier de treillis (voir Chap. 2). Nous parlerons peu de ces structures ici.

EXERCICE 1.2.4.15. Un élément x d'un dioïde peut il avoir un symétrique (i.e. un élément x' t.q. $x \oplus x' = \varepsilon$) ?

EXERCICE 1.2.4.16. Cet exercice a été communiqué à l'auteur par Gérard Duchamp. 1. Montrer que pour tout p entier positif impair, $\mathbb{R}$ muni de la somme $+_p$ définie dans l'exemple 1.2.4.13, et du produit usuel est un corps, isomorphe au corps des réels. 2. Monter que pour tout $a, b \in \mathbb{R}$, la limite $a +_\infty b \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{k\to\infty} a +_{2k+1} b$ existe, et donner une charactérisation simple de la loi $+_\infty$. 3. Montrer que l'ensemble $\mathbb{R}$, muni de la somme $+_\infty$ et du produit usuel satisfait tous les axiomes de structure des corps, sauf un. Lequel ?

EXERCICE 1.2.4.17 *(Compacts convexes).* 1. Montrer que l'ensemble des compacts convexes de $\mathbb{R}^n$, avec pour somme

$$A \oplus B = \operatorname{conv}(A \cup B)$$

(l'enveloppe convexe de l'union de A et B) et pour produit $\otimes$: $A \otimes B = A + B = \{a + b \mid a \in A,\ b \in B\}$, est un dioïde. 2. (¶) Montrer que le produit de ce dioïde est *simplifiable* (i.e. $A \otimes C = B \otimes C$ et $C \neq \varepsilon \Rightarrow A = B$). Indication : on pourra associer à un compact-convexe X sa jauge $j_X : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, $j_X(p) = \sup_{x\in X}\langle p, x\rangle$, et montrer que $j_{X\otimes Y} = j_X + j_Y$ pour tous compact-convexes X, Y. 3. L'ensemble des convexes (non nécessairement compacts) munis des mêmes lois est il encore simplifiable ?

EXERCICE 1.2.4.18 *(Théorème de Cayley-Hamilton).* (¶¶¶) Soit $\mathcal{D}$ un semi-anneau et une matrice $A \in \mathcal{D}^{n\times n}$. On définit le déterminant positif de A par

$$\det{}^+ A = \bigoplus_{\sigma \text{ permutation paire}} \bigotimes_i A_{i\sigma(i)}$$

et $\det^- A$ de manière analogue pour les permutations impaires, de sorte que l'on a "formellement" $\det A = \det^+ A - \det^- A$. On appellera mineur principal positif d'ordre k le $\det^+$ d'une $k \times k$ matrice carrée extraite, les indices de lignes étant les mêmes que ceux des colonnes. Soit Λ_k^+ la somme des C_n^k mineurs positifs principaux d'ordre k et Λ_k^- la somme des C_n^k mineurs négatifs principaux de même ordre. Montrer que, pour n pair[6]

$$A^n \oplus \Lambda_1^- A^{n-1} \oplus \Lambda_2^+ A^{n-2} \oplus \ldots \oplus \Lambda_n^+ \mathrm{Id} = \Lambda_1^+ A^{n-1} \oplus \Lambda_2^- A^{n-2} \oplus \ldots \oplus \Lambda_n^- \mathrm{Id} \ . \quad (1.13)$$

Cette formule généralise le théorème de Cayley-Hamilton. On a classiquement, quand la loi $\oplus = +$ admet une loi opposée, notée $-$,

$$P_A(X) = \det(A - X\mathrm{Id}) = \bigoplus_{k=0}^{n} (-e)^k (\Lambda_k^+ - \Lambda_k^-) X^k$$

et la formule (1.13) exprime l'identité $P_A(A) = 0$ sans signe moins.

1.2.5 Un exemple de système (min, +)-linéaire en temps continu : le limitateur de débit

Nous montrons maintenant que les phénomènes de saturation et de synchronisation aperçus plus haut et représentés par des équations (max, +) où (min, +) linéaires ne sont

[6] La formule pour n impair s'obtient en changeant Λ_n^- et Λ_n^+ de coté

pas spécifiques au cas discret, mais apparaissent également dans des systèmes continus. De manière un peu polémique, on pourrait dire que l'important, dans les systèmes à événements discrets, ce n'est pas le caractère discret, mais c'est l'algèbre sous-jacente. On aboutit alors à une nouvelle notion de linéarité.

Considérons en effet le système mono-entrée mono-sortie $\mathcal{S} : u \mapsto y$ représenté à gauche de la Figure 1.4. Un fluide circule à travers un long tuyau vers un premier réservoir

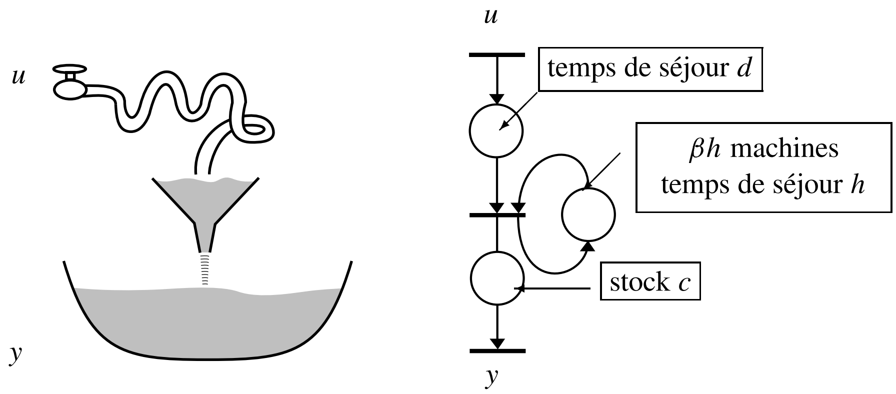


FIG. 1.4: Système continu et analogue discret

(vide à la date 0). L'entrée $u(t)$ représente la quantité *cumulée* de liquide entrée dans le tuyau jusqu'à l'instant t (la fonction $t \mapsto u(t)$ est donc croissante, et l'on a $u(t) = 0$ pour $t \leq 0$). Le liquide met un temps d à parcourir le tuyau. Le liquide passe du premier au second réservoir à travers une ouverture qui limite le débit instantané à la valeur maximale de $\beta > 0$. On note $y(t)$ le volume de fluide dans le second réservoir à l'instant t. On a une quantité initiale $y(0) = c$. Le débit d'entrée dans le second réservoir étant limité à β, on a :

$$\forall t, \forall \theta \geq 0, \quad y(t+\theta) \leq y(t) + \beta\theta \ . \tag{1.14}$$

D'autre part,

$$\forall t, \quad y(t) \leq u(t-d) + c \ . \tag{1.15}$$

Il en résulte immédiatement que $\forall t$ et $\forall \theta \geq 0$,

$$y(t) \leq y(t-\theta) + \beta\theta \leq u(t-d-\theta) + c + \beta\theta \ ,$$

d'où pour tout t,

$$y(t) \leq \inf_{\theta \geq 0} [u(t-d-\theta) + c + \beta\theta] = \inf_{\tau \geq d} [u(t-\tau) + c + \beta(\tau - d)] \ . \tag{1.16}$$

Posons

$$k(t) = \begin{cases} +\infty & \text{pour } t \leq d \ ; \\ c + \beta(t-d) & \text{sinon.} \end{cases} \tag{1.17}$$

et définissons $\overline{y}$ par :

$$\overline{y}(t) \stackrel{\text{def}}{=} \inf_{\tau \in \mathbb{R}} [u(t-\tau) + k(\tau)] \ . \tag{1.18}$$

Toute sortie y vérifie $y \leq \overline{y}$. En outre :

$$\begin{aligned}
\overline{y}(t+\theta) &= \inf_{\tau\in\mathbb{R}}[u(t+\theta-\tau)+k(\tau)] \\
&= \inf_{s\in\mathbb{R}}[u(t-s)+k(s+\theta)] \\
&\leq \inf_{s\in\mathbb{R}}[u(t-s)+k(s)]+\beta\theta \\
&= \overline{y}(t)+\beta\theta \ .
\end{aligned}$$

d'où il résulte que $\overline{y}$ est la solution maximale de (1.14). C'est cette solution $\overline{y}$ qui décrira le comportement physique du système si l'on suppose que le liquide s'écoule aussi rapidement que possible. On a ainsi montré que la sortie au plus tôt du système est représentée par une *inf-convolution* de l'entrée avec la fonction k. De cela, il résulte immédiatement que le système $u \mapsto \mathcal{S}(u)$ est (min, +) linéaire, i.e. vérifie les deux propriétés suivantes :

$$\begin{array}{lll}
\text{min-superposition} & \forall u, u' \in \overline{\mathbb{R}}^{\mathbb{R}} & \mathcal{S}(\min(u,v)) = \min(\mathcal{S}(u),\mathcal{S}(v)) \\
\text{invariance additive} & \forall \lambda \in \overline{\mathbb{R}} & \mathcal{S}(\lambda+u) = \lambda+\mathcal{S}(u).
\end{array}$$

REMARQUE 1.2.5.1. On peut voir le calcul qui précède comme la résolution (en fait le calcul de la solution maximale) de l'équation fonctionnelle (min, +) :

$$y(t) = \min(\inf_{\theta\geq 0}[y(t-\theta)+\beta\theta], u(t-d)+c) \ .$$

REMARQUE 1.2.5.2. Le système à droite de la Figure 1.4 est l'analogue discret du limitateur de débit. On prend βh machines travaillant en parallèle et traitant chacun une pièce pendant h unités de temps (ce qui fait bien un débit de β). Les pièces doivent attendre un temps de préparation d dans la place amont avant d'être traitées. Enfin, un stock initial de c pièces (présentes depuis l'instant $-\infty$) est disponible. Il est clair que la quantité de pièces servies au plus tôt $y(t)$ vérifie :

$$y(t) = c + \min(\beta h + y(t-h), u(t-d)) \ .$$

En substituant $y(t-h)$, et en poursuivant de même, il vient

$$y(t) = c + \inf_{i\in\mathbb{N}}[\beta h i + u(t-d-hi)] \ . \tag{1.19}$$

Ceci est une inf-convolution discrète, analogue à (1.18).

1.2.6 En résumé : systèmes linéaires sur un dioïde et systèmes monotone homogènes

On peut dire que les exemples de systèmes à événements discrets donnés plus haut, à l'exception du cas du professeur avisé (Eq. (1.5),(1.6)), relèvent toutes de la notion suivante de linéarité.

DÉFINITION 1.2.6.1. Soit $\mathcal{D}$ un dioïde. $\mathcal{T} = \{0\}, \mathbb{N}, \mathbb{Z}$ ou $\mathbb{R}$ le temps (quand $\mathcal{T} = \{0\}$, on parlera de système purement statique, dans les autres cas, de système dynamique). Un système linéaire mono-entrée mono-sortie (discret ou continu) sur $\mathcal{D}$ est une application

$$\mathcal{S} : \quad \mathcal{D}^{\mathcal{T}} \to \mathcal{D}^{\mathcal{T}}$$

qui vérifie les axiomes d'*additivité* et d'*homogénéité* :

$$\begin{array}{l}
\forall u, v \in \mathcal{D}^{\mathcal{T}}, \ \forall \lambda \in \mathcal{D}, \\
\qquad \begin{array}{lrcl}
\text{(A)} & \mathcal{S}(u \oplus v) &=& \mathcal{S}(u) \oplus \mathcal{S}(v), \\
\text{(H)} & \mathcal{S}(\lambda \otimes u) &=& \lambda \otimes \mathcal{S}(u) \ .
\end{array}
\end{array}$$

La généralisation au cas à n entrées et p sorties est immédiate (on a alors un système de $(\mathcal{D}^n)^{\mathcal{T}}$ dans $(\mathcal{D}^p)^{\mathcal{T}}$). Le fil conducteur de ce cours est l'étude de ces systèmes "linéaires".

On pourrait relaxer l'axiome d'additivité (A), en le remplaçant par l'axiome de monotonie :

$$\begin{aligned}&\forall u, v \in \mathcal{D}^{\mathcal{T}}, \\ &(\mathsf{M}) \quad u \preceq v \quad \Rightarrow \quad \mathcal{S}(u) \preceq \mathcal{S}(v),\end{aligned}$$

où, en anticipant un peu sur le chapitre suivant, on munit $\mathcal{D}$ de l'ordre $a \preceq b \ \Leftrightarrow\ a \oplus b = b$ (quand $\mathcal{D} = \mathbb{R}_{\max}$, $a \preceq b$ ssi $\max(a, b) = b$ ssi $a \leq b$, c'est l'ordre usuel). On voit facilement que l'axiome d'additivité (A) entraîne l'axiome de monotonie (M). L'exemple de l'enseignant attendant un peu mais pas trop ses élèves (Eq. (1.5) et (1.6)) est justiciable de ce cadre : les applications $(u', x') \mapsto y'$ ainsi décrites vérifient en effet les axiomes (M) et (H). Ainsi que nous le verrons dans la partie du cours consacrée à la théorie spectrale, une partie notable des résultats structurels peut s'établir simplement seulement à partir de ces deux axiomes, qui semblent bien établir la frontière entre les "bon" systèmes à événements discrets (i.e. ceux qui sont analytiquement solubles), et les mauvais.

1.3 Supplément : quelques autres problèmes où apparaissent les dioïdes

Cette section ne relève pas de la théorie des systèmes à événements discrets proprement dite et peut être sautée en première lecture.

Nous suggérons ici d'autres classes de problèmes pour lesquels des structures de type dioïde sont utiles. Ne serait-ce que d'un point de vue historique, il faut rappeler que l'intérêt pour ces structures algébriques est venu d'une part de la communauté de la recherche opérationnelle (cf. par example [45]) à partir des problèmes de *programmation dynamique* (dont un exemple générique est présenté ci-dessous en §1.3.1), et d'autre part à la suite de Maslov, de l'étude de certains phénomènes asymptotiques (inspirés par l'approximation quasi-classique de l'équation de Schrödinger) où des opérateurs linéaires sur le semi-anneau (min, +) apparaissent comme limite d'opérateurs linéaires classiques. Il ne saurait être question de présenter ces travaux ici (cf. [52]) et l'on s'est contenté de montrer quelques exemples où l'algèbre max, + traduit des phénomènes asymptotiques plus élémentaires.

1.3.1 Problèmes d'optimisation Markoviens en horizon fini

Soit un système (par exemple un stock) pouvant prendre n états notés $1, \ldots, n$. On étudie le système sur $N + 1$ pas de temps $0, \ldots, N$. A chaque pas de temps k, on peut décider de modifier l'état à un prix qui dépend de l'instant, de l'état de départ et de l'état d'arrivée, soit

$$a(k, i, j) \stackrel{\text{def}}{=} \textit{coût de transition} \text{ de l'état } i \text{ à l'état } j \text{ à l'instant } k.$$

Notons que $a(k, i, i)$ n'est pas forcément nul (ne rien faire pouvant avoir un certain coût). S'il n'est pas possible d'aller de i à j, on conviendra d'un coût infini, soit $a(k, i, j) = +\infty$. En outre, on se donne un coût final $c(i_N)$ associé à l'état i_N auquel on arrive à la dernière itération. On considère le problème d'optimisation suivant : *partant d'un état initial i_0, trouver N états consécutifs $i_1, \ldots, i_N$ qui réalisent le minimum du coût total, soit*

$$v(i_0) = \min_{i_1 \dots i_N} [a(1, i_0, i_1) + a(2, i_1, i_2) + \dots + a(N, i_{N-1}, i_N) + c(i_N)] \quad .$$

Le coût optimal v vu comme fonction de l'état initial est aussi classiquement appelé *fonction valeur*. Afin de calculer v au moyen d'une récurrence, on introduit le sous-problème d'optimisation de l'instant $N - k$ à l'instant N, soit

$$v_k(i) \stackrel{\text{def}}{=} \min_{i_k \dots i_N} [a(k, i, i_k) + a(k+1, i_k, i_{k+1}) + \dots + a(N, i_{N-1}, i_N) + c(i_N)] \quad .$$

On a $v_0 = v$. La fonction valeur du sous-problème v_k se calcule par récurrence rétrograde à l'aide de l'équation dite *de la programmation dynamique* suivante

$$\forall i, \quad v_k(i) = \min_j [a(k, i, j) + v_{k+1}(j)], \qquad (k \geq 1) \tag{1.20}$$

moyennant la condition finale

$$\forall i, \quad v_N(i) = c(i) \quad .$$

L'équation de la programmation dynamique (1.20) est presque évidente. Elle exprime que si $i, j_k, j_{k+1}, \dots, j_N$ est une trajectoire optimale, alors $j_k, j_{k+1}, \dots, j_N$ est aussi une trajectoire optimale pour le même problème sur un pas de moins avec le nouvel état initial j_k (“une sous trajectoire T' d'une trajectoire optimale T est optimale”). On a donc

$$a(k+1, j, j_{k+1}) + \dots + a(N, j_{N-1}, j_N) + c(j_N) = v_{k+1}(j) \quad ,$$

et en outre, le choix de j minimise le coût de la trajectoire globale T, soit $a(k, i, j) + v_{k+1}(j)$, ce qu'exprime (1.20). L'équation de la programmation dynamique (1.20) se réécrit

$$v_k(i) = \bigoplus_j a(k, i, j) \otimes v_{k+1}(j) \tag{1.21}$$

dans le dioïde $\mathbb{R}_{\min}$, soit en introduisant la matrice $A(k) = (a(k, i, j))_{1 \leq i, j \leq n}$ et en voyant c et v_k comme des vecteurs colonnes

$$v_k = A(k) \otimes v_{k+1}, \quad v_N = c \quad .$$

Il en résulte aussitôt que

$$v = v_0 = A(1) \otimes A(2) \otimes \dots \otimes A(N) \otimes c \quad .$$

Nous retiendrons que *le coût optimal est donné par un produit de matrices dans l'algèbre* min, +. Le contrôle optimal s'obtient en calculant par récurrence v_k par (1.21) et en mémorisant à chaque itération le (ou un, le contrôle optimal n'étant en général pas unique) i_k qui réalise le minimum. Dans le cas où le coût ne dépend pas du temps, on a $A(k) = \text{cst} \stackrel{\text{def}}{=} A$, et donc

$$v = A^N \otimes c$$

de sorte que l'étude de l'asymptotique de la fonction valeur (lorsque l'horizon N tend vers l'infini) se ramène à celle des puissance itérées des matrices dans l'algèbres min, +. Cette théorie est abordée au Chapitre 4.

EXERCICE 1.3.1.1 *(Un taxi très déterministe).* Considérons un chauffeur de taxi qui circule entre 3 villes et un aéroport, comme indiqué sur la Fig. 1.5. Nous supposerons, pour simplifier, que le chauffeur choisit ses clients et sa destination, les prix des courses étant indiqués sur le graphe. Soit $V_N(i)$ le gain optimal du chauffeur en N courses, sachant qu'il part de la ville i. Montrer qu'on V_N satisfait une récurrence sur le semi-anneau max-plus $V_N = AV_{N-1}, \quad V_0 = b$, où A est une matrice carrée et b un vecteur colonne, tous deux à coefficients dans $\mathbb{R}_{\max}$, que l'on déterminera. Calculer $V_2(1)$.

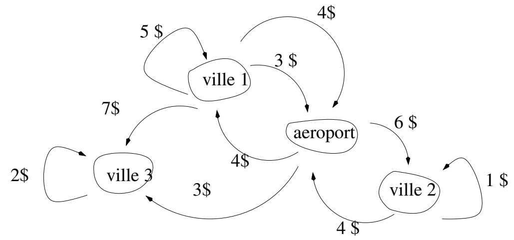


FIG. 1.5: Un taxi très déterministe

1.3.2 Petits Problèmes Asymptotiques

L'algèbre (max, +) apparaît naturellement dans certains phénomènes asymptotiques, par exemple

$$e^{at} + e^{bt} \text{ “}\simeq\text{” } e^{\max(a,b)t} \text{ lorsque } t \to +\infty. \tag{1.22}$$

Plus formellement, considérons $\mathcal{S}$ le semi-anneau des combinaisons linéaires à coefficients positifs d'exponentielles, soit

$$\mathcal{S} \stackrel{\text{def}}{=} \bigcup_{k\geq 1} \mathcal{S}_k, \quad \text{où} \quad \mathcal{S}_k \stackrel{\text{def}}{=} \{t \mapsto \sum_{i=1}^{k} a_i \exp(tb_i) \mid a_i, b_i \in \mathbb{R}\}$$

et définissons l'exposant maximal d'une combinaison linéaire d'exponentielles $s \in \mathcal{S}$ par

$$\varphi(s) \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{t\to+\infty} \frac{1}{t} \log s(t) \ .$$

On a

$$\begin{array}{ll} \text{(i)} & \varphi(s+s') = \max(\varphi(s), \varphi(s')), \\ \text{(ii)} & \varphi(ss') = \varphi(s) + \varphi(s') \end{array} \tag{1.23}$$

donc φ est un morphisme de semi-anneau de $\mathcal{S}$ dans $\mathbb{R}_{\max}$. De manière moins pédante, on peut dire que “l'algèbre max, + est celle des exposants” ou l'algèbre des “petits o”, dont le lecteur sait bien qu'elle est idempotente (“$\epsilon + \epsilon = \epsilon$” en analyse). Plus généralement, soit pour fixer les idées $K \subset \mathbb{R}^n$ un compact et $f : K \to \mathbb{R}$ continue. La *méthode de Laplace* bien connue [30] pour l'estimation asymptotique des intégrales montre en particulier que

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \left(\int_K \exp(tf(x))dx \right) = \sup_{x\in K} f(x) \tag{1.24}$$

ce qui étend (1.23),(i) au cas des “sommes infinies”.

APPLICATION 1.3.2.1. Soit $A(t)$ une matrice dont les coefficients sont de la forme $A(t)_{ij} = \exp(a_{ij}t)$, soit $N \in \mathbb{N}$, et posons $B \stackrel{\text{def}}{=} (a_{ij})$. Exprimer en fonction de B la limite

$$\lim_{t\to\infty} \frac{1}{t} \log \left[(A(t)^N)_{ij} \right]$$

($A(t)^N$ désigne la puissance N ième de la matrice $A(t)$ dans l'algèbre usuelle).

De manière moins anecdotique, des asymptotiques de ce type sont centrales en physique statistique lorsque l'on fait tendre la température vers 0 [21, 20].

Petite bibliographie générale raisonnée pour le cours

Il y a sur les systèmes à événements discrets, ainsi que sur le semi-anneau $(\max, +)$ et ses applications quelques références de base, certaines très accessibles, d'autres qui demandent un effort sérieux, que le lecteur soucieux de prolonger ce cours pourra fort utilement lire.

Une excellente référence à jour sur l'approche $(\max, +)$ linéaire des Systèmes à Événements Discrets (déterministes et stochastiques), ainsi que plus généralement sur le semi-anneau $(\max, +)$, est "Synchronisation et linéarité"[5], de Baccelli, Cohen, Olsder et Quadrat. Ce texte contient des parties très accessibles, d'autres plus techniques, et résume à peu près l'état de l'art en 92 sur les SED $(\max, +)$. Depuis, ce sont essentiellement les extensions de cette théorie au cas "non linéaire" (récurrences $(\min, \max, +)$, systèmes dynamiques fluides $(\min, + \times)$) ainsi que les extensions aux automates qui ont progressé. On pourra se reporter à l'excellente collection d'articles "Idempotency" [48] éditée par J. Gunawardena, à paraître incessamment aux Cambridge University Press.

Une autre référence plus générale sur les Systèmes à Événements Discrets stochastiques est le livre de Glasserman et Yao [40].

Sur la théorie de Ramadge et Wonham, on pourra lire le petit livre de Kumar et Garg [57] mais aussi les papiers originaux [59, 16, 69] qui sont très accessibles.

Sur le semi-anneau $(\max, +)$ proprement dit, une référence classique est "Minimax algebra" [29] de Cuninghame-Green, qui contient énormément, mais n'est pas toujours facile à lire en raison des notations et du vocabulaire qui datent un peu. La théorie a aussi progressé depuis. Le livre de U. Zimmermann [71] est très original, et plus orienté "optimisation combinatoire". Le "Graphes et Algorithmes" [45] de Gondran et Minoux contient un chapitre sur les dioïdes et les algèbres de chemins dans les graphes, qui est lumineux (les autres chapitres sont aussi hautement recommandables, c'est vraiment une excellente référence de base pour le lecteur intéressé par la théorie des graphes et ses applications). Une collection d'articles sur l'Analyse Idempotente à été éditée récemment par Maslov et Samborskiĭ [52]. Elle donne une idée assez à jour des très importants travaux de l'École "russe". On y trouvera particulièrement des application du semi-anneau $(\max, +)$ à l'étude des EDP de Hamilton-Jacobi, qui apparaissent en commande optimale, ainsi qu'en analyse asymptotique (méthode dite WKB pour la détermination de la phase quasi-classique de l'équation de Schrödinger). La théorie spectrale en dimension infinie (qui étend la théorie de Perron-Frobenius que l'on verra dans ce cours) y est traitée.

Sur les langages formels et la théorie des automates, deux références excellentes mais peut-être un peu trop ambitieuses pour un début (ne pas commencer par la sauf à avoir une âme d'algébriste) sont le manuel d'Eilenberg [33], ainsi que le livre de Berstel et Reutenauer [9] sur les séries rationnelles. Le livre de Salomaa et Soittola [63] est sans doute plus accessible. Nous conseillerons pour un début les survols sur le sujet (ex. Perrin) dans le Handbook of Theoretical Computer Science [67]. Le manuel d'Autebert [3] sur les langages algébriques est sans doute assez accessible. Pour aller plus loin, voir le livre de Berstel [8]. Un merveilleux petit livre, pas toujours très canonique mais vraiment très original, et profond, est celui de Conway [28].

D'autres références ad hoc seront livrées au fil du cours, et à la fin de chaque chapitre.

Chapitre 2

Équations linéaires dans les dioïdes

Introduction

Ce chapitre passe en revue la théorie algébrique de base des dioïdes. On s'est limité aux résultats utiles pour l'étude des systèmes à événements discrets. L'idée qui est à l'œuvre dans cette théorie est qu'à la différence des semi-anneaux généraux, les semi-anneaux idempotents (dioïdes) peuvent être munis d'une structure ordonnée canonique. On rappelle quelques points indispensables sur les structures ordonnées (semi-treillis, treillis). On étudie ensuite les équations et inéquations de type

$$x = ax \oplus b, \qquad x \succeq ax \oplus b \tag{2.1}$$

qui apparaissent comme les équations implicites de graphes d'événements temporisés. Il est naturel d'utiliser une technique de point fixe : l'opération étoile ($a^* = e \oplus a \oplus a^2 \oplus \ldots$ "$= (1-a)^{-1}$", étoile de Kleene, bien connue en théorie des langages et des séries formelles) est introduite à cette occasion. Disons que l'étoile "remplace" l'inverse dans certaines structures où l'inverse n'est pas défini. Le fait essentiel pour la suite est que l'étoile d'une matrice s'interprète simplement en termes de chemins. En gros, les coefficients de A^* représentent l'ensemble des chemins du graphe associé à la matrice A : cela permet de relier un point de vue combinatoire (chemins) à un point de vue algébrique (l'étoile satisfait tout un formulaire utile, que l'on établit). Il y a une autre classe d'équations que l'on sait également étudier, celles de la forme

$$ax = b \ . \tag{2.2}$$

Disons simplement qu'on montre que la sous-solution maximale,

$$a \backslash b = \sup\{x \mid ax \preceq b\}$$

jouït de bonnes propriétés. "$a \backslash b$" est appelé résiduel de b par a. Cette notion est utile pour des problèmes *au plus tard*, pour lesquels le calcul de la sous-solution maximale revient à déterminer les dates de lancement les plus tardives compatibles avec un objectif. Cette théorie, qui est une généralisation élémentaire des dualités usuelles et des correspondances de Galois est tout à fait instructive, mais non centrale dans ce cours. Nous renvoyons le lecteur intéressé à Blyth et Janowitz [12, 4] Signalons également qu'une théorie de type Cramer [4, 55, 56, 36], plus délicate que la théorie usuelle, existe pour les équations plus générales $Ax \oplus b = Cx \oplus d$.

2.1 Dioïdes et structures ordonnées

2.1.1 Rappels sur les structures ordonnées

On donne ici le minimum vital sur les structures ordonnées. Cette section contient des définitions et des résultats très classiques ainsi que des exemples les illustrant. On pourra lire directement la suite, et se reporter à cette section en cas de besoin.

DÉFINITION 2.1.1.1 (SEMI-TREILLIS). Un ensemble ordonné $(E, \preceq)$ est un *sup-semi-treillis* si toute partie à deux éléments de E admet une borne-sup, i.e.

$$\forall a, b \in E^2, \quad \exists c \in E, \quad ((x \succeq a \text{ et } x \succeq b) \Leftrightarrow x \succeq c) \quad .$$

On notera $c = a \vee b$. Définition duale pour un *inf-semi-treillis*. On notera $a \wedge b$ la borne inf de a et b. Si $(E, \preceq)$ est à la fois un sup et un inf semi-treillis, on dit que $(E, \preceq)$ est un *treillis*.

EXEMPLE 2.1.1.2. $\mathbb{R}$ ordonné usuellement est un treillis. On a $a \vee b = \max(a, b)$, $a \wedge b = \min(a, b)$. Plus généralement, tout ensemble totalement ordonné[1] est un treillis.

EXEMPLE 2.1.1.3 *(Treillis des Parties d'un Ensemble)*. Etant donné un ensemble F, l'ensemble des parties de F ordonnées par l'inclusion est un treillis, où les bornes sup et inf sont données respectivement par

$$A \vee B = A \cup B, \quad A \wedge B = A \cap B \quad .$$

EXEMPLE 2.1.1.4 *(Treillis des sous-espaces vectoriels)*. L'ensemble des sous espaces vectoriels d'un espace vectoriel F est un treillis, avec

$$A \vee B = A + B, \quad A \wedge B = A \cap B \quad .$$

EXEMPLE 2.1.1.5 *(Treillis des compacts convexes)*. L'ensemble des compacts convexes de $\mathbb{R}^2$, muni des deux lois suivantes :

$$a \wedge b = a \cap b, \quad a \vee b = \mathrm{conv}(a \cup b)$$

où conv dénote l'enveloppe convexe, est un treillis.

NOTATION 2.1.1.6 (DIAGRAMME DE HASSE). Il est traditionnel de représenter les treillis par des diagrammes dits *de Hasse* semblables à ceux de la Figure 2.1. Dans ces diagrammes,

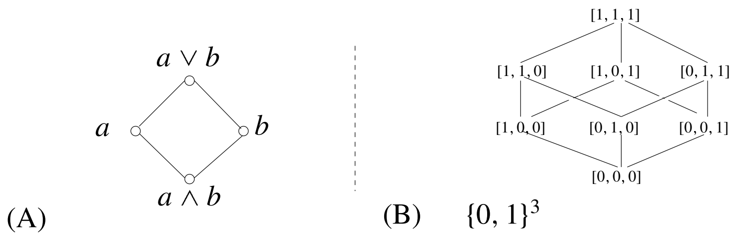


FIG. 2.1: Diagrammes de Hasse

on trace un arc ascendant de x a y si $x \preceq y$. Les arcs triviaux $x \mapsto x$ et les arcs se déduisant par transitivité sont omis. Le Figure 2.1,(A) exprime donc que $a \wedge b$ minore a et b et que $a \vee b$ majore a et b. On a donné sur la Figure (B) un diagramme de Hasse un peut plus intéressant, à savoir celui de l'ensemble des triplets d'éléments de $\{0, 1\}$, muni de l'ordre partiel usuel : $u \leq v$ ssi $\forall i \in \{1, 2, 3\}, u_i \leq v_i$.

[1] i.e. ou l'on a pour tous x et y ou bien $x \preceq y$ ou bien $y \preceq x$

PROPRIÉTÉS 2.1.1.7. *Soit $\mathcal{T}$ un treillis. Pour tous $a, b, c \in \mathcal{T}$, on a :*

1. $a \vee a = a$ *(idempotence)*
2. $a \vee b = b \vee a$ *(commutativité)*
3. $a \vee (b \vee c) = (a \vee b) \vee c$ *(associativité)*
4. $a \vee (b \wedge a) = a$ *(absorption)*
5. $a \vee (b \wedge c) \preceq (a \vee b) \wedge (a \wedge c)$
6. $a \wedge (b \vee c) \succeq (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$

Démonstration. Ces propriétés se vérifient aisément. Montrons par exemple (3). On a

$$(x \succeq u \text{ et } x \succeq v) \Leftrightarrow x \succeq u \vee v$$

d'où $x \succeq a \vee (b \vee c)$ ssi x majore a, b et c. L'associativité en résulte. □

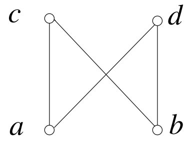
Un treillis où les deux dernières inégalités sont des égalités est dit *distributif*. Par exemple, le treillis des parties d'un ensemble (ordonnées par l'inclusion) est distributif. Le treillis des sous espaces d'un espace vectoriel F est un treillis qui n'est pas distributif.

EXERCICE 2.1.1.8. Soit $\mathcal{T}$ un treillis. Montrer que les deux propriétés suivantes sont équivalentes

1. $\forall a, b, c \in \mathcal{T}, \quad a \vee (b \wedge c) = (a \vee b) \wedge (a \vee c)$
2. $\forall a, b, c \in \mathcal{T}, \quad a \wedge (b \vee c) = (a \wedge b) \vee (a \wedge c)$.

Autrement dit, l'une des deux distributivités entraîne l'autre.

CONTRE EXEMPLE 2.1.1.9. L'ensemble $\{a, b, c, d\}$ muni de l'ordre donné par le diagramme de Hasse de la Figure 2.2 n'est pas un treillis. En effet, l'ensemble des majorants



$a \preceq c, \quad a \preceq d$

$b \preceq c, \quad b \preceq d$

FIG. 2.2: Ceci n'est pas un treillis

communs à a et b est égal à $\{c, d\}$. Les deux majorants c et d sont minimaux et non comparables. a et b n'admettent donc pas de plus petit majorant (i.e. de borne sup).

DÉFINITION 2.1.1.10 (ENSEMBLE ORDONNÉ COMPLET). On dit que l'ensemble ordonné $(\mathcal{D}, \preceq)$ est *complet* si toute partie A de $\mathcal{D}$ admet une borne-sup, que l'on notera indifféremment

$$\bigvee A \quad \text{ou} \quad \bigvee_{a \in A} a \ .$$

Lorsque $(\mathcal{D}, \vee, \wedge)$ est un treillis, on dira que $\mathcal{D}$ est un *treillis complet* lorsque toute partie admet une borne-sup et une borne-inf.

On notera[2] $\top = \bigvee \mathcal{D}$ le plus grand élément de $\mathcal{D}$. Lorsque qu'il s'agit de l'ordre naturel d'un dioïde, on notera la borne-sup $\bigoplus$ au lieu de $\bigvee$. En conséquence, pour une partie infinie X, on écrira

[2]$\top$ pour "top", terme consacré en anglais

$$\bigoplus_{x \in X} x \stackrel{\text{def}}{=} \sup X \quad .$$

Voici sans doute le plus célèbre des résultats sur les treillis complets, d'une simplicité remarquable. Nous le mentionnons surtout pour la culture, car nous ne l'utiliserons pas vraîment dans ce cours.

THÉORÈME 2.1.1.11 (POINT FIXE DE KNASTER-TARSKI). *Une application croissante d'un treillis complet $\mathcal{T}$ dans lui même admet un point fixe.*

Par exemple, une application croissante de [0, 1] dans lui même admet un point fixe.

Démonstration. L'idée de la preuve est de montrer que

$$a \stackrel{\text{def}}{=} \inf\{t \in \mathcal{T} \mid t \geq f(t)\} \tag{2.3}$$

est un point fixe (i.e. $f(a) = a$). On montre d'abord que l'ensemble

$$A = \{t \in \mathcal{T} \mid t \geq f(t)\}$$

dont on prend l'inf est non vide. Cela résulte du fait que $\mathcal{T}$ étant complet admet un plus grand élément $\top$ qui satisfait par définition $\top \geq f(\top)$.
Ensuite, par définition de a, on a

$$t \geq f(t) \Rightarrow t \geq a$$

donc par monotonie de f

$$t \geq f(t) \Rightarrow f(t) \geq f(a) \quad .$$

Ainsi, $t \in A \Rightarrow t \geq f(t) \geq f(a)$ donc $\inf\{t \mid t \in A\} \geq f(a)$, donc $a = \inf A \geq f(a)$ ce qui montre une inégalité. D'autre part, en utilisant encore la croissance de f,

$$a \geq f(a) \Rightarrow f(a) \geq f(f(a)) \quad ,$$

donc $f(a) \in A$, donc $f(a) \geq \inf A = a$. □

REMARQUE 2.1.1.12. La preuve ci-dessus montre en fait que a est le *plus petit point fixe* de f. On notera bien que l'on a seulement utilisé la moitié des hypothèses, i.e. le fait que $\mathcal{T}$ admet un plus grand élément et que tout partie admet une borne inf. On peut montrer dualement (i.e. en renversant toutes les inégalités) que

$$b \stackrel{\text{def}}{=} \sup\{t \in \mathcal{T} \mid f(t) \geq t\} \tag{2.4}$$

est le plus grand point fixe de f,

2.1.2 Dioïdes comme structures ordonnées

Dans un dioïde $(\mathcal{D}, \oplus, \otimes)$, on définit la *relation d'ordre naturelle* $\preceq$ par :

$$a \preceq b \Leftrightarrow a \oplus b = b \quad . \tag{2.5}$$

Comme l'addition est idempotente, on a $a = a \oplus a \succeq a$, ce qui montre la réflexivité. L'antisymétrie et la transitivité sont claires. Cette relation d'ordre est compatible avec les lois de structure de $\mathcal{D}$, i.e. :

$$a \preceq b \Rightarrow a \oplus c \preceq b \oplus c$$
$$a \preceq b \Rightarrow ac \preceq bc \quad .$$

$(\mathcal{D}, \preceq)$ est ainsi un semi-treillis dans lequel la borne-sup est donnée par $\oplus$ ($a \oplus b$ est le plus petit majorant de a, b) et où ε est le plus petit élément.

EXEMPLE 2.1.2.1. Dans $\mathbb{R}_{\max}$ (cf. 11.2.4.3), la relation $\preceq$ coïncide avec l'ordre coutumier. Dans $\mathbb{R}_{\min}$ (cf. 1.2.4.4), on a $x \preceq y$ ssi $\min(x, y) = y$, et donc $\preceq$ est l'ordre dual de l'ordre usuel (par exemple, $2 \succeq 3$). Soit X un ensemble, dans $(\mathcal{P}(X), \cup)$, on a $A \preceq B \Leftrightarrow A \cup B = B \Leftrightarrow A \subset B$.

Nous introduisons maintenant la sous classe commode et importante des *dioïdes complets*.

DÉFINITION 2.1.2.2 (DIOÏDE COMPLET). Le dioïde $\mathcal{D}$ est *complet* s'il est complet en tant qu'ensemble ordonné par (2.5) et s'il vérifie les deux propriétés suivantes, dites de “distributivité infinie” :

$$\forall A \subset \mathcal{D}, \qquad \forall b \in \mathcal{D}, \qquad \begin{array}{c} (\bigoplus_{a\in A} a)b = \bigoplus_{a\in A} ab \\ b(\bigoplus_{a\in A} a) = \bigoplus_{a\in A} ba \quad . \end{array}$$

Il en résulte immédiatement que

$$(\bigoplus_{a\in A} a)(\bigoplus_{b\in B} b) = \bigoplus_{(a,b)\in A\times B} ab \quad . \tag{2.6}$$

EXEMPLE 2.1.2.3 *(Dioïde Complété de $\mathbb{R}_{\max}$).* $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, muni du max et du $+$, avec la convention $(+\infty) + (-\infty) = -\infty$, est un dioïde complet que l'on notera $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$.

EXEMPLE 2.1.2.4. L'ensemble des applications de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, muni du max point par point et du produit de sup-convolution défini par :

$$(f \otimes g)(t) = \sup_{x\in\mathbb{R}} [f(t - x) + g(x)]$$

(avec $(+\infty) + (-\infty) = -\infty$) est un dioïde complet que l'on notera $\overline{\mathbb{R}}_{\max}^{\mathbb{R}}$. L'élément neutre pour le produit est la fonction e donnée par $e(t) = -\infty$ si $t \neq 0$ et $e(0) = 0$.

REMARQUE 2.1.2.5. On peut montrer qu'il y a incompatibilité entre la complétion et l'inversibilité de la loi produit, soit le résultat suivant : *un semi-corps idempotent non trivial n'a pas de plus grand élément, et en particulier n'est pas complet.* Soit en effet ∞ plus grand élément d'un semi-corps idempotent $\mathcal{D}$. On a $\infty.\infty \succeq \infty.e = \infty$, et en simplifiant $\infty = e$. Ainsi, tout x non nul vérifie

$$x \preceq e \tag{2.7}$$

D'où en passant aux inverses $x^{-1} \succeq e$. L'autre inégalité s'obtient en appliquant (2.7) à x^{-1}, d'où $x = e$ et $\mathcal{D} = \{\varepsilon, e\}$ est trivial.

NOTATION 2.1.2.6 (INTÉGRATION IDEMPOTENTE DE MASLOV). On notera, à la suite de Maslov [53, 50],

$$\oint_{i\in I} a_i \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{i\in I} a_i$$

par analogie avec l'intégrale usuelle. On a en particulier la règle de Fubini :

$$\oint_{\cup_{k\in I}\{k\}\times J(k)} a_{ij} = \oint_{i\in I}\oint_{j\in J(i)} a_{ij}$$

qui n'est autre que l'associativité de la borne sup. L'infinie distributivité du produit se réécrit

$$c \otimes \left(\bigoplus_{i \in I} a_i \right) = \bigoplus_{i \in I} c \otimes a_i \quad .$$

La sup-convolution se réécrit comme suit :

$$(f \otimes g)(t) = \sup_{x \in \mathbb{R}} [f(t-x) + g(x)] = \bigoplus_{x \in \mathbb{R}} f(t-x) \otimes g(x)$$

ce qui montre bien l'analogie avec la convolution usuelle.

Le résultat suivant permet de munir un dioïde complet d'une borne inf.

PROPOSITION 2.1.2.7. *Soient $\mathcal{D}$ un dioïde complet, $a, b \in \mathcal{D}$. La borne inf de a et b existe et est donnée par*

$$a \wedge b = \bigvee \{x \mid x \preceq a \text{ et } x \preceq b\} \quad . \tag{2.8}$$

Le seul point non trivial est que l'ensemble à droite de (2.8) est non vide : cela résulte de ce que $\mathcal{D}$ admet un plus petit élément égal à ε. On notera que l'inf d'une partie quelconque $X \subset \mathcal{D}$ existe et se caractérise de manière analogue :

$$\bigwedge X = \bigvee \{y \in \mathcal{D} \mid \forall x \in X, \quad y \preceq x\} \quad .$$

On a une autre classe importante de dioïdes où la borne inf est définie.

PROPOSITION 2.1.2.8. *Soit $\mathcal{D}$ un semi-corps idempotent. Toute partie finie admet alors une borne inf. En outre, la borne inf distribue par rapport au produit, i.e.*

$$(a \wedge b)c = ac \wedge bc, \quad c(a \wedge b) = ca \wedge cb \quad . \tag{2.9}$$

Dans la littérature, (cf. Dubreil [31]), la structure $(\mathcal{D} \setminus \{\varepsilon\}, \otimes)$ s'appelle aussi groupe réticulé ou groupe ordonné en treillis.

Démonstration de la Proposition. Supposons x, a, b non nuls. Les propositions suivantes sont équivalentes :

$$\begin{array}{rcl} x \preceq a & \text{et} & x \preceq b \\ x^{-1} \succeq a^{-1} & \text{et} & x^{-1} \preceq b^{-1} \\ x^{-1} & \succeq & a^{-1} \oplus b^{-1} \\ x & \preceq & (a^{-1} \oplus b^{-1})^{-1} \\ x & \preceq & b(a \oplus b)^{-1} a \quad . \end{array}$$

On en déduit que si $a \oplus b \neq \varepsilon$ on a

$$a \wedge b = b(a \oplus b)^{-1} a \quad . \tag{2.10}$$

Si $a = \varepsilon$ et $b = \varepsilon$, trivialement $a \wedge b = \varepsilon$. La distributivité résulte de ce que $x \preceq ac$ et $x \preceq bc$ est équivalent à $xc^{-1} \preceq (a \wedge b)$. □

CONTRE EXEMPLE 2.1.2.9. Le dioïde $\mathbb{B}[X]$ des polynômes à coefficients booléiens en une indéterminée X est un exemple de dioïde où la borne inf est bien définie, et qui n'est pas complet (considérer $\bigoplus_{k \in \mathbb{N}} X^k \notin \mathbb{B}[X]$), et où le produit est loin d'être inversible (il n'est même pas simplifiable, par exemple, $(e \oplus X)(e \oplus X^2) = (e \oplus X)(e \oplus X \oplus X^2)$). Il faut bien voir que les conditions exhibées ci-dessus sont des conditions suffisantes commodes pour l'existence d'une borne inf (connaissant la borne sup), mais ne sont absolument pas nécessaires.

CONTRE EXEMPLE 2.1.2.10. Dans des dioïdes généraux, il est faux que l'inf (quand il existe) distribue par rapport au produit. Considérons par exemple le dioïde des parties de $\mathbb{R}$, muni de l'union et de la somme vectorielle. La borne inf n'est autre que l'intersection. Soient $A = \{0\}$, $B = \{1\}$, $C = \mathbb{R}$. On a

$$(A \wedge B) \otimes C = (A \cap B) + C = \emptyset + \mathbb{R} = \emptyset \neq (A \otimes C) \wedge (B \otimes C) = \mathbb{R} \cap \mathbb{R} = \mathbb{R} \ .$$

Cela montre que la borne sup $\oplus$ et la borne-inf $\wedge$ jouent en général des rôles asymétriques dans les dioïdes.

2.2 Algèbres de Chemins

2.2.1 L'Équation $x = ax \oplus b$ dans les Dioïdes Complets

On considère l'équation $x = ax \oplus b$. En posant $f(x) = ax \oplus b$ et en notant que f est croissante, on peut appliquer le théorème du point fixe de Tarski et en déduire l'existence d'une solution. Cela ne nous satisfait pas cependant, parce que les formules (2.3) et (2.4) donnant le plus petit et le plus grand point fixe sont peu effectives. Ici, comme il s'agit d'une équation *linéaire*, on peut caractériser plus précisément le plus petit point fixe à l'aide d'une nouvelle opération fondamentale : l'*étoile*.

THÉORÈME 2.2.1.1. *L'inéquation $x \succeq ax \oplus b$ dans un dioïde complet admet une plus petite solution, égale à a^*b, où a^* est définie*[3] *par :*

$$a^* = \bigoplus_{n \in \mathbb{N}} a^n \ .$$

En outre, $\overline{x} = a^*b$ réalise l'égalité (c'est-à-dire $\overline{x} = a\overline{x} \oplus b$).

Démonstration. On a par une induction immédiate à partir de $x \succeq ax \oplus b$ que

$$x \succeq (e \oplus a \oplus \ldots \oplus a^n)b \oplus a^{n+1}x, \tag{2.11}$$

d'où $x \succeq (e \oplus a \oplus \ldots \oplus a^n)b = \bigoplus_{k=0}^{n} a^k b$ pour tout n. On a montré

$$x \succeq ax \oplus b \Rightarrow x \succeq a^*b = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} a^k b \ . \tag{2.12}$$

Réciproquement, le fait que $\overline{x} = a^*b$ est solution de $x = ax \oplus b$ résulte aussitôt de la propriété de distributivité infinie 2.1.2.2. □

EXERCICE 2.2.1.2. Donner une formule analogue pour la plus petite solution de $x \succeq axc \oplus b$ (on ne supposera pas le dioïde commutatif).

NOTATION 2.2.1.3. L'opération "plus" dérivée de l'étoile sera utile :

$$a^+ \stackrel{\text{def}}{=} a \oplus a^2 \oplus \ldots \oplus a^n \oplus \ldots = aa^* = a^*a \ . \tag{2.13}$$

On a

$$e \oplus a^+ = a^* \ . \tag{2.14}$$

[3] parfois appelée "étoile de Kleene". Dans l'algèbre usuelle, x^* n'est autre que $(1-x)^{-1}$, du moins dès que $|x| < 1$.

EXEMPLE 2.2.1.4. Dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$, on a $a^* = +\infty$ si $a > 0$ et $a^* = 0$ si $a \leq 0$. Dans $\mathbb{R}_{\max}$, l'étoile de a n'est donc définie que si $a \leq 0$. Cela est reflété par le fait que si $a > 0$, l'équation $x = \max(a + x, 0)$ n'admet pas de solution finie.

EXEMPLE 2.2.1.5. Considérons le dioïde des parties de $\mathbb{R}$, $(\mathcal{P}(\mathbb{R}), \cup, +)$. Soit $a = [2, 3]$. On a $a^2 = a + a = [4, 6], \ldots$, d'où

$$a^* = \{0\} \cup [2, 3] \cup [4, 6] \cup [6, 9] \cup [8, 12] \cup \ldots = \{0\} \cup [2, 3] \cup [4, +\infty[\ .$$

Nous établissons ci-après les propriétés de base des opérations étoile et plus.

PROPOSITION 2.2.1.6. *Soit $\mathcal{D}$ un dioïde complet, $a, b \in \mathcal{D}$, et c un entier strictement positif. On a*

1. $(a^*)^* = a^*$,
2. $(a^+)^* = a^*$,
3. $a^* = (a^0 \oplus \ldots \oplus a^{c-1})(a^c)^*$
4. $(a \oplus b)^* = (a^*b)^*a^*$,
5. $(a \oplus b)^* = b^*(ab^*)^*$,
6. $a^* = a^*a^*$.
7. $(ab^*)^+ = a(a \oplus b)^*$
8. $(ab^*)^* = e \oplus a(a \oplus b)^*$

En outre, lorsque a et b commutent :

9. $(a \oplus b)^* = a^*b^*$

Démonstration. (1).$x \succeq ax \oplus e$ entraîne $x \succeq a(ax \oplus e) \oplus e \succeq a^2x \oplus e$ et plus généralement $x \succeq a^nx \oplus e$, soit en sommant $x \succeq a^*x \oplus e$. On en déduit que la plus petite solution de $x \succeq ax \oplus e$, i.e. a^*, est plus grande que la plus petite solution de $x \succeq a^*x \oplus e$, i.e. $(a^*)^*$. Par ailleurs, trivialement, $a^* \preceq (a^*)^*$, d'où l'égalité.
(2) : $a^* \preceq (a^+)^* \preceq (a^*)^* = a^*$ (par (1)).

(3) résulte du théorème de division euclidienne. En effet, en développant $(a^0 \oplus \ldots \oplus a^{c-1})(a^c)^*$, on obtient la somme des a^{i+cj} avec $0 \leq i \leq c - 1$ et $j \in \mathbb{N}$.

(4),(5). Soit $\overline{x} = (a \oplus b)^*$. On a

$$\begin{aligned} \overline{x} &= (a \oplus b)\overline{x} \oplus e && \text{(Théorème 2.2.1.1)} \\ \overline{x} &= a\overline{x} \oplus b\overline{x} \oplus e && \\ \overline{x} &\succeq a^*(b\overline{x} \oplus e) && \text{(propriété (2.12))} \\ \overline{x} &\succeq (a^*b)^*a^* && \text{(idem)} \end{aligned}$$

donc $(a \oplus b)^* \succeq (a^*b)^*$. Pour montrer l'autre inégalité, comme $\overline{x}$ est la plus petite solution de $x \succeq x(a \oplus b) \oplus e$, il suffit de voir que $x' = (a^*b)^*a^*$ satisfait cette dernière inéquation. Or

$$\begin{aligned} (a^*b)^*a^*(a \oplus b) \oplus e &= (a^*b)^*a^+ \oplus (a^*b)^*a^*b \oplus e \\ &= (a^*b)^*a^+ \oplus (a^*b)^+ \oplus e \\ &= (a^*b)^*a^+ \oplus (a^*b)^* = (a^*b)^*a^* \ . \end{aligned}$$

Arrivé à ce point, le lecteur peut s'interroger légitimement sur le caractère pénible et un peu miraculeux de cette seconde partie de preuve. Nous verrons à la fin de la section 2.2.2 (paragraphe : "autres preuves du formulaire") un raffinement qui permet d'économiser la vérification que x' est solution de $x' \succeq x'(a \oplus b) \oplus e$.

La formule (5) s'obtient à partir de (4 par symétrie.

(6) : par (4), $a^* = (a \oplus a)^* = (aa^*)^*a^* = (a^+)^*a^* = a^*a^*$ (par (2)).
(7) Via (5), $a(a \oplus b)^* = ab^*(ab^*)^* = (ab^*)^+$.
(8) : résulte de (7) et de la formule (2.14) ci-dessus.
(9) : On a alors pour $k \geq 1$: $(a^*b)^k = (a^*)^k b^k = a^*b^k$ (par (6)). D'où $(a \oplus b)^* = (a^*b)^*a^* = (e \oplus \bigoplus_{k\geq 1} a^*b^k)a^* = a^* \oplus \bigoplus_{k\geq 1} a^*b^k = a^*b^*$. □

EXERCICE 2.2.1.7. Parmi les formules de la proposition 2.2.1.6, dire celles qui restent vraies lorsque a, b sont des éléments d'une algèbre de Banach, avec $\|a\| < 1$, $\|b\| < 1$, et $\|a + b\| < 1$ (on définit toujours $a^* = a^0 + a + a^2 + \cdots$). Pour une réponse sans calcul, voir la discussion à la fin de la section 2.2.2.

EXERCICE 2.2.1.8. On se place dans le dioïde $\overline{\mathbb{R}}_{\max}[[X]]$ (séries formelles à coefficients dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$). Calculer les séries $s_1 = (2 \oplus X)^*$ et $s_2 = (X^2 \oplus X^3)^*$.

EXERCICE 2.2.1.9. Montrer que $\mathbb{R}_{\max}[[X]]$ n'est pas complet. Soit $s = \bigoplus_{n\in\mathbb{N}} s_n X^n \in \mathbb{R}_{\max}[[X]]$ (série formelle à coefficients dans le dioïde $\mathbb{R}_{\max}$). Montrer que si $s_0 = \varepsilon$, s^* existe. Etudier la réciproque.

2.2.2 Cas particulier des dioïdes de langages et interprétation du formulaire

Nous rappelons ici quelques définitions très classiques, déjà esquissées dans l'introduction (cf. §1.2.3). Les dioïdes de langages sont des cas particuliers de dioïdes complets, qui fournissent une interprétation très naturelle du formulaire ci-dessus.

Soit $\mathcal{A}$ un ensemble (traditionnellement appelé *alphabet*, et dont les éléments seront appelés *lettres*). Un *mot* de longueur k est un k-uplet $w = (a_1, \ldots, a_k) \in \mathcal{A}^k$. On le notera par simple concaténation : $w = a_1 \ldots a_k$. Par exemple, $abaa$ est un mot de longueur 4 sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{a, b, c\}$. $\mathcal{A}^0$ désigne conventionnellement l'ensemble des mots de longueur 0, comprenant le seul mot vide, que l'on notera e ou "_".

$$\mathcal{A}^* \stackrel{\text{def}}{=} \mathcal{A}^0 \cup \mathcal{A} \cup \mathcal{A}^2 \cup \ldots$$

désigne l'ensemble des mots (de longueur arbitraire mais finie). Etant donné $w \in \mathcal{A}^*$, on notera $|w|$ la *longueur* de w (i.e. l'unique k tel que $w \in \mathcal{A}^k$). Etant donnés deux mots $w = a_0 \ldots a_k \in \mathcal{A}^k$ et $v = b_0 \ldots b_r \in \mathcal{A}^r$, on définit le produit (dit de concaténation) $u = wv = a_0 \ldots a_k b_0 \ldots b_r \in \mathcal{A}^{k+r}$. Par exemple, $(ab)(abb) = ababb$. Le mot vide e est élément neutre pour ce produit, qui munit $\mathcal{A}^*$ d'une structure de monoïde[4], dit *monoïde libre*[5] sur $\mathcal{A}$.

DÉFINITION 2.2.2.1 (DIOÏDE DES LANGAGES DE $\mathcal{A}^*$). Une partie de $\mathcal{A}^*$ (un ensemble de mots) sera appelée *langage*. Le produit de deux langages L et L' est défini par

$$LL' = \{ll' \mid (l, l') \in L \times L'\}$$

Par exemple,

$$\{a, b^2\} \otimes \{c\} = \{ac, b^2c\} \ .$$

[4] Rappelons qu'un monoïde est un ensemble M muni d'une loi $\otimes$ associative et admettant un élément neutre

[5] D'un point de vue naïf et informel, le terme "libre" signifie que les éléments de $\mathcal{A}^*$ ne vérifient aucune "relation particulière" (du style $ab^3 = ba^2$). De manière précise, posons $\mathcal{A} = \{a_1, \ldots, a_p\}$ (pour la simplicité, on suppose ici que $\mathcal{A}$ est fini). Alors $\mathcal{A}^*$ est défini de manière unique (à un isomorphisme de monoïde près) par la propriété universelle suivante : *pour tout monoïde M et pour tous $x_1, \ldots, x_p \in M$, il existe un morphisme de monoïdes $\varphi : \mathcal{A}^* \to M$ tel que $\forall i \in \{1, \ldots, p\}, \varphi(a_i) = x_i$.*

L'ensemble des langages[6] $\mathcal{P}(\mathcal{A}^*)$, muni de l'union et du produit est un dioïde. Il a pour zéro l'ensemble vide $\emptyset$ et pour unité le singleton $\{e\}$ (e note le mot vide).

On notera que l'étoile d'un langage L n'est autre que l'ensemble de tous les concaténés des mots de L, par exemple

$$\{a, ab\}^* = \{a, ab, aa, abab, aab, aba, \dots\} \ .$$

En particulier, on retrouve que $\{a, b\}^*$ est l'ensemble des mots sur $\mathcal{A} = \{a, b\}$ ce qui est cohérent avec la notation $\mathcal{A}^*$ pour le monoïde libre. Nous ferons la convention suivante qui permet de simplifier les formules :

➥ Dans la suite, on identifiera le mot $w \in \mathcal{A}^*$ avec le singleton $\{w\} \in \mathcal{P}(\mathcal{A}^*)$. Cela nous permet d'écrire par exemple $a \oplus aba = \{a\} \cup \{aba\} = \{a, aba\}$.

Application : autres preuves du formulaire On peut donner une preuve alternative bien facile du Formulaire 2.2.1.6 : il suffit de montrer que ces identités rationnelles sont valides dans le dioïde des langages sur $\{a, b\}$, autrement dit, "si c'est vrai pour les langages, c'est vrai dans n'importe quel dioïde complet"[7]. Pour établir que ces identités sont vraies dans le dioïde des langages $\mathcal{P}(\{a, b\}^*)$, on peut user de deux techniques différentes. Prenons l'exemple de l'identité $(a \oplus b)^* = (a^*b)^*a^*$.

La première technique de preuve est purement combinatoire : à gauche de d'égalité, on a la somme de tous les mots sur l'alphabet $\{a, b\}$. Ainsi, cette égalité ne fait que dire qu'un mot quelconque en a, b se factorise sous la forme $(a^{n_1}b)(a^{n_2}b)\dots(a^{n_k}b)a^r$, qui est le terme générique du développement de $(a^*b)^*a^*$.

La seconde technique consiste à réecrire l'argument d'élimination de la preuve de la Proposition 2.2.1.6, cette fois ci dans $\mathcal{P}(\{a, b\}^*)$. Pour tout langage $L \subset \{a, b\}^*$ ne contenant pas le mot vide, et pour tout langage $L' \subset \{a, b\}^*$, il est aisé de montrer que l'équation $x = Lx \oplus L'$ admet solution *unique* dans $\mathcal{P}(\{a, b\}^*)$ (à la main ou par un argument de contraction, voir l'annexe A,exercice A.8). Puisqu'il y a solution unique, on peut raisonner par équivalence : $x = (a \oplus b)^* \Leftrightarrow x = (a \oplus b)x \oplus e \Leftrightarrow x = a^*(bx \oplus e) \Leftrightarrow x = (a^*b)^*a^*$. On fait ainsi l'économie d'une moitié de la preuve.

Le lecteur pourra s'exercer à re-prouver ainsi le reste du formulaire 2.2.1.6. La première technique (combinatoire) à l'avantage de révéler la différence de nature entre ces différentes formules. L'identité $(a \oplus b)^* = (a^*b)^*a^*$, sa duale, ainsi que $a^* = (a^0 \oplus \dots \oplus a^{c-1})(a^c)^*$ sont des tautologies (on peut établir une bijection entre les termes des développements des deux membres de ces égalités). Ces trois identités, ainsi que $(ab^*)^+ = a(a \oplus b)^*$ et $(ab^*)^* = e \oplus a(a \oplus b)^*$ qui se déduisent de $(a \oplus b)^* = (a^*b)^*a^*$, restent donc valides dans toute structure où l'on peut donner un sens raisonnable a l'étoile. Le lecteur pourra vérifier par exemple que ces formules restent vraies en posant $x^* = (1 - x)^{-1}$, lorsque a, b, c sont des éléments d'un corps, et que les inverses existent. Par contre, les preuves des formules $a^*a^* = a^*$, $(a^*)^* = a^*$, et dans le cas où $ab = ba$, $(a \oplus b)^* = a^*b^*$ font intervenir de manière essentielle l'idempotence de $\mathcal{D}$.

[6] Dans tout ce texte, on note $\mathcal{P}(X)$ l'ensemble des parties d'un ensemble X

[7] De manière précise, si $\mathcal{D}$ est un dioïde complet et $a', b' \in \mathcal{D}$, il existe un unique morphisme φ de dioïde complet (i.e un morphisme préservant les sommes infinies) de $(\mathcal{P}(\{a, b\}^*), \cup, \cdot)$ tel que $\varphi(a) = a'$, $\varphi(b) = b'$. (c'est dire que $(\mathcal{P}(\{a, b\}^*), \cup, \cdot)$ est le *dioïde complet libre* sur $\{a, b\}$). Le morphisme φ envoie une identité rationnelle valide dans $\mathcal{P}(\{a, b\}^*)$ sur une identité rationnelle valide dans $\mathcal{D}$.

2.2.3 Équations implicites matricielles

On considère toujours l'équation

$$x = Ax \oplus b \tag{2.15}$$

A étant ici une matrice carrée et x, b étant des vecteurs, tous à coefficients dans un dioïde complet $\mathcal{D}$. En se plaçant dans le dioïde des matrices carrées $\mathcal{D}^{n\times n}$, et en complétant b et x en des matrices carrée par des colonnes de ε, on se ramène à appliquer le Théorème 2.2.1.1, et donc la plus petite solution de (2.15) est donnée par $x = A^*b$ et vérifie en outre l'égalité. Cependant, l'expression de $x = A^*b = \bigoplus_n A^n b$ n'est pas effective. On cherche ici un algorithme permettant de calculer les étoiles de matrices dès que les étoiles des scalaires sont connues. Dans l'algèbre usuelle, c'est l'algorithme de Gauss qui fait le travail (on inverse la matrice si on sait inverser les pivots). L'algorithme de Gauss s'adapte dans les dioïdes. Le point clé est le Lemme d'inversion par bloc suivant, qui est une version "dioïde" d'une formule bien connue dans le cas des corps.

LEMME 2.2.3.1. *Pour la matrice suivante partitionnée en quatre blocs, on a*

$$A^* = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}^* = \begin{bmatrix} a^* \oplus a^*b(ca^*b \oplus d)^*ca^* & a^*b(ca^*b \oplus d)^* \\ (ca^*b \oplus d)^*ca^* & (ca^*b \oplus d)^* \end{bmatrix} \tag{2.16}$$

Démonstration. Soit

$$X = \begin{bmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{bmatrix}$$

A^* est la plus petite solution de $X \succeq AX \oplus \mathrm{Id}$, soit

$$\begin{aligned} x_{11} &\succeq ax_{11} \oplus bx_{21} \oplus e \\ x_{12} &\succeq ax_{12} \oplus bx_{22} \\ x_{21} &\succeq cx_{11} \oplus dx_{21} \\ x_{22} &\succeq cx_{12} \oplus dx_{22} \oplus e \quad . \end{aligned} \tag{2.17}$$

La seconde équation permet d'éliminer x_{12} :

$$x_{12} \succeq a^*bx_{22} \quad .$$

En substituant x_{12} dans la dernière équation, il vient

$$x_{22} \succeq ca^*bx_{22} \oplus dx_{22} \oplus e,$$

d'où

$$x_{22} \succeq (d \oplus ca^*b)^* \quad .$$

On obtient ainsi le coefficient (2,2) de (2.16). Les autres coefficients s'obtiennent par un argument analogue. Jusqu'ici, on a seulement montré que A^* est supérieur ou égal au second membre de (2.16). Pour montrer l'égalité, il faut reporter ce second membre dans $X = AX \oplus \mathrm{Id}$ et vérifier qu'il satisfait l'égalité, ce qui est une vérification de routine (instructive) laissée au lecteur (le lecteur paresseux pourra employer la seconde technique de preuve à la fin de la section 2.2.2 pour s'en abstenir). . □

COROLLAIRE 2.2.3.2. *On a*

$$(ca^*b \oplus d)^* = d^* \oplus d^*c(bd^*c \oplus a)^*bd^* \quad . \tag{2.18}$$

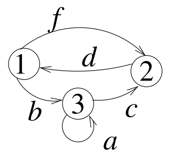
Démonstration. On obtient en effet cette formule pour A^*_{22} si l'on élimine le système dans un ordre différent (l'expression à droite de (2.18) n'est autre que A^*_{11} dans (2.16) à un changement de lettres près). □

Le lemme 2.2.3.1 appliqué de manière inductive permet de calculer l'étoile d'une matrice quelconque, et l'on peut formuler un algorithme analogue à l'algorithme de Gauss. Nous pourrions ici le faire directement, mais préférons faire appel à une interprétation combinatoire qui donne une vue très simple de ces questions. De même que le Formulaire (scalaire) 2.2.1.6 de l'étoile devient immédiat si on l'interprète en termes de mots, de même, les formules de type inversion par blocs s'interpréteront très facilement en termes de graphe.

2.2.4 Interprétation combinatoire de l'algorithme de Gauss

DÉFINITION 2.2.4.1 (MATRICE ASSOCIÉE À GRAPHE). On rappelle qu'un graphe (orienté) est un couple de deux ensembles (S, A), avec $A \subset S^2$. S est l'ensemble des sommets, A l'ensemble des arêtes. On pourra repérer chaque arête (i, j) par une lettre distincte d'un alphabet $\mathcal{A}$. A un graphe à n sommets, on associe la matrice $M \in \mathcal{P}(\mathcal{A}^*)^{n\times n}$ telle que

$$M_{ij} = \begin{cases} \text{lettre valuant l'arc } j \mapsto i & \text{s'il y a un arc } j \mapsto i \\ \varepsilon & \text{sinon.} \end{cases}$$



$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & d & \varepsilon \\ f & \varepsilon & c \\ b & \varepsilon & a \end{bmatrix}$$

FIG. 2.3: Graphe et matrice associée

L'exemple d'une telle matrice et de son graphe est donné sur la Figure 2.3.

On appelle *chemin* de longueur k de j à i une suite $p = (i_k, i_{k-1}, \ldots, i_1)$ avec $i_1 = j$ et $i_k = i$ telle que pour tout $l = 1, \ldots, k-1$, $i_l \mapsto i_{l+1}$ soit un arc. Si $i = j$, on parle de circuit. Le *poids* d'un chemin p est défini par

$$w(p) = M_{i_k i_{k-1}} \otimes \ldots \otimes M_{i_2 i_1} \quad .$$

Quitte à identifier le mot $w(p)$ et le singleton $\{w(p)\}$, on pourra voir M comme une matrice à coefficients dans $\mathcal{P}(A^*)$. Le théorème suivant est fondamental : il traduit le fait que multiplier des matrices revient à concaténer des chemins.

THÉORÈME 2.2.4.2. *M^k_{ij} est égal à la somme des poids des chemins de longueur k allant de j à i. M^*_{ij} est égal à la somme des poids des chemins du graphe de j à i (de longueur arbitraire).*

Démonstration. La propriété pour les M^k entraîne immédiatement la propriété pour M^*. Nous montrons seulement la propriété pour M^2, le cas général n'étant pas plus difficile. On a

$$M^2_{ij} = \bigoplus_k M_{ik} M_{kj} \quad .$$

$M_{ik}M_{kj}$ est non nul ssi il y a un arc de j à k et de k à i, i.e. ssi (i, k, j) est un chemin de longueur 2 de j à i, auquel cas $w(i, k, j) = M_{ik}M_{kj}$ est le poids de ce chemin. □

On notera qu'avec la définition de M, les mots se lisent de droite à gauche (par exemple, cb est un chemin $1 \to 2$). Il faut bien voir que l'intérêt de la définition "transposée" de M_{ij} = lettre $j \mapsto i$ (ij se lit de la droite vers la gauche) est d'être cohérente avec l'écriture usuelle des produits de matrices de droite à gauche. Par exemple, si X est une matrice telle que X_{ij} représente des chemins $j \to i$, alors la matrice $X' = MX$ rajoute les arcs de M à la fin des arcs de X, ce qui se révélera utile dans les équations matricielles standard de l'automatique, -typiquement $x(n) = Ax(n-1)$ - où les matrices opèrent à gauche. Avec la convention non renversée pour M, il faudrait faire des produits de matrice de gauche à droite, c'est d'ailleurs ce que font les probabilistes pour les chaînes de Markov où les mesures sont représentées par des vecteurs lignes (équation de Fokker-Planck), mais allez donc écrire une représentation d'état inversée $x(n+1) = x(n)A \oplus u(n)B$, $y(n) = x(n)C$ devant un automaticien orthodoxe ...

La variante suivante de l'algorithme de Gauss est classique (cf. Backhouse & Carre [7], Gondran & Minoux [45]) :

ALGORITHME 2.2.4.3 (DE JORDAN). *Soit A une matrice $n \times n$ à coefficients dans un dioïde complet $\mathcal{D}$, et $A^{(0)}, \dots, A^{(n)}$ les matrices définies par :*

$$A^{(0)} = A$$
$$\text{pour } i, j = 1, \dots, n \qquad A_{ij}^{(k)} = A_{ij}^{(k-1)} \oplus A_{ik}^{(k-1)}(A_{kk}^{(k-1)})^* A_{kj}^{(k-1)} \quad . \tag{2.19}$$

On a $A^{(n)} = A^+$.

On rappelle que $A^+ \stackrel{\text{def}}{=} A \oplus A^2 \oplus A^3 \oplus \dots = AA^* = A^*A$ et que $A^* = \mathrm{Id} \oplus A^+$ (les calculs de A^* et de A^+ sont pratiquement équivalents). Le terme $A_{kk}^{(k-1)}$ sera qualifié de k-ième *pivot* par analogie avec l'algorithme de Gauss usuel.

EXEMPLE 2.2.4.4. Appliquons l'algorithme de Jordan à un scalaire a. Il vient

$$a^{(0)} = a \ , a^{(1)} = a^{(0)} \oplus a^{(0)}(a^{(0)})^* a^{(0)} = a \oplus aa^*a^* = a \oplus a^2 \oplus a^3 \oplus \dots = a^+ \ .$$

EXEMPLE 2.2.4.5 *(Enumération des Chemins).* On illustre l'algorithme de Jordan 2.2.4.3 sur le graphe à 2 sommets représenté sur la Figure 2.4. Soit

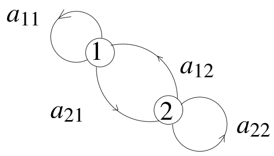


FIG. 2.4: Enumération des chemins

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix},$$

la matrice A^+ représente alors les chemins non triviaux du graphe. On a en appliquant 2.2.4.3 :

$$X = A^+ = \begin{bmatrix} a_{11}^+ \oplus a_{11}^* a_{12}(a_{22} \oplus a_{21}a_{11}^*a_{12})^* a_{21}a_{11}^* & a_{11}^*a_{12}(a_{22} \oplus a_{21}a_{11}^*a_{12})^* \\ (a_{22} \oplus a_{21}a_{11}^*a_{12})^* a_{21}a_{11}^* & (a_{22} \oplus a_{21}a_{11}^*a_{12})^+ \end{bmatrix}, \tag{2.20}$$

et en développant A_{22}^+

$$A_{22}^+ = a_{22} \oplus a_{21}a_{12} \oplus a_{21}a_{11}a_{12} \oplus a_{22}a_{21}a_{12} \oplus a_{21}a_{12}a_{22} \oplus \dots$$

ce qui est bien l'ensemble des chemins de 2 à 2. Au passage, on a retrouvé la Formule (2.16).

Démonstration. (de l'Algorithme). On considère les coefficients de A comme des indéterminées, ce qui revient à se placer dans le dioïde des langages sur l'alphabet $\mathcal{A} = \{a_{ij} \mid 1 \leq i, j \leq n\}$. Il suffit de voir que le résultat est vrai "formellement" dans $(\mathcal{P}(\mathcal{A}^*), \cup, \cdot)$ pour qu'il soit vrai dans n'importe quel dioïde complet. La preuve donnée ici repose sur une interprétation des langages produits à chaque itération par l'algorithme de Jordan comme ensembles de chemins du graphe associé à la matrice A. Nous renvoyons le lecteur à [7, 44] pour une autre preuve de nature plus algébrique de l'algorithme de Jordan. Appelons ici *chemin de longueur k de j à i* un mot de la forme

$$p = a_{i_1 i_2} a_{i_2 i_3} \dots a_{i_{k-1} i_k}$$

avec[8] $i_i = i$ et $i_k = j$. Cela revient à identifier le chemin un chemin $p = (i_1 i_2 i_3 i_k)$ au sens de 2.2.4.1 avec son *poids* $w(p)$. On dira que le chemin passe exclusivement par I si $i_2, \dots, i_{k-1} \in I$ (mais tous les $i \in I$ ne sont pas forcément atteints). Le coefficient a_{ij} s'interprète comme le chemin de longueur 1 allant de j à i. Le lemme suivant donne une interprétation combinatoire fort utile de l'algorithme de Jordan.

LEMME 2.2.4.6. *$A_{ij}^{(k)}$ est égal à la somme des chemins de longueur au moins 1 de j à i passant exclusivement par les sommets* $1, \dots, k$.

Démonstration. Dans (2.19), le second terme $A_{ik}^{(k-1)}(A_{kk}^{(k-1)})^* A_{kj}^{(k-1)}$ s'interprète comme la somme des chemins de j à k puis de k à k, puis de k à i, ces chemins passant par ailleurs exclusivement par $1, \dots, k-1$, soit la somme des chemins de j à i passant au moins une fois par k et exclusivement par $1, \dots, k-1$. Les chemins ne passant pas par k ont été déjà énumérés dans le premier terme de (2.19). La récurrence en résulte. □

Finalement, $A_{ij}^{(n)}$ est égal à la somme des chemins de longueur au moins 1 de j à i, i.e. $A_{ij}^{(n)} = A_{ij}^+$. Cela achève la preuve de 2.2.4.3. □

Ces résultats nous permettent de donner une propriété algébrique vérifiée par les chemins des graphes. Nous dirons qu'une partie de A de $\mathcal{A}^*$ est *rationnelle* ssi elle peut s'écrire à l'aide d'une formule finie faisant intervenir seulement les opérations $\oplus, \otimes, *$, ainsi que des parties finies de $\mathcal{A}$. De manière plus formalisée :

DÉFINITION 2.2.4.7 (PARTIES RATIONNELLES). Le dioïde des parties rationnelles de $\mathcal{A}^*$ est le plus petit sous dioïde de $\mathcal{P}(\mathcal{A}^*)$ contenant les parties finies et stable par $\oplus, \otimes, *$.

Le lecteur notera l'analogie avec les fractions rationnelles classiques : les parties finies remplacent les polynômes, et l'étoile remplace l'inverse. Le résultat suivant forme une moitié du théorème de Kleene qui sera énoncé au chapitre 5.

COROLLAIRE 2.2.4.8 (FONDAMENTAL). *L'ensemble des chemins entre deux sommets donnés d'un graphe fini est une partie rationnelle.*

Démonstration. Résulte par exemple de l'algorithme de Jordan 2.2.4.3 qui calcule A_{ij}^+ à partir des coefficients de la matrice A à l'aide d'un nombre fini de sommes, produits, et étoiles. □

[8]Noter ici encore que le chemin se lit de la droite vers la gauche.

2.2.5 Chemins de poids extrémal

On considère un graphe dont les arcs sont valués par des réels. Soit A_{ij} la valuation de l'arc $j \mapsto i$ (noter la transposition). Le poids d'un chemin $p = (i_1, \dots, i_k)$ est ici défini par

$$w_A(p) = A_{i_1 i_2} + \dots + A_{i_{k-1} i_k} \quad .$$

On cherche le poids minimum d'un chemin de j à i. Il suffit de penser à des problèmes de trajets routiers de longueur minimale, ou de durée minimale pour se convaincre de l'intérêt de se problème. Les problèmes de programmation dynamique du type évoqué en 1,§1.3.1 rentrent également dans ce cadre lorsque le coût ne dépend pas du temps.

On se place dans le dioïde $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$ (i.e. $(\mathbb{R} \cup \{-\infty . +\infty\}, \min, +)$), où le zéro est $\varepsilon = +\infty$. Lorsque $j \mapsto i$ n'est pas un arc, on posera $A_{ij} = \varepsilon$.

PROPOSITION 2.2.5.1. *A^*_{ij} est égal au poids minimum d'un chemin de j à i.*

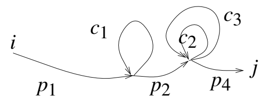
Démonstration. Résulte immédiatement du théorème 2.2.4.2 : prendre la somme des poids des chemins, c'est prendre le minimum de ces poids. □

Dans le cas où A est à coefficients dans le dioïde $\mathbb{R}_{\min}$ et non $\overline{\mathbb{R}}_{\min}$ (ce qui exclut la valeur $-\infty$ pour les coefficients et correspond au cas où les valuations des arcs du graphe de A sont finies), il est naturel de se demander à quelle condition A^* appartient à $\mathbb{R}_{\min}$ (ce qui signifie que le poids des chemins du graphe est inférieurement borné).

PROPOSITION 2.2.5.2. *Soit $A \in \mathbb{R}^{n \times n}_{\min}$. L'étoile A^* converge dans $\mathbb{R}^{n \times n}_{\min}$ ssi il n'y a pas de circuit de poids négatif dans le graphe associé à A. On a alors*

$$A^* = \mathrm{Id} \oplus A \oplus \dots \oplus A^{n-1} \tag{2.21}$$

Démonstration. Soit un chemin p de j à i. Si p est de longueur au moins n, p passe au moins deux fois par le même point. On peut donc factoriser $p = p_1 c_1 p_2 \dots p_k c_k p_{k+1}$ où les c_i sont des circuits élémentaires (éventuellement triviaux) et où $p_1 p_2 \dots p_{k+1}$ est un chemin élémentaire de j à i, comme dans le petit dessin suivant.



On a, comme le poids ne dépend que de l'image commutative du chemin

$$w(p) = w(p_1 p_2 \dots p_{k+1}) \otimes w(c_1 \dots c_k) \preceq w(p_1 p_2 \dots p_{k+1})$$

d'où il résulte que le min dans A^*_{ij} est atteint pour un chemin élémentaire (de longueur au plus égale au nombre de sommets du graphe diminué d'une unité, c'est-à-dire $n - 1$), d'où $A^*_{ij} = \mathrm{Id}_{ij} \oplus A_{ij} \oplus \dots \oplus A^{n-1}_{ij}$. Réciproquement, si c est un circuit (disons le longueur k) de poids strictement négatif et passant par i, on a

$$A^{nk}_{ii} \leq (w(c))^n \to -\infty$$

ce qui montre que A^* ne converge pas. □

En reprenant le premier point de la preuve ci-dessus, on montre qu'il existe un circuit de poids négatif ssi il existe un circuit de longueur au plus n de poids négatif, ce qui est très facile à vérifier. Par exemple :

LEMME 2.2.5.3. *Il y a un circuit de poids négatif dans le graphe associé à A ssi*[9] $\mathrm{tr}(A \oplus \ldots \oplus A^n) < 0$, *où la trace d'une matrice est définie comme de coûtume :* $\mathrm{tr} M = \bigoplus_i M_{ii}$.

D'un point de vue pratique, on ne calcule pas $\mathrm{Id} \oplus A \oplus A^2 \oplus \ldots \oplus A^{n-1}$, mais plutôt la suite définie par la récurrence

$$X_0 = \mathrm{Id},\ X_{k+1} = AX_k \oplus \mathrm{Id} \ .$$

On a $X_k = \mathrm{Id} \oplus \ldots \oplus A^k$, et l'on s'arrête dès que $X_{k+1} = X_k$ ($= A^*$ nécessairement) où que $\mathrm{tr} X_k = \bigoplus_i (X_k)_{ii} < 0$ (circuit de poids négatif). Cette méthode exige en général un temps $O(n^4)$. On peut aussi calculer par élévations successives au carré $(\mathrm{Id} \oplus A)^{2^k}$ avec $2^k \geq n$ (temps $O(n^3 \log n)$) ou appliquer l'algorithme de Jordan (temps $O(n^3)$). Lorsque l'on veut résoudre $x = Ax \oplus b$ pour un vecteur b fixé, il y a évidemment des algorithmes qui calculent directement le vecteur A^*b sans calculer A^*, ce qui serait maladroit ou infaisable (par exemple lorsque A et b sont de grande tailles et creuses, il est hors de question de calculer A^* qui est pleine). Pour résoudre $x = Ax \oplus b$, l'algorithme le plus simple est comme ci-dessus l'itération de point fixe $x_0 = b, x_1 = Ax_0 \oplus b$, etc. On voit facilement que, en notant n la dimension, $x_n = x_{n-1} = A^*b$ si A^*b n'a pas de composante $-\infty$, et que $x_n < x_{n-1}$ (i.e. $x_n \succ x_{n-1}$) sinon. On a ainsi un algorithme en temps $O(n^3)$ pour calculer A^*b (ou $O(nE)$ si A est codée de manière creuse et si E désigne le nombre d'arcs du graphe associé). Lorsque les coefficients de A sont *négatifs ou nuls*, un algorithme de type *glouton*, du a Dijkstra, permet de calculer une colonne de A^* (c'est le problème du calcul des poids minimums d'un sommet i fixé à tous les autres sommets du graphe) en un temps $O(n^2)$ (ou $O(n + E)$, i.e., en temps linéaire), à comparer avec le $O(n^3)$ du cas général. Il y a de multiples variantes de ces algorithmes de chemins, qui sont examinées en détail dans [45].

EXERCICE 2.2.5.4. Calculer l'étoile de la matrice suivante à coefficients dans le dioïde $\mathbb{R}_{\min}$

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 & 3 \\ -1 & \varepsilon & -2 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix} \ .$$

Notes et références bibliographiques

Le lecteur intéressé par la théorie des treillis pourra se reporter aux livres de Birkhoff [10] et de Dubreil-Jacotin, Lesieur et Croisot [31]. Sur la résiduation, la référence de base est Blyth et Janowitz [12]. Les treillis sont étudiés en détail d'un point de vue topologique dans [38]. Sur les systèmes d'équations linéaires dans les dioïdes, leur lien avec la théorie des graphes, la meilleure référence est Gondran et Minoux [45]. Citons aussi Carre [19]. On pourra aussi se reporter à Cuninghame-Green [29], à Cao, Kim et Roush [17], à Zimmerman [71] ainsi que, pour une présentation plus récente et plus orientée Systèmes à Événements Discrets, à Baccelli et al. [4].

[9] noter qu'il s'agit bien de n et plus de $n-1$

Chapitre 3

Représentation linéaire des Graphes d'Événements Temporisés

Introduction

On présente sommairement les réseaux de Petri, qui sont un langage graphique permettant de décrire les systèmes à événements discrets. L'emploi des réseaux de Petri pour la spécification, la simulation et l'analyse de ces systèmes remonte aux années 60 et s'est maintenant généralisé. La littérature sur les réseaux de Petri généraux est très abondante. On s'est limité ici aux préliminaires indispensables sur les réseaux de Petri, le but étant d'arriver aux graphes d'événements temporisés, qui sont une sous-classe intéressante de réseaux de Petri pour lesquels on a des résultats algébriques plus simples et plus précis. Les graphes d'événements se représentent en effet par des équations récurrentes (max, +) linéaires sur les dates ou (min, +)-linéaires sur les compteurs. On arrive alors à une équation vectorielle de la forme $x_{n+1} = A \otimes x_n$ dans l'algèbre (max, +) (ou dualement, dans l'algèbre (min, +)). Cela permet d'attaquer les problèmes de calcul du régime périodique et du taux de production via la théorie des matrices dans l'algèbre (max, +), qui sera présentée au chapitre suivant.

3.1 Introduction aux Réseaux de Petri Temporisés

3.1.1 Réseaux de Petri

Rappelons qu'on spécifie un *graphe* (orienté) par la donnée d'un ensemble S (ensemble des sommets) et d'une ensemble A d'éléments de S^2 (ensemble des arcs ou des arêtes). Un réseau de Petri est un graphe avec deux sortes de sommets : les places (représentées par des cercles) et les transitions (représentées par des rectangles). Un exemple de réseau de Petri est fourni sur la Figure 3.1. Si $\mathcal{P}$ désigne l'ensemble des places et $\mathcal{T}$ l'ensemble des transitions, on a donc la partition $S = \mathcal{P} \cup \mathcal{T}$. Les arcs relient les transitions aux places et les places au transitions (mais il n'y a pas d'arc entre deux sommets de même type). Un tel graphe est dit *biparti*. Etant donné un sommet $s \in S$, on note $\Gamma(s)$ l'ensemble des successeurs de s et $\Gamma^{-1}(s)$ l'ensemble des prédécesseurs de s, soient

$$\Gamma(s) = \{s' \in S \mid (s, s') \in A\}, \quad \Gamma^{-1}(s) = \{s' \in S \mid (s', s) \in A\} .$$

A chaque arc $a \in A$ est associé un naturel n_a. Des *jetons* circulent dans le graphe selon la règle suivante. On se donne un *marquage* M c'est-à-dire une application $\mathcal{P} \to \mathbb{N}$. $M(P)$

représente le nombre de jetons dans la place P. On dit que la transition $T \in \mathcal{T}$ est *tirable* ou *franchissable* si pour toute place P en amont de T a au moins $n_{(P,T)}$ jetons dans la place, i.e.

$$\forall P \in \Gamma^{-1}(T), \quad M(P) \geq n_{(P,T)}$$

Plusieurs transitions peuvent donc être simultanément franchissables. Si l'on décide de tirer une transition T, on retire $n_{(P,T)}$ jetons dans chaque place amont P et l'on rajoute $n_{(T,Q)}$ jetons dans chaque place aval Q. On obtient donc le nouveau marquage M' donné par

$$\begin{array}{ll}
\text{si } P \in \Gamma^{-1}(T),\ P \notin \Gamma(T) & M'(P) = M(P) - n_{(P,T)} \\
\text{si } P \in \Gamma(T),\ P \notin \Gamma^{-1}(T) & M'(P) = M(P) + n_{(T,P)} \\
\text{si } P \in \Gamma(T) \cap \Gamma^{-1}(T) & M'(P) = M(P) + n_{(T,P)} - n_{(P,T)} \\
\text{sinon} & M'(P) = M(P)
\end{array}$$

Soit par exemple le réseau de Petri de la Figure 3.1. On a représenté les naturels n_a sur les arcs. Par exemple, $n_{P_2 T_2} = 2$. On observe que les transitions T_2 et T_3 sont simultanément tirables. On a représenté ici le tir de la transition T_2.

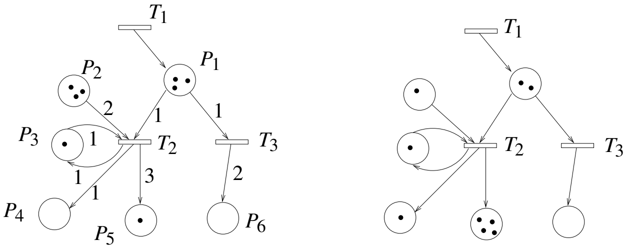


FIG. 3.1: Tir de la transition T_2

Dans la suite, en l'absence d'indication contraire sur les dessins, on supposera que les valuations des arcs n_a valent 1, i.e. que l'on retire ou ajoute un unique jeton pour chaque arc. Nous donnons maintenant divers exemples de phénomènes représentables par des réseaux de Petri.

3.1.1.1 *(Contrainte conjonctive).* Pour le réseau de Petri de la Figure 3.2, la transition T_4 peut être tirée à condition qu'il y ait un jeton dans chacune des transitions amont. On peut représenter de la sorte l'assemblage de 3 pièces en proportions identiques.

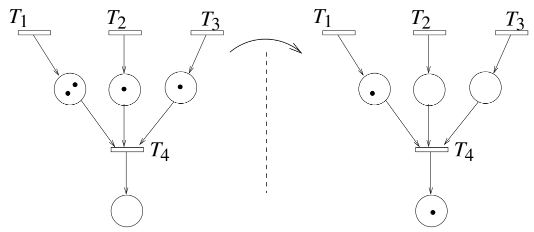


FIG. 3.2: Conjonction

3.1.1.2 *(Portion de voie ferrée).* On reprend l'exemple simplifié de voie ferrée traité dans l'introduction. Soit le réseau de Petri de la Figure 3.3. Un jeton présent en P_1 représente un train prêt à entrer sur le tronçon. Le jeton en place P_3 représente un feu vert. Lorsque la transition T_2 est tirée, le train rentre sur le tronçon (place P_2), et comme il n'y a plus de jeton en P_3 (feu rouge), aucun nouveau train ne peut rentrer. Lorsque le train sort du tronçon (tir de T_3), un jeton est à nouveau produit en P_3 (le feu repasse au vert), soit la séquence représentée sur la figure.

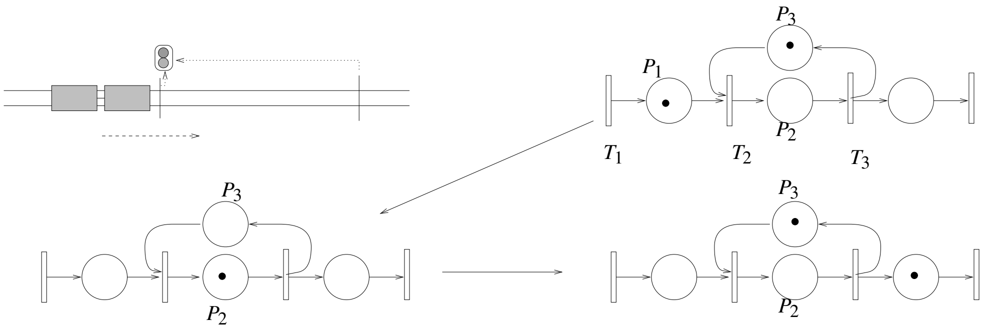


FIG. 3.3: Feu rouge contrôlant un tronçon

3.1.1.3 *(Partage d'une ressource)*. On a représenté sur la Figure 3.4 deux philosophes dînant à l'aide d'une seule fourchette. La fourchette est initialement sur la table (un jeton dans la place P_1). Lorsque l'un des deux philosophes décide de manger, disons le premier philosophe, la transition T_3 est tirée, et le jeton passe dans la place P_1 (qui correspond à l'état "le philosophe 1 mange"). Pendant ce temps là T_4 n'est pas tirable. Le second philosophe peut manger. Lorsque le premier philosophe repose la fourchette sur la table (tir de T_1), on est revenu à l'état initial.

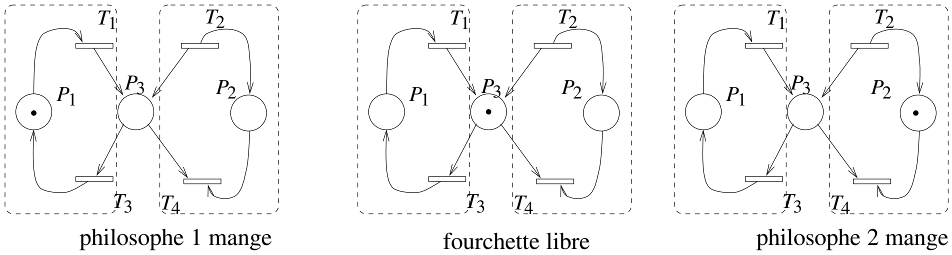


FIG. 3.4: Deux philosophes partageant une fourchette

3.1.1.4 *(Producteur et consommateur)*. Un producteur fournit une par une des pièces qu'il dépose dans un stock. Le consommateur retire une par une au fur et à mesure de ses besoins ces pièces du stock lorsque celui n'est pas vide. On se concainc que ce système est représenté adéquatement par le réseau de Petri de la Figure 3.5.

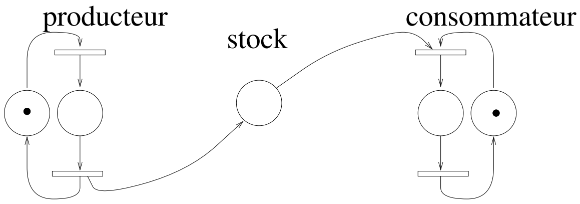


FIG. 3.5: Producteur et consommateur

3.1.1.5 *(Blocage).* Le réseau de Petri de la Figure 3.6 est en situation de deadlock (blocage). La transition T_2 ne pourra pas être tirée à cause de l'absence de jeton dans le cycle (comprenant la place P_1).

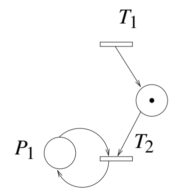


FIG. 3.6: Deadlock

3.1.1.6 *(Représentation formelle).* La définition mathématique standard des réseaux de Petri est la suivante [14]. Un réseau de Petri est un quadruplet $(\mathcal{P}, \mathcal{T}, \mathsf{pre}, \mathsf{post})$. $\mathcal{P}$ est l'ensemble des places, $\mathcal{T}$ est l'ensemble des transitions (disjoint de $\mathcal{P}$), pre est une application $\mathcal{P} \times \mathcal{T} \to \mathbb{N}$ dite d'*incidence avant* post est une application $\mathcal{P} \times \mathcal{T} \to \mathbb{N}$ dite d'*incidence arrière*. On obtient la représentation graphique ci-dessus à partir de cette représentation formelle comme suit. Si $\mathsf{pre}(P, T) > 0$, on trace un arc de P à T : la place P est en amont de T. Si $\mathsf{post}(P, T) > 0$, on trace un arc de T à P : la place P est en aval de T. On pose alors $n_{(P,T)} = \mathsf{pre}(P, T)$ et $n_{(T,P)} = \mathsf{post}(P, T)$. La condition de tir d'une transition T s'écrit

$$\forall P \in \mathcal{P}, \quad M(P) \geq \mathsf{pre}(P, T) \ .$$

Le franchissement de T donne le nouveau marquage M' :

$$\forall P \in \mathcal{P}, \quad M'(P) = M(P) - \mathsf{pre}(P, T) + \mathsf{post}(P, T) \ .$$

Ainsi, le tir de la transition T rajoute le vecteur $-\mathsf{pre}(\cdot, T) + \mathsf{post}(\cdot, T)$ au vecteur des marquages (cf. [61]).

EXERCICE 3.1.1.7 *(Philosophes Dînant).* On considère maintenant 3 philosophes devisant autour d'une table et mangeant avec des baguettes comme indiqué sur la Figure 3.7. Il y a trois baguettes sur la table (une entre deux philosophes). Un philosophe a besoin de deux baguettes pour manger et ne peut prendre que les baguettes situées à sa gauche ou à sa droite. Représenter ce système par un réseau de Petri. On pourra associer à chaque philosophe $i = 1, 2, 3$ les deux places "M_i : philosophe i mange" et "R_i : philosophe i réfléchit" (les deux activités sont exclusives).

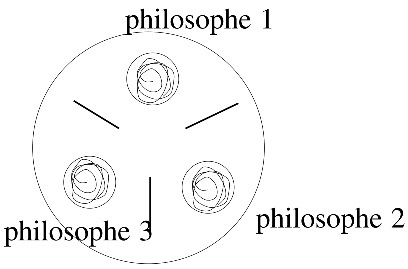


FIG. 3.7: 3 philosophes dînant avec des baguettes

3.2 Graphes d'Événements Temporisés

3.2.1 La Sous Classe des Graphes d'Événements

Un *graphe d'événements* est un réseau de Petri tel qu'en chaque place, ne rentre qu'un seul arc a et ne sort qu'un unique arc b, et qu'en outre $n_a = n_b = 1$. Ces conditions interdisent les configurations de la figure 3.8,(a1,2,3). On appelle *conflit structurel* une situation

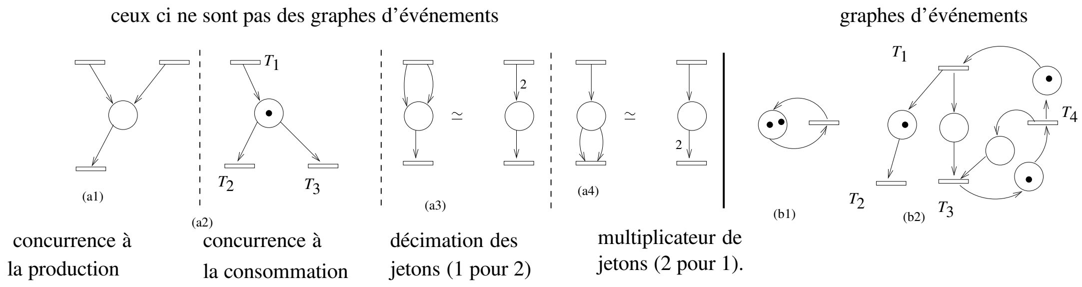


FIG. 3.8: Sous classe des graphes d'événements

où un jeton dans une place peut a priori servir pour le tir de deux transitions. Il est clair que la condition définissant les graphes d'événements interdit de tels conflits. Par exemple, le réseau de la Figure 3.8,(a2) (qui n'est pas un graphe d'événements) donne un conflit structurel. On peut tirer au choix T_2 ou T_3 pour le marquage du dessin. Si l'on tire T_2, alors on ne peut plus tirer T_3, et réciproquement. Une telle situation représente physiquement une "concurrence à la consommation". Par contre, pour le réseau (b2), l'ensemble des transitions franchissables pour le marquage du dessin est $\{T_1, T_2, T_4\}$. On peut tirer T_1, T_2, T_4 toutes les trois dans un ordre arbitraire. Cette propriété permet de définir un comportement déterministe du réseau, où l'on passe au nouveau marquage M' obtenu par tir de toutes les transitions franchissables pour les configuration donnée.

Une propriété centrale des graphes d'événements est la conservation du nombre de jetons dans les circuits.

PROPOSITION 3.2.1.1. *Pour un graphe d'événements, la somme des marquages des places d'un circuit donné est constante.*

Démonstration. Il suffit de le vérifier pour le tir d'une unique transition : c'est immédiat. □

On dira que le graphe est *vivant* ssi pour tout marquage accessible M et toute transition T, il existe une séquence de franchissements à partir de M contenant T. Il en résulte que T peut être franchie une infinité de fois. Le résultat suivant est bien classique.

PROPOSITION 3.2.1.2. *Un graphe d'événements est vivant ssi il ne contient pas de circuits sans jetons.*

Si le graphe a un circuit sans jetons, il résulte de (3.2.1.1) que les transitions de ce circuit ne pourront jamais être tirées, d'où l'on conclut à la non vivacité du graphe. Nous ne prouvons pas pour le moment la réciproque, mais nous produirons plus bas une preuve algébrique fort simple dans le cas temporisé.

3.2.2 Temporisation des Graphes d'Événements

Dans un graphe d'événements *temporisé*, on associe à chaque transition T une durée minimale de tir $\theta(T)$. Entre la mise à feu de la transition, où les jetons sont extraits des places amont et la fin du tir où les jetons sont mis dans les places aval, il s'écoule un temps au moins égal à $\theta(T)$. On associe également à chaque place P un temps minimal de séjour $\theta(P)$: les jetons doivent séjourner dans la place P au moins $\theta(P)$ unités de temps avant de devenir disponibles pour le tir des transitions aval. La construction de la Figure 3.9 permet de se ramener au cas où seules les places sont temporisées (et où le tir des transitions est instantané). On peut donc sans perte de généralité émettre la restriction :

dans toute la suite, on supposera que les places seules sont temporisées.

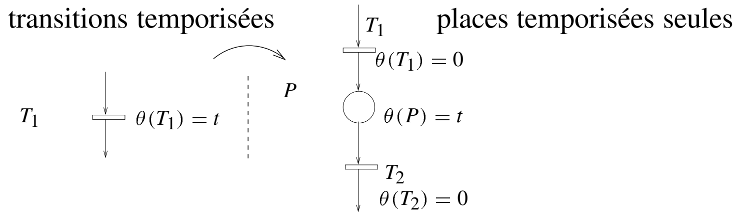


FIG. 3.9: Réduction d'une transition temporisée à une place temporisée

3.2.2.1 *(Tâche Périodique).* Le réseau de Petri de la Figure 3.10 représente une tache répétitive. Soit une cellule de production fonctionnant comme suit : deux palettes (initialement en position P_2) sont disponibles pour charger les pièces. Les pièces, une fois palettisées, sont amenées à l'une ou l'autre de deux machines travaillant en parallèle (place P_1), le traitement d'une pièce prend au moins 3 unités de temps, et à l'issue, la pièce finie est déposée dans un stock P_3 (supposé de capacité infinie) et la palette libérée revient en position initiale P_2 attendre une nouvelle pièce. Comme la place P_1 correspond au traitement des pièces par l'une ou l'autre des deux machines, elle est temporisée à 3 unités deux temps (temps minimal de fabrication). Les deux jetons initialement dans la place P_2 représentent les deux palettes. Comme d'après la Proposition 3.2.1.1, le nombre de jetons dans le circuit est constant, on note qu'au plus deux pièces peuvent être simultanément traitées. Considérons le cas où une grande quantité de pièces (de jetons) sont disponibles à l'instant 0 dans la place P_0 et où le système fonctionne *au plus tôt* ce qui signifie que chaque transition est mise à feu dès que possible. La transition T_1 est alors tirée deux fois instantanément. Les deux jetons restent 3 unités de temps dans la place P_1, T_2 est alors tirée deux fois à l'instant 3, puis les deux jetons séjournent un temps nul en P_2 et l'on est revenu à la situation initiale. On constate sur cet exemple que le régime au plus tôt est périodique : deux pièces sont traitées toutes les trois unités de temps tant qu'il reste des jetons dans la place P_0, soit un taux de production de $\frac{2}{3}$. Dans ce chapitre (ainsi que dans le suivant), nous montrerons que ce phénomène est général et caractériserons fort simplement le taux de production.

3.2.3 Equations aux dateurs

Il est temps de donner les équations décrivant le comportement temporel des graphes d'événements. A chaque transition i, on associe le *dateur* x_i, qui est une application croissante $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}_{\max}$. On suppose que les jetons sont présents dans les places depuis l'instant $-\infty$, et qu'à un instant initial (qu'on peut prendre égal à 0), aucune transition n'a été tirée. $x_i(n)$ désigne la date à laquelle arrive le n-ième tir de la transition (depuis l'instant initial). Le cas générique est celui de la Figure 3.11, pour lequel on a l'inégalité portée sur la figure. Le lecteur aura remarqué que nous notons maintenant les durées minimales de séjour dans les places par un nombre de bâtonnets. En l'occurrence, la place $x_2 \mapsto x_3$ est temporisée à

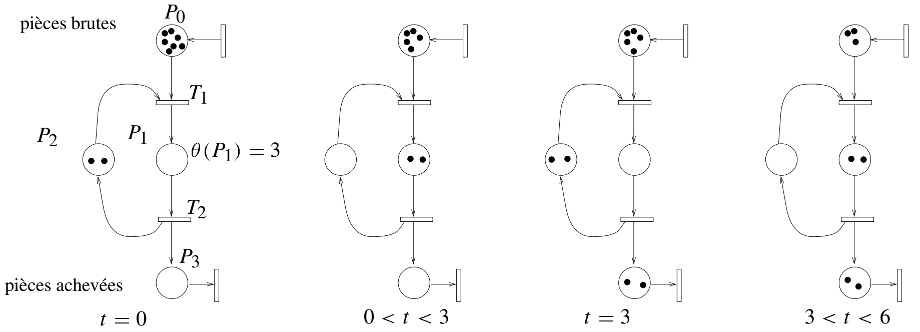


FIG. 3.10: Tâche cyclique

3 unités de temps, et la place $x_1 \mapsto x_3$ à 2 unités de temps. L'intérêt de cette notation est de faire jouer un rôle symétrique au temps et aux quantités[1]. Le terme $x_1(n-1)+2$ rend compte d'une part de ce que tout jeton doit patienter au moins deux unités de temps dans la place entre x_1 et x_3 avant d'autoriser un nouveau tir de x_3, et d'autre part que le jeton initial introduit un décalage d'une unité entre les numéros de tir des transitions x_1 et x_3.

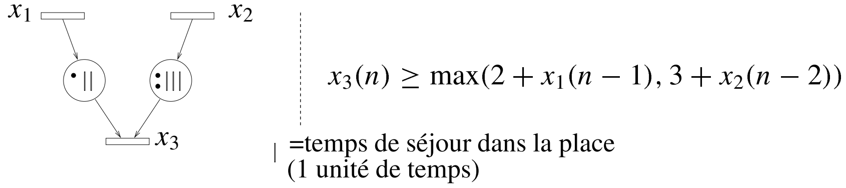


FIG. 3.11: Inéquations aux dateurs pour une transition

On considère maintenant le graphe d'événements de la Figure 3.12. Les dateurs vérifient

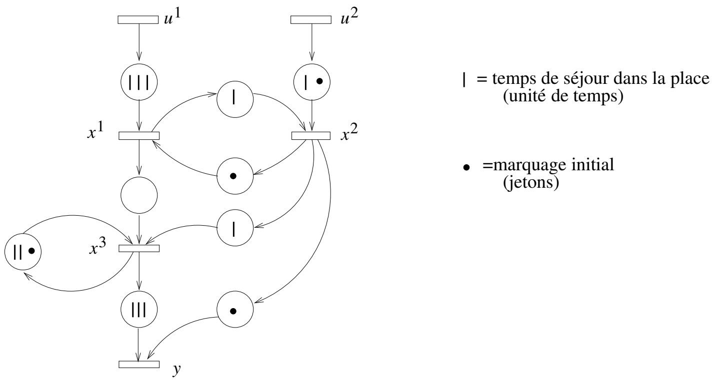


FIG. 3.12: Exemple de graphe d'événements temporisé

les inégalités suivantes :

$$
\begin{array}{rcl}
x_1(n) & \geq & \max(u_1(n)+3, x_2(n-1)) \\
x_2(n) & \geq & \max(1+u_2(n-1), 1+x_1(n)) \\
x_3(n) & \geq & \max(2+x_3(n-1), x_1(n), x_2(n)+1) \\
y(n) & \geq & \max(x_3(n)+3, x_2(n-1))
\end{array}
\tag{3.1}
$$

[1] On verra plus loin que les équations satisfaites par les compteurs sont duales de celles vérifiées par les dateurs

Dans le dioïde $\mathbb{R}_{\max}$ (où $a \oplus b = \max(a, b)$ et $a \otimes b = a + b$), on obtient le système d'inéquations linéaires équivalent :

$$\begin{array}{rcl} x_1(n) & \geq & 3u_1(n) \oplus x_2(n-1) \\ x_2(n) & \geq & 1u_2(n-1) \oplus 1x_1(n) \\ x_3(n) & \geq & 2x_3(n-1) \oplus x_1(n) \oplus 1x_2(n) \\ y(n) & \geq & 3x_3(n) \oplus x_2(n-1) \end{array} \tag{3.2}$$

Matriciellement, cela s'écrit :

$$\begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{bmatrix} \geq \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ e & 1 & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n-1) \\ x_2(n-1) \\ x_3(n-1) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} 3 & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1(n) \\ u_2(n-1) \end{bmatrix} \tag{3.3}$$

$$y(n) \geq \begin{bmatrix} \varepsilon & \varepsilon & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n) \\ x_2(n) \\ x_3(n) \end{bmatrix} \oplus \begin{bmatrix} \varepsilon & e & \varepsilon \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1(n-1) \\ x_2(n-1) x_3(n-1) \end{bmatrix} . \tag{3.4}$$

soit un système d'inégalités de la forme :

$$x(n) \geq A_0 x(n) \oplus A_1 x(n-1) \oplus B_0 u(n) \oplus B_1 u(n-1), \quad y(n) \geq C_0 x(n) \oplus C_1 x(n-1) \ . \tag{3.5}$$

avec des notations évidentes. L'étude du comportement *au plus tôt* des graphes d'événements temporisés est donc équivalente à l'étude des solutions minimales des équations aux dateurs de type (3.5), et c'est l'objet de la fin de ce chapitre ainsi que du Chapitre suivant.

3.2.4 Equations aux compteurs

En associant à chaque transition x_i ($u_i, y \ldots$) le *compteur* $x_i(t)$ (nombre de tirs de la transition i jusqu'à l'instant t), on peut écrire le système d'inéquations $(\min, +)$-linéaires suivant :

$$\begin{cases} x_1(t) \leq \min(1 + x_2(t), u_1(t-3)) \\ x_2(t) \leq \min(x_1(t-1), 1 + u_2(t-1)) \\ x_3(t) \leq \min(x_1(t), x_2(t-1), 1 + x_3(t-2)) \end{cases} \qquad y(t) \leq \min(1 + x_2(t), x_3(t-3)) \ , \tag{3.6}$$

Avec les notations du dioïde $\mathbb{R}_{\min}$ (où $a \oplus b = \min(a, b)$ et $a \otimes b = a + b$ et $a \succeq b$ ssi $a \oplus b = a$ ssi $a \leq b$), on peut écrire :

$$\begin{cases} x_1(t) \succeq 1x_2(t) \oplus u_1(t-3) \\ x_2(t) \succeq x_1(t-1) \oplus 1u_2(t-1) \\ x_3(t) \succeq x_1(t) \oplus x_2(t-1) \oplus 1x_3(t-2) \end{cases} \qquad y(t) \succeq 1x_2(t) \oplus x_3(t-3) \ , \tag{3.7}$$

On obtient en continuant de la sorte un système s'écrivant comme (3.5), mais cette fois ci dans le dioïde $\mathbb{R}_{\min}$ et relativement aux fonctions compteurs. Les dioïdes $\mathbb{R}_{\min}$ et $\mathbb{R}_{\max}$ fournissent donc deux systèmes d'inégalités (duaux en un certain sens) qui permettent de manière équivalente d'étudier le système. Dans la suite, on utilisera l'un ou l'autre de ces formalismes.

3.2.5 Forme Explicite "ARMA"

De manière analogue à (3.5) et en toute généralité, les fonctions dateur *au plus tôt* d'un graphe d'événements sont solution *minimale* dans le dioïde $\mathbb{R}_{\max}$ d'un système *implicite* d'inéquations linéaires de la forme :

$$x(n) \geq \bigoplus_{i=0}^{a} A_i x(n-i) \oplus \bigoplus_{j=0}^{b} B_j u(n-j) \tag{3.8}$$

où $x(n)$ et $u(n)$ sont des vecteurs d'état et d'entrée. Via le Théorème 2.2.1.1 du Chapitre 2, la plus petite solution de (3.8) est donnée par

$$x(n) = \bigoplus_{i=1}^{a} \overline{A}_i x(n-i) \oplus \bigoplus_{j=0}^{b} \overline{B}_j u(n-j) \tag{3.9}$$

où $\overline{A}_1 = A_0^* A_1, \ldots, \overline{B}_0 = A_0^* B_0, \ldots$ Noter que en toute généralité, les coefficients des matrices sont dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max}$ et non dans $\mathbb{R}_{\max}$ (il faut être dans un dioïde complet pour que l'étoile converge). Ainsi, (3.9) peut très bien donner une valeur infinie de $x(n)$.

L'équation (3.9) est l'analogue exact d'un système ARMA[2]. Bien sur, on a un résultat identique dans le domaine des compteurs. Calculons par exemple la forme ARMA associée à (3.7). Dans la pratique, on se garde bien de calculer A_0^*, mais l'on effectue des subtitutions dans les équations (ce qui est en fait équivalent, nous laissons le lecteur méditer cela un moment). Par exemple, on substitue $x_2(t) = x_1(t-1) \oplus 1u_2(t-1)$ dans la première équation de (3.7), et l'on obtient après avoir substitué $x_1(t)$ dans $x_3(t)$:

$$\begin{cases} x_1(t) = 1x_1(t-1) \oplus 2u_2(t-1) \oplus u_1(t-3) \\ x_2(t) = x_1(t-1) \oplus 1u_2(t-1) \\ x_3(t) = 1x_1(t-1) \oplus 2u_2(t-1) \oplus u_1(t-3) \oplus x_2(t-1) \oplus 1x_3(t-2) \end{cases}$$
$$y(t) = 1x_2(t) \oplus x_3(t-3) \ .$$

Le lecteur notera que comme la solution minimale de l'équation $ax \oplus b \preceq x$ vérifie l'égalité, le comportement au plus tôt réalise les égalités par exemple dans (3.2), ce qui n'était pas évident a priori.

Nous sommes maintenant en mesure de caractériser les graphes d'événements temporisés non bloqués. Nous dirons que le graphe est vivant si, en présence d'entrées infinies (i.e. $u = \varepsilon$ non contraignante), chaque dateur au plus tôt $x(n)$ vérifie $x(n) < +\infty$ (tout événement arrive en un temps fini, ou encore, chaque transition est tirée un nombre infini de fois). On a alors :

THÉORÈME 3.2.5.1. *Le graphe d'événements temporisé est vivant si et seulement il n'y a pas de circuit sans jeton et de temporisation strictement positive.*[3]

Démonstration. On part de l'équation 3.8 dans le domaine des dateurs. Pour que $x(n) < +\infty$, il suffit que l'étoile de la matrice A_0 ait ses coefficients inférieurs à $+\infty$, donc, d'après la Proposition duale de 2,2.2.5.1, que A_0 n'admette pas de circuit de poids positif, ce qui donne la condition de l'énoncé. La réciproque est claire, car en présence d'un circuit sans jeton de poids $c > 0$, on peut écrire pour un dateur x_i d'une transition de ce circuit une inégalité de la forme $x_i(n) > x_i(n) + c$ ce qui montre que $x_i(n)$ ne peut être fini. □

[2] i.e., auto-régressif à moyenne mobile

[3] La temporisation d'un circuit est égale à la somme des temporisations de ses places

Il y a ici une petite difficulté si l'on considère un circuit sans jetons et de temporisation nulle comme sur la figure 3.13, (a). L'inéquation aux dateurs s'écrit $x(n) \geq x(n) \oplus u(n)$ et admet donc la solution minimale $x = u$: ce système se comporte comme l'identité. Cependant, lorsque l'on considère ce graphe comme un graphe d'événements non temporisé, on est dans une situation de deadlock (cf. 3.1.1.5). On retrouve cependant la situation de blocage si l'on temporise positivement la place comme en (b). On obtient alors l'inéquation $x(n) \geq \max(1 + x(n), u(n))$ qui, dès que $u(n) \succ \varepsilon$, admet l'unique solution triviale $x(n) = +\infty$ (i.e. la date de l'événement n est $+\infty$: blocage). On retiendra que le modèle algèbrique des graphes d'événements temporisés est cohérent avec la théorie des graphes d'événements non temporisés sous jacents à ce genre de pathologies près qui disparaissent si l'on suppose par exemple que toutes les places ont des temporisations strictement positives.

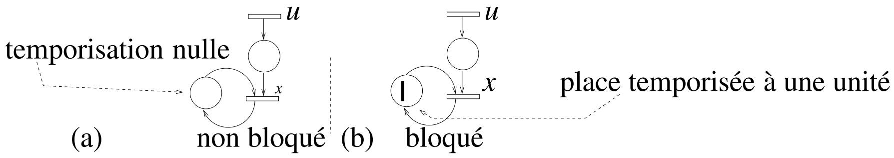


FIG. 3.13: Cas pathologique

3.2.6 Forme d'état

Par des manipulations combinatoires tout à fait classiques (en augmentant l'état), on peut ramener un système ARMA de type (3.9) à la forme dite d'état

$$x(t) = Ax(t-1) \oplus Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) \ . \tag{3.10}$$

En l'occurrence, en prenant les vecteurs $x(t) = [x_1(t), x_2(t), x_3(t), x_3(t-1), x_3(t-2), x_3(t-3)]^{\mathrm{T}}$ et $u(t) = [u_1(t-3), u_2(t-1)]$, on se ramène à la forme standard

$$x(t) = Ax(t-1) \oplus Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) \tag{3.11}$$

avec

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ 1 & e & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} e & 2 \\ \varepsilon & 1 \\ e & 2 \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & e \end{bmatrix} \ . \tag{3.12}$$

Un cas particulier intéressant est celui d'une entrée non contraignante ($u = \varepsilon$). L'équation (3.10) se réduit alors à $x(t) = A^t x(0)$, de sorte que l'étude du comportement du graphe en régime autonome se ramène au l'étude des puissances de la matrice A. On a déjà noté sur l'exemple 3.2.2.1 que certains graphes d'événements étaient périodiques, i.e. que pour un certain taux de production λ, on avait une relation de la forme

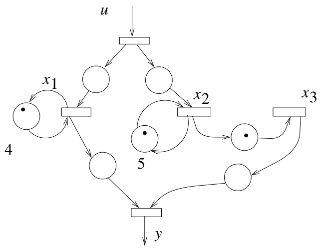
$$x_{t+T} = T \times \lambda + x(t)$$

soit dans les notations du dioïde

$$x_{t+T} = \lambda^T x(t)$$

(toutes les T unités de temps, $\lambda \times T$ tirs supplémentaires arrivent pour chaque transition). Au chapitre suivant, on va montrer 1/ que sous une hypothèse de forte connexité du graphe, le système est périodique *à partir d'un certain temps*, 2/ que le taux de production est égal à l'unique valeur propre de la matrice A, 3/ que cette valeur propre est simplement caractérisé comme le poids moyen maximal des circuits du graphe (et se calcule donc aisément).

EXERCICE 3.2.6.1. 1/ (Facile). Ecrire l'équation d'état du graphe d'événements temporisé de la Figure 3.14. 2/ (Plus dur). Peut on trouver des matrices A', B', C' de dimensions plus petites telle que la relation entrée sortie $u \mapsto y$ soit identique ?



(temporisations en toutes lettres dans les places)

FIG. 3.14: Quelles sont les équations de ce graphe d'événements ?

3.3 Représentation entrée-sortie

3.3.1 Représentation par des sup-convolutions

Soient $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$, $B \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times p}$, $C \in \mathbb{R}_{\max}^{q\times n}$. Considérons le système à p entrées et q sorties :

$$x(k) = Ax(k-1) \oplus Bu(k), \quad y(k) = Cx(k) \tag{3.13}$$

dans l'algèbre (max, +). Il vient, en remplaçant $x(k-1)$ par sa valeur dans (3.13) et à l'issue d'une récurrence immédiate :

$$\forall l \in \mathbb{N}, \qquad y(k) = CA^l x(k-l) \oplus \bigoplus_{i=0}^{l-1} CA^i Bu(k-i) \tag{3.14}$$

Posons

$$h(k) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } k < 0 \\ CA^k B & \text{sinon.} \end{cases}$$

Pour simplifier, nous supposerons dans un premier temps h scalaire (on considère un système mono-entrée mono-sortie, soient $C \in \mathbb{R}_{\max}^{1\times n}$ et $B \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times 1}$).

PROPOSITION 3.3.1.1. *La plus petite solution du système (3.13) est donnée par :*

$$y(n) = \bigoplus_{p\in\mathbb{Z}} h(p) \otimes u(n-p) = \sup_{p\in\mathbb{Z}}[h(p) + u(n-p)] \ . \tag{3.15}$$

Démonstration. Au vu de (3.14), il est clair tout y vérifiant (3.13) est plus grand que la somme à droite de (3.15). Réciproquement, il faut montrer que cette somme est effectivement solution. Posons

$$\overline{x}(k) = \bigoplus_{i=0}^{\infty} A^i Bu(k-i), \quad \overline{y}(k) = C\overline{x}(k) = h * u(k) \ .$$

Il est immédiat que $(\overline{x}, \overline{y})$ est solution de (3.13) ce qui conclut la preuve. □

EXERCICE 3.3.1.2. Que devient la proposition pour un système à plusieurs entrées et plusieurs sorties ?

L'expression à droite de (3.15) s'appelle *sup-convolution* de h par u. Cet dénomination est justifiée par l'analogie avec le produit usuel de convolution

$$f \star v(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(\tau)g(t-\tau)d\tau \ .$$

On notera dans la suite

$$u * v : \quad u * v(n) = \sup_{p\in\mathbb{Z}}[u(n-p) + v(p)] \ . \tag{3.16}$$

On vérifie aisément les propriétés suivantes :

PROPRIÉTÉS 3.3.1.3. *1.* $u * v = v * u$

2. $u * (v \oplus w) = u * v \oplus u * w$

3. $(u * v) * w = u * (v * w)$

Soit d'autre part :

$$e : \ e(k) = \begin{cases} -\infty & \text{si } k \neq 0 \\ 0 & \text{si } k = 0. \end{cases}$$

On a

$$e * u = u * e = u$$

pour tout $u \in \mathbb{R}_{\max}^{\mathbb{Z}}$. Autrement dit, e est l'*unité* pour le produit de sup-convolution. e est donc l'analogue de la fonction δ de Dirac, et pour cela, on appellera *e impulsion*. On notera que si $u, v \in \mathbb{R}_{\max}^{\mathbb{Z}}$, on a en général $u * v \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}^{\mathbb{Z}}$ (il peut se faire que le sup dans (3.16) soit infini, i.e. $u * v(n) = +\infty \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}$). On résume ces observations par la proposition suivante.

PROPOSITION 3.3.1.4. $\overline{\mathbb{R}}_{\max}^{\mathbb{Z}}$, *muni du* max *(point par point) et du produit de sup-convolution est un dioïde, ayant la fonction nulle $k \mapsto \varepsilon$ pour zéro et e pour unité.*

Il résulte de (3.15) et de $h * e = h$ que la sortie correspondant à l'impulsion e est égale à h. Autrement dit, h s'interprète comme la *réponse impulsionnelle* du système.

Plus généralement, on pourrait se demander quels sont les systèmes représentables par des sup-convolutions. Dans l'algèbre usuelle, on sait que les systèmes linéaires stationnaires se représentent par des convolutions (en un sens plus ou moins fort suivant la régularité). Ici, on a un résultat analogue. Soit $\mathcal{S}$ un système (max, +) linéaire sur $\overline{\mathbb{R}}_{\max}^{\mathbb{Z}}$, i.e. un système vérifiant

$$\mathcal{S}(u \oplus v) = \mathcal{S}(u) \oplus \mathcal{S}(v), \quad \mathcal{S}(\lambda u) = \lambda \mathcal{S}(u)$$

pour tous signaux u, v et pour tout scalaire λ. Notons γ l'opérateur de décalage en numérotation :

$$\gamma u(n) = u(n-1) \ .$$

Un système est dit *stationnaire* s'il commute avec l'opérateur de décalage, i.e.

$$\mathcal{S}\gamma = \gamma\mathcal{S} \ . \tag{3.17}$$

Autrement dit, si $(n \mapsto u(n), n \mapsto y(n))$ est un couple entrée-sortie admissible, alors, $(n \mapsto u(n-1), n \mapsto y(n-1))$ l'est également. Par une induction immédiate et comme γ est bijectif, la propriété (3.17) entraîne

$$\forall k \in \mathbb{Z}, \quad \mathcal{S}\gamma^k = \gamma^k\mathcal{S} \ .$$

(si on décale l'entrée de k numéros, la sortie est décalée de même). Nous aurons besoin d'une hypothèse de *régularité*. Le système $\mathcal{S}$ est dit *continu* s'il préserve les sup infinis, i.e.

$$\mathcal{S}(\bigoplus_{i\in I} u_i) = \bigoplus_{i\in I} \mathcal{S}(u_i)$$

pour toute famille de signaux $\{u_i\}_{i\in I}$ avec $\forall i \in I, \ u_i \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}^{\mathbb{Z}}$.

THÉORÈME 3.3.1.5. *Soit $\mathcal{S}$ un système linéaire stationnaire continu sur $\overline{\mathbb{R}}_{\max}^{\mathbb{Z}}$. Il existe une application $h \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}^{\mathbb{Z}}$ (dite réponse impulsionnelle) telle que*

$$\forall u, \ \mathcal{S}u = h * u \ .$$

Démonstration. On a pour toute entrée u, $u = u * e$, soit

$$u(n) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} u(k)e(n-k) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} u(k)\gamma^k e(n)$$

soit

$$u = \bigoplus_{k} u(k)\gamma^k e \ .$$

Par continuité, linéarité et stationnarité de $\mathcal{S}$:

$$\mathcal{S}u = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} u(k)\mathcal{S}(\gamma^k e) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} u(k)\gamma^k\mathcal{S}e \ ,$$

i.e.

$$(\mathcal{S}u)(n) = \bigoplus_{k\in\mathbb{Z}} u(k)(\mathcal{S}e)(n-k) = ((\mathcal{S}e) * u)(n) \ .$$

□

3.3.2 Série de transfert

Il y a une manière purement algébrique de retrouver le résultat de représentation par des sup-convolutions. Le système d'équations (3.13) s'écrit en utilisant l'opérateur γ de décalage sur les quantités.

$$x = A\gamma x \oplus Bu, \;\; y = Cx \;\; .$$

En appliquant le Théorème 2.2.1.1 du Chapitre 2 sur l'équation implicite $x = ax \oplus b$, on obtient la plus petite solution

$$x = (A\gamma)^* Bu = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} A^k B\gamma^k u$$

$$y = C(A\gamma)^* Bu \;\; .$$

La série formelle

$$H = C(A\gamma)^* B = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} CA^k B\gamma^k \in \mathbb{R}_{\max}^{p\times p}[[\gamma]]$$

est appelée *série de transfert*. On a

$$y(n) = Hu(n) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} CA^k B\gamma^k u(n) = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} CA^k Bu(n-k)$$

de sorte que l'on a retrouvé la représentation (3.15).

EXEMPLE 3.3.2.1. Considérons le système d'ordre 1 :

$$x(n) = 3x(n-1) \oplus 1u(n), \quad y(n) = 1x(n) \;\; .$$

On a $x = 3\gamma x \oplus 1u$, $y = 1x$, d'où

$$y = 2(3\gamma)^* u = \bigoplus_{i\in\mathbb{N}} 2\gamma^i 3^i u \;\; .$$

La réponse impulsionnelle vaut donc

$$h(i) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } i < 0 \\ 2 \otimes 3^{\otimes i} = 2 + 3 \times i & \text{sinon.} \end{cases} \tag{3.18}$$

3.3.3 Dioïde des dateurs

Dans le cas des graphes d'événements, les dateurs sont des fonctions croissantes. Nous noterons Dat l'ensemble des applications croissantes $\mathbb{Z} \to \overline{\mathbb{R}}_{\max}$. Posons

$$e' : \quad e'(k) = \begin{cases} \varepsilon & \text{si } k < 0 \\ 0 & \text{si } k \geq 0 \end{cases} \tag{3.19}$$

e' joue un rôle analogue au "Dirac" e, mais relativement aux applications croissantes :

PROPOSITION 3.3.3.1. *Une application $u \in \overline{\mathbb{R}}_{\max}^{\mathbb{Z}}$ est croissante ssi $u * e' = u$.*

Démonstration.

$$u * e'(k) = \sup_p [u(k-p) + e'(p)] = \sup_{p \geq 0} u(k-p) = \sup_{l \leq k} u(l)$$

d'où la conclusion. □

COROLLAIRE 3.3.3.2. *L'ensemble* Dat *des applications croissantes* $\mathbb{Z} \to \overline{\mathbb{R}}_{\max}$*, muni du* max *et du produit de sup-convolution est un dioïde, ayant* e' *pour élément unité.*

Si un transfert h est croissant, alors on a $h = h * e'$, ce qui montre que h est la réponse à l'entrée e'. L'entrée e' peut être qualifiée "d'impulsion croissante". Elle s'interpète physiquement comme suit. Au vu de (3.19), e' signifie que les les événements numérotés 0,1,2,3 ... arrivent à l'instant 0 (et que les événements antérieurs se sont produits à l'instant $-\infty$). Autrement dit, le système commence à fonctionner (en régime maximal) à l'instant 0.

3.3.4 Opérateurs sur les dateurs

L'opérateur γ est a priori défini sur $\overline{\mathbb{R}}_{\max}^{\mathbb{Z}}$. On peut cependant considérer la restriction de γ aux dateurs (i.e. aux applications croissantes).

PROPOSITION 3.3.4.1. *Pour toute application croissante u, on a*

$$(\gamma^n \oplus \gamma^p)u = \gamma^{\min(n,p)}u \quad .$$

Démonstration. On a

$$(\gamma^n \oplus \gamma^p)u(k) = \max(u(k-n), u(k-p)) = u(k - \min(n,p)) = \gamma^{\min(n,p)}u(k) \quad .$$

□

PROPOSITION 3.3.4.2. *On a plus généralement la règle de simplification :*

$$t \geq s \text{ et } n \leq p \;\Rightarrow\; \forall u \in \mathsf{Dat}, \quad (t\gamma^n \oplus s\gamma^p)u = t\gamma^n u \quad . \tag{3.20}$$

Démonstration.

$$\begin{aligned}
(t\gamma^n \oplus s\gamma^p)u &= (t(\gamma^n \oplus \gamma^p) \oplus s\gamma^p)u \;\; \text{(via 3.3.4.1)} \\
&= (t\gamma^n \oplus (t\gamma^p \oplus s\gamma^p))u \\
&= (t\gamma^n \oplus t\gamma^p)u \;\; (\text{car } t \oplus s = t) \\
&= t\gamma^n
\end{aligned}$$

Cette règle admet une interprétation simple en termes graphiques. Par exemple, les graphes d'événements temporisés des figures 3.15,(a1) et (a2) sont équivalents *du point de vue de la relation entrée sortie*, i.e. réalisent la même application au plus tôt $u \mapsto y$. De même pour les graphes (b1) et (b2) (on rappelle que les temps de séjour sont représentés par des bâtonnets.

EXEMPLE 3.3.4.3. Soient deux machines travaillant en parallèle et traitant les pièces à raison d'une toutes les trois unités de temps. On a représenté sur la Figure 3.16,(a) le graphe d'événements temporisé, en (b) sa transcription opératorielle et les équations correspondantes. Il vient en substituant x_1 :

$$x_2 \succeq 3\gamma^2 x_2 \oplus 3u, \quad y \succeq x_2$$

d'où la solution au plus tôt

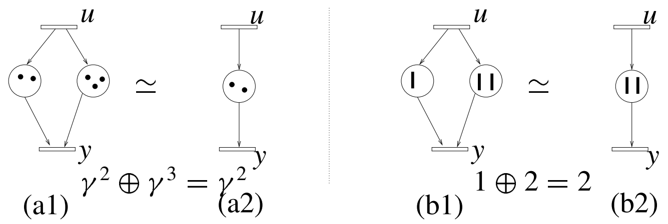


FIG. 3.15: Interprétation graphique des règles de simplification

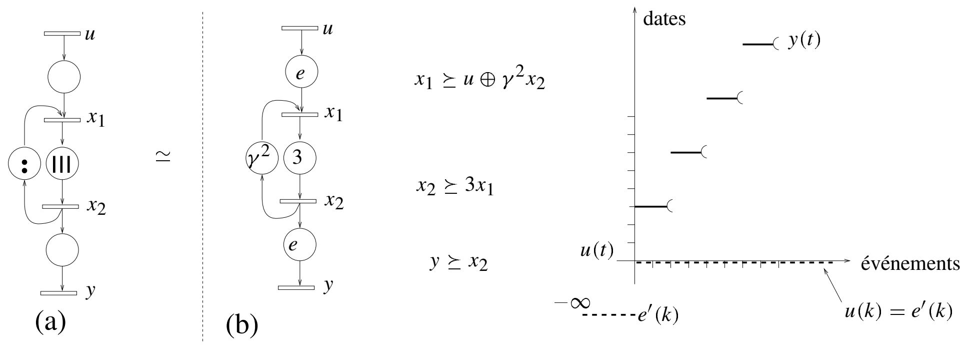


FIG. 3.16: Graphe d'événements, opérateurs associés, équations, réponse impulsionnelle

$$y = 3(3\gamma^2)^* u = \bigoplus_{k \in \mathbb{N}} 3^{k+1}\gamma^{2k} u \quad . \tag{3.21}$$

Finalement

$$y(k) = h * u(k) = \sup_{i \in \mathbb{N}} [3 \times (i+1) + u(k-2i)] \quad . \tag{3.22}$$

En prenant pour entrée l'impulsion croissante e' (une infinité de jetons arrivent en u à l'instant 0), on obtient pour sortie une fonction croissante en escalier à accroissements périodiques de pente moyenne $\frac{3}{2}$.

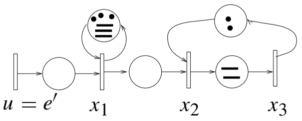
EXEMPLE 3.3.4.4. Sur la planète Mars, il y a deux mathématiciens qui collaborent de la manière suivante : le premier produit trois conjectures simultanées tous les trois ans à partir de l'année zéro. Le second travaille exclusivement sur les conjectures du premier, met deux ans pour élucider une conjecture, et peut travailler sur au plus deux conjectures en même temps. On prétend qu'après un transitoire, une conjecture sera élucidée chaque année. Ce résultat peut sembler non intuitif, dans la mesure où l'on s'attend plutôt à un phénomène de ppcm des cyclicités. La preuve algébrique qui suit montre que les cyclicités sont en fait reliés à certaines équations linéaires en nombre entiers, pour lesquelles via Bezout, on obtient le pgcd des cyclicités.

On se convainc que le système représente par le graphe d'événements de la Figure 3.17 avec l'entrée $u = e'$. Le premier mathématicien est représenté par la transition x_1. En fait, on a $x_1 = 3\gamma^3 x_1 \oplus e'$, ce qui entraîne $x_1 = (3\gamma^3)^* e'$. On voit facilement que[4]

$$x_1(k) = \begin{cases} 3[\frac{k}{3}] & \text{si } k \geq 0 \\ -\infty & \text{si } k < 0, \end{cases}$$

[4] $[x]$ note la partie entière de x

ce qui représente bien trois événements se produisant toutes les trois unités de temps à partir de l'instant 0. $x_3(n)$ représente la date à laquelle la n-ième conjecture est résolue par le second mathématicien. En éliminant l'inconnue intermédiaire x_2, on obtient le dateur au plus tôt :



$$x_1 \succeq 3\gamma^3 x_1 \oplus u$$
$$x_2 \succeq \gamma^2 x_3 \oplus x_1$$
$$x_3 \succeq 2x_2$$

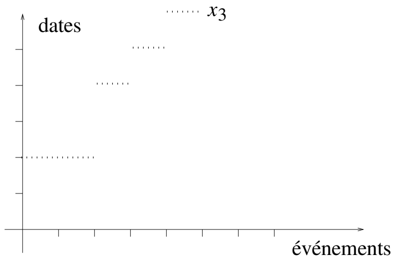


FIG. 3.17: Deux producteurs placés en série

$$x_3 = 2(2\gamma^2)^*(3\gamma^3)^* e' \ .$$

Or

$$(3\gamma^3)^*(2\gamma^2)^* = \left(\bigoplus_{i\in\mathbb{N}} (3\times i)\gamma^{3i}\right)\left(\bigoplus_{j\in\mathbb{N}} (2\times j)\gamma^{2j}\right) = \bigoplus_{i,j\in\mathbb{N}} (3\times i + 2\times j)\gamma^{3i+2j} \ .$$

On a

$$\begin{aligned} 0 &= 3\times 0 + 2\times 0, \\ 2 &= 3\times 0 + 2\times 1, \\ 3 &= 3\times 1 + 2\times 0 \\ 4 &= 3\times 0 + 2\times 2 \end{aligned}$$

et l'on voit sans difficulté que tout entier supérieur à 2 s'écrit sous la forme $3i + 2j$. On a donc

$$(3\gamma^3)^*(2\gamma^2)^* = e \oplus 2\gamma^2 \oplus 3\gamma^3 \oplus 4\gamma^4 \oplus \ldots = e \oplus 2\gamma^2(1\gamma)^* \ .$$

Finalement, les dates de résolution des conjectures sont données par

$$x_3 = 2(e \oplus 2\gamma(2\gamma)^*)e' \ .$$

Il s'agit de la fonction en escalier représentée à droit ede la Figure 3.17, à accroissements ultimement périodiques de période 1 (alors que les deux mathématiciens ont des périodicités de 3 et 2). C'est donc un cas où des pgcd interviennent pour le calcul de la période.

3.3.5 Opérateurs de décalage sur les compteurs

Pour les compteurs, la situation est complètement duale. Un compteur est une application croissante : $\mathbb{Z} \to \mathbb{R}_{\min}$. Notons δ l'opérateur de décalage :

$$\delta u(t) \stackrel{\text{def}}{=} u(t-1) \ .$$

δ vérifie la règle suivante duale de $\gamma^n \oplus \gamma^p = \gamma^{\min(n,p)}$:

$$(\delta^s \oplus \delta^t)u = \delta^{\max(s,t)}u \ . \tag{3.23}$$

Cela résulte en effet de

$$(\delta^s \oplus \delta^t)u(\tau) = \min(u(\tau - t), u(\tau - s)) = u(\tau - \max(s,t)) \ .$$

Nous laissons le lecteur se convaincre que toutes les manipulations précédentes en dateurs admettent des versions duales en compteurs.

3.3.6 Application : simplification de Graphe d'Événements

Nous concluons ce chapitre en calculant la série de transfert du graphe d'événements de la Figure 3.12. Il s'agit d'un exemple spectaculaire où l'application de règles algébriques permet de simplifier les graphes d'événements. Nous pensons que le lecteur a intérêt à regarder en détail la résolution (apparemment technique) des équations qui suivent. Une bonne partie des propriétés de de l'opérateur γ y apparaît. On pourra aussi se référer à [27] pour la théorie générale. On a d'après (3.2) les équations au plus tôt relatives aux dateurs :

$$\begin{array}{rcl} x_1(n) & = & 3u_1(n) \oplus x_2(n-1) \\ x_2(n) & = & 1u_2(n-1) \oplus 1x_1(n) \\ x_3(n) & = & 2x_3(n-1) \oplus x_1(n) \oplus 1x_2(n) \\ y(n) & = & 3x_3(n) \oplus x_2(n-1) \end{array} \tag{3.24}$$

Soit avec l'opérateur γ.

$$\begin{array}{rcl} x_1 & = & 3u_1 \oplus \gamma x_2 \\ x_2 & = & 1\gamma u_2 \oplus 1x_1 \\ x_3 & = & 2\gamma x_3 \oplus x_1 \oplus 1x_2 \\ y & = & 3x_3 \oplus \gamma x_2 \end{array} \tag{3.25}$$

En substituant x_1 dans la seconde équation, il vient

$$x_2 = 1\gamma u_2 \oplus 4u_1 \oplus 1\gamma x_2 \ .$$

La solution au plus tôt vérifie donc :

$$\begin{array}{rrl} & x_2 = & (1\gamma)^*(1\gamma u_2 \oplus 4u_1) \\ \text{d'où} & x_1 = & 3u_1 \oplus \gamma(1\gamma)^*(1\gamma u_2 \oplus 4u_1) \end{array}$$

En notant que

$$3 \oplus 4\gamma(1\gamma)^* = 3(e \oplus 1\gamma(1\gamma)^*) = 3(1\gamma)^* \ ,$$

on obtient

$$x_1 = 3(1\gamma)^* u_1 \oplus 1\gamma^2(1\gamma)^* u_2 \ .$$

En reportant les valeurs de x_1 et x_2 dans l'équation en x_3 :

$$x_3 = 2\gamma x_3 \oplus 3(1\gamma)^* u_1 \oplus 1\gamma^2(1\gamma)^* u_2 \ \oplus 1(1\gamma)^*(1\gamma u_2 \oplus 4u_1) \ . \tag{3.26}$$

Par application de (3.20), on peut écrire

$$\begin{array}{rcl} 3(1\gamma)^* \oplus 5(1\gamma)^* & = & 5(1\gamma)^* \\ 1\gamma^2(1\gamma)^* \oplus 2\gamma(1\gamma)^* & = & (2\gamma \oplus 1\gamma^2)(1\gamma)^* = 2\gamma(1\gamma)^* \ . \end{array}$$

L'équation (3.26) se simplifie donc en

$$x_3 = 2\gamma x_3 \oplus 5(1\gamma)^* u_1 \oplus 2\gamma(1\gamma)^* u_2 \ . \tag{3.27}$$

En prenant la plus petite solution de (3.27), on obtient

$$x_3 = (2\gamma)^*[2\gamma(1\gamma)^* u_2 \oplus 5(1\gamma)^* u_1] \ . \tag{3.28}$$

Comme dans un dioïde commutatif, $(a \oplus b)^* = a^* b^*$ (cf. Chapitre 2),

$$(2\gamma)^*(1\gamma)^* = ((2 \oplus 1)\gamma)^* = (2\gamma)^*$$

d'où

$$x_3 = 5(2\gamma)^* u_1 \oplus 2\gamma(2\gamma)^* u_2 \ .$$

Ainsi,

$$y = 3x_3 \oplus \gamma x_2 = 8(2\gamma)^* u_1 \oplus 5\gamma(2\gamma)^* u_2 \oplus \gamma(1\gamma)^*(1\gamma u_2 \oplus 4u_1) \ . \tag{3.29}$$

On a

$$\gamma(1\gamma)^* 1\gamma \preceq 5(2\gamma)^*\gamma, \quad 4\gamma(1\gamma)^* \preceq 8(2\gamma)^* \ .$$

Par exemple, la première inégalité résulte de $1\gamma^2 \preceq 5\gamma$ et de

$$(1\gamma)^* = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} k\gamma^k \preceq (2\gamma)^* = \bigoplus_{k\in\mathbb{N}} (2\times k)\gamma^k$$

Argument analogue pour la seconde inégalité. Finalement,

$$y = 8(2\gamma)^* u_1 \oplus 5(2\gamma)^*\gamma u_2 = \begin{bmatrix} 8(2\gamma)^* & 5(2\gamma)^*\gamma \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \end{bmatrix} \ .$$

$H = \begin{bmatrix} 8(2\gamma)^* & 5(2\gamma)^*\gamma \end{bmatrix}$ mérite le nom de matrice de transfert du système. Le lecteur se convaincra que le graphe d'événements à droite de la Figure 3.18 admet le même transfert H que le graphe d'événements à gauche de la Figure (par exemple, le circuit avec un jeton et deux bâtonnets est responsable de l'étoile $(2\gamma)^*$, et plus généralement, chaque chemin du graphe à droite correspond à un terme du transfert). On constate que certains arcs du réseaux de Petri précédent étaient en fait redondants et ont été supprimés.

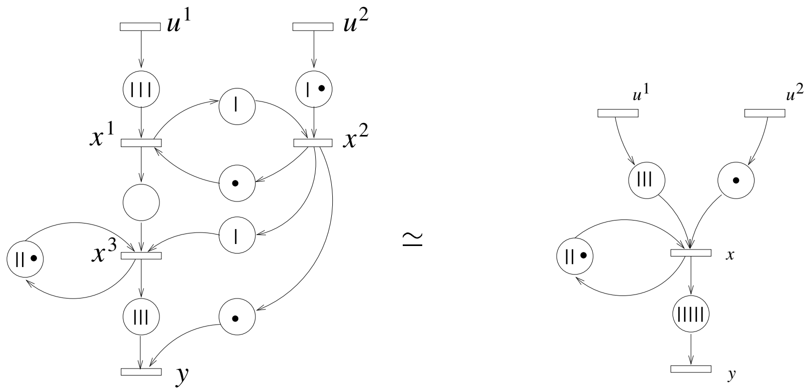


FIG. 3.18: Graphe d'événements simplifié

Notes et références bibliographiques

Nous avons laissé de coté nombre de questions intéressantes relatives aux réseaux de Petri généraux. Disons que l'un des problèmes essentiels liés à ces réseaux consiste en l'étude de l'ensemble des marquages accessibles (étant donné un marquage M, existe t-il une séquence de franchissements qui y conduise ?). Une bonne référence générale est Brams [14]. L'exposé de Reutenauer [61], plus court et d'inspiration plus mathématique nous paraît hautement recommandable. Citons également Reisig [60] et Peterson [54]. Le lecteur pourra comparer avec profit le formalisme des réseaux de Petri avec celui du Grafcet décrit par Blanchard [11]. Pour les graphes d'événements temporisés, on pourra se reporter à la thèse de Chretienne [22], à Carlier et Chretienne [18], au livre de Baccelli, Cohen, Olsder et Quadrat [4] et aux articles [24, 25, 26, 27].

Chapitre 4

Propriétés spectrales et asymptotiques des matrices (max,+)

Introduction

On a vu au chapitre 3 que certains systèmes à événements discrets en régime autonome et en particulier les graphes d'événements temporisés lorsque les entrées ne sont pas contraignantes, donnaient lieu à des équations de type $x_n = Ax_{n-1}$ dans les algèbres $(\max, +)$ (équation aux dateurs) ou $(\min, +)$ (équation aux compteurs). Cela motive l'étude des propriétés de la suite $\{A^n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Le résultat essentiel de ce chapitre est que, sous une condition d'irréductibilité, on a une propriété de cyclicité de la forme $A^{n+c} = \lambda^c A^n$ pour n assez grand. Dans l'algèbre $(\min, +)$, λ s'interprète comme le taux de production du système. En fait, λ est caractérisé comme l'unique valeur propre de la matrice A. Ce chapitre présente d'abord les propriétés spectrales des matrices $(\max, +)$ ou $(\min, +)$ (valeurs propres et vecteurs propres). On montre ensuite le théorème de cyclicité. On s'est efforcé de mettre en évidence le parallèle avec l'algèbre usuelle, qui rend tous ces résultats très naturels.

4.1 Valeurs propres, vecteurs propres

On pourrait présenter la théorie spectrale des matrices $(\max, +)$ de manière autonome. Cependant, nous pensons qu'elle se comprend mieux par analogie avec un théorème classique relatif aux matrices à coefficients positifs ou nuls : le théorème de Perron-Frobenius. Ce théorème s'énonce à l'aide de la notion clé de matrice irréductible, que nous présentons maintenant. Cette notion qui remonte au moins à Markov et à Frobenius, n'est autre qu'une version matriciellle de la forte connexité des graphes.

4.1.1 Matrices irréductibles

Dans toute cette sous-section, $(\mathcal{S}, \oplus, \otimes)$ désignera un semianneau (non nécessairement idempotent), dont le zéro sera noté ε, vérifiant les deux propriétés suivantes

$$a \oplus b = \varepsilon \Rightarrow a = \varepsilon \text{ et } b = \varepsilon \ , \tag{4.1}$$

$$a \otimes b = \varepsilon \Rightarrow a = \varepsilon \text{ ou } b = \varepsilon \ . \tag{4.2}$$

Nous appelerons *positifs*[1] ces semianneaux.

On rappelle qu'à une $n \times n$-matrice A à coefficients dans un semianneau $\mathcal{S}$, est associé le graphe (orienté) à n sommets $1, \ldots, n$ et avec un arc du sommet j au sommet i dès que $A_{ij} \neq \varepsilon$

Dans un graphe orienté, on définit la relation de *forte connexité* : $i\mathcal{R}j$ s'il existe un chemin de i à j et aussi un chemin de j à i. Par convention, il existe toujours un chemin (de longueur nulle) de i à i. Les classes d'équivalence sont appelées les composantes fortement connexes. Un graphe est dit *fortement connexe* s'il y a une seule classe d'équivalence pour la relation $\mathcal{R}$.

PROPOSITION 4.1.1.1. *Soit $\mathcal{S}$ un semianneau positif. Soit $A \in (\mathcal{S}^+)^{n\times n}$. Les propositions suivantes sont équivalentes.*

1. *Le graphe associé à la matrice A est fortement connexe.*
2. *On ne peut pas partitionner la matrice A sous la forme triangulaire par blocs :*

$$A = P \begin{bmatrix} B & C \\ \varepsilon & D \end{bmatrix} P^{-1} \tag{4.3}$$

   où P est une matrice de permutation.

3. *$(I \oplus A)^{n-1}$ a tous ses coefficients strictement positifs.*

La matrice A sera dite irréductible *lorsqu'elle vérifie les conditions ci-dessus.*

Démonstration. Étant donné un naturel non nul n et $a \in \mathcal{S}$, nous notons[2] $n.a = a \oplus \cdots \oplus a$ (n fois). Lorsque $a, b \in \mathcal{S}$ commutent, on a la formule du binôme (qui se prouve comme d'habitude) :

$$(a \oplus b)^n = \bigoplus_{k=0}^{n} C_n^k . a^k b^{n-k} \quad . \tag{4.4}$$

Moyennant cette identité, (iii)⇔(i) résulte de ce que $(I \oplus A)^{n-1}_{ij} = \bigoplus_k C^k_{n-1}.A^k_{ij}$. En effet, cette somme est non nulle ssi l'un des A^k_{ij} est non nul, i.e. compte tenu de l'interprétation combinatoire du produit de matrice produite au Chapitre 2,§2.2.4, si et seulement s'il existe un chemin[3] de j à i dans le graphe associé à A.
(ii)⇒(i) : Après renumérotation des vecteurs de base, on peut supposer $P = \mathrm{Id}$. On constate alors qu'il n'y a pas de chemin allant[4] "du bloc B au bloc D", ce qui contredit la forte connexité du graphe associé à A. La réciproque est aussi facile, et nous laissons le lecteur s'en convaincre. En fait, (ii) et (i) ne sont que la même propriété énoncée dans deux langages : l'un matriciel et l'autre combinatoire. □

[1]Les semianneaux vérifiant la propriété (4.1) sont appelés *zerosumfree* par Golan [41]. Les seuls semianneaux positifs que nous aurons à traiter ici sont le semianneau des réels positifs ou nuls $(\mathbb{R}^+, +, \times)$, le semianneau de Boole $(\mathbb{B}, \oplus, \otimes)$ (cf. Chap. 1,1.2.4.2), le semianneau (max,+) (i.e. $\mathbb{R}_{\max}$) et ses dérivés. Le lecteur pourra s'il le souhaite remplacer $\mathcal{S}$ par $\mathbb{R}_{\max}$ ou $\mathbb{R}^+$ dans toute la suite.

[2]Par exemple, $n.a = n \times a$ dans $(\mathbb{R}^+, +, \times)$, $n.a = a$ dans $\mathbb{R}_{\max}$. Il faudrait dire qu'il y a un unique morphisme de monoïde $\varphi : (\mathbb{N}, +) \to (\mathcal{S}, \oplus)$, tel que $\varphi(1) = a$, que l'on note $n.a = \varphi(a)$, et que l'opération $(n, a) \to n.a$ équipe $\mathcal{S}$ d'une structure de $(\mathbb{N}, +, \times)$ semimodule, qui devient triviale dans le cas des semianneaux idempotents, mais ce serait très pédant.

[3]a priori de longueur au plus $n-1$, mais dans un graphe à n sommets, il existe un chemin p' de j à i ssi il existe un chemin p de longueur au plus $n-1$ de j à i. Un tel chemin p s'obtient par exemple en éliminant les circuits éventuels du chemin p'.

[4]de manière précise, si B est de taille p et D de taille q (et donc $p + q = n$), pour $1 \leq i \leq p$ et $p + 1 \leq j \leq p + q$, il n'y a pas de chemin allant du sommet i au sommet j.

L'intérêt de l'irréductibilité tient à ce qu'un vecteur propre d'une matrice irréductible a toutes ses composantes non nulles. L'on peut qualifier cette propriété de syndicale (un implique tous).

LEMME 4.1.1.2 (SOLIDARITÉ DES MATRICES IRRÉDUCIBLES). *Soit $\mathcal{S}$ un semianneau positif, $A \in \mathcal{S}^{n\times n}$ irréductible, et $u \in (\mathbb{R}^+)^n \setminus \{\varepsilon\}$ tels que $Au = ru$. Alors $u_i \neq \varepsilon$ pour tout $i \in \{1, \dots, n\}$.*

Démonstration. Soit j un indice tel que $u_j \neq \varepsilon$. De $ru_i = (Au)_i = \bigoplus_k A_{ik}u_k$, on tire que tout i accessible en un coup depuis j (i.e. tel que $A_{ij} \neq \varepsilon$) vérifie $u_i \neq \varepsilon$. En raisonnant de proche en proche, tout i étant accessible en un nombre fini de coups depuis j, on a que $u_i \neq \varepsilon$. □

EXERCICE 4.1.1.3. Montrer qu'une matrice carrée A à coefficients dans un semianneau positif est nilpotente ssi son graphe n'a pas de circuits. Caractériser l'indice de nilpotence (i.e. le plus petit k tel que $A^k = \varepsilon$) en termes de graphe. Est il vrai que le graphe d'une matrice nilpotente soit un arbre ? une forêt ?

EXERCICE 4.1.1.4. Montrer qu'un semianneau $\mathcal{S}$ est positif ssi l'application $\pi : \mathcal{S} \to \mathbb{B}$ (où $\mathbb{B} = \{\varepsilon, e\}$ désigne le semianneau des booléiens), définie par $\pi(\varepsilon) = \varepsilon$ et $\pi(x) = e$ pour $x \neq \varepsilon$, est un morphisme de semianneaux. Application : soient $A_1, \dots, A_k$ des matrices carrées à coefficients dans $\mathcal{S}$. Donner un algorithme pour décider s'il existe un entier r et un choix d'indices $i_1, \dots, i_r$ tel que le produit $A_{i_1} \dots A_{i_r}$ soit nul. Donner une borne (ne dépendant que de la dimension ambiante n et du nombre de générateurs k) pour la plus petite valeur de r.

4.1.2 Un peu de culture : théorie classique de Perron-Frobenius

Cette section a d'abord une fonction culturelle et peut être sautée par le lecteur qui ne s'intéresse qu'aux systèmes à événements discrets.

La théorie spectrale des matrices max-plus, que l'on va présenter, est motivée par la nostalgie du résulat suivant, prouvé par Perron en 1907 pour les matrices à coefficients tous positifs et par Frobenius en 1912, pour les matrices irréductibles à coefficients positifs ou nuls.

THÉORÈME 4.1.2.1 (PERRON-FROBENIUS). *Soit $A \in (\mathbb{R}^+)^{n\times n}$ irréductible. Le rayon spectral*[5] *de la matrice A est valeur propre de A. L'espace propre associé est une droite engendrée par un vecteur u à composantes toutes strictement positives.*

Avant de montrer ce théorème, on va en proposer une justification heuristique partielle. Considérons la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}$$

et introduisons le cône positif $\mathcal{C} = (\mathbb{R}^+)^2$. Soit f l'endomorphisme associé à la matrice A. La positivité des coefficients de A entraîne que $\mathcal{C}$ est envoyé sur un nouveau cône

$$\mathcal{C}_1 = f(\mathcal{C}) = \mathbb{R}^+ \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} + \mathbb{R}^+ \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} \subset \mathcal{C}$$

De même, $\mathcal{C}_1$ est envoyé par f sur un cône $\mathcal{C}_2 \subset \mathcal{C}_1$, et ainsi de suite. En peut donc définir $\mathcal{C}_\infty = \bigcap_{n\geq 1} \mathcal{C}_n$. On a représenté ces cônes sur la Figure 4.1. On constate que $\mathcal{C}_n$ se rétrécit et

[5] i.e. le plus grand module des valeurs propres de A, soit $\rho(A) = \sup\{|\lambda| \mid \lambda \text{ vap de } A\}$.

converge vers la demi-droite D formée des multiples (positifs) du vecteur [1, 1], demi-droite qui est forcément propre (car $f(D) \subset D$ par passage à la limite dans $f(\mathcal{C}_n) \subset \mathcal{C}_n$), ce qui montre que A admet au moins une valeur propre positive associée à un vecteur propre positif. Une démonstration de ce résultat consiste en suivant cette idée à se placer dans l'espace

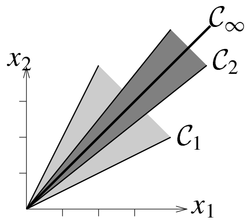


FIG. 4.1: Interprétation géométrique du théorème de Perron-Frobenius

projectif[6] et à montrer que l'application induite par f admet un point fixe (c'est à dire une droite invariante, donc un vecteur propre à composantes positives), ce qui peut se faire en appliquant le théorème du point fixe de Brouwer (une application continue d'une boule de $\mathbb{R}^n$ dans elle même admet un point fixe), on montre alors grace à l'irréductibilité que l'application linéaire projective associée à f envoie dans lui même un compact convenable homéomorphe à une boule. On peut aussi avec Birkhoff montrer que f est contractante pour une métrique projective [10]. Maintenant que le lecteur devrait s'être convaincu du résultat, on s'autorise à parachuter la preuve suivante (due à Wielandt) a priori moins naturelle mais beaucoup plus précise.

Démonstration. On introduit la "sous-valeur propre maximale" :

$$r = \sup\{t \in \mathbb{R}^+ \mid \exists u \in (\mathbb{R}^+)^n \setminus \{0\},\ Au \geq tu\} \enspace .$$

Si u est un vecteur propre associé à la valeur propre λ, en notant $|u|$ le vecteur dont les coordonnées sont les valeurs absolues des coordonnées de u, on a par l'inégalité triangulaire :

$$|\lambda u| = |\lambda||u| = |Au| \leq A|u|$$

d'où il résulte que $r \geq |\lambda|$, et en prenant le sup sur les valeurs propres, $r \geq \rho(A)$. Soit une suite (u_k, r_k) telle que $u_k \in (\mathbb{R}^+)^n$, $Au_k \geq ru_k$, $r_k \to r$. Quitte à normaliser u_k, on peut supposer que u_k appartient à la sphère unité S. Par compacité de $S \cap (\mathbb{R}^+)^n$, la suite u_k admet un point d'accumulation $u \in S \cap (\mathbb{R}^+)^n$ qui vérifie

$$Au \geq ru \enspace .$$

Supposons que $(Au)_i > ru_i$. Comme $(I + A)^n$ a toutes ses composantes positives, en posant $v = (I + A)^n u$, on obtient :

$$Av = (I + A)^n Au > r(I + A)^n u = rv$$

avec maintenant inégalité stricte pour *chaque* composante de v, ce qui contredit la maximalité de r. On a donc $Au = ru$ et $r = \rho(A)$. Nous montrons maintenant que l'espace propre associé est de dimension 1. Soit w vecteur propre (non nécessairement réel) associé à $\rho(A)$. De $Aw = rw$, on tire

[6] i.e. le quotient de $(\mathbb{R}^+)^n \setminus \{0\}$ par la relation d'équivalence : $x \sim y$ ssi $\exists\lambda$ scalaire, $x = \lambda y$

$$A|w| \geq r|w| \ ,$$

et en raisonnant comme ci-dessus, $A|w| = r|w|$. Il résulte du Lemme 4.1.1.2 et de la remarque qui précède qu'un vecteur propre pour r a toutes ses composantes non nulles. Soient x et y deux vecteurs propres associés à la vap r. Le vecteur $z = x_1 y - y_1 x$ a sa première coordonnée nulle et vérifie $Az = rz$, donc $z = 0$, ce qui montre que x et y sont proportionnels. Donc l'espace propre associé à r est la droite vectorielle de direction u. □

Nous allons voir maintenant de quelle manière ces résultats s'étendent au cas (max, +).

4.1.3 Valeurs propres et vecteurs propres (max, +)

On étudie les valeurs propres et vecteurs propres de la matrice A, i.e. les vecteurs $u \in \mathbb{R}^n_{\max} \setminus \{\varepsilon\}$ et scalaires $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$ tels que

$$Au = \lambda u \ . \tag{4.5}$$

4.1.3.1 *(Interprétation physique des vecteurs propres).* Soit un système de production en régime autonome vérifiant l'équation aux dateurs

$$x(n+1) = Ax(n) \ .$$

Si u est vecteur propre de A, et si l'on prend la condition initiale $x_0 = u$, on obtient $x(n+1) = \lambda \otimes x(n) = \lambda + x(n)$. Autrement dit, une pièce est produite toutes les λ unités de temps : λ est donc l'inverse du taux de production. En outre, le vecteur propre u donne une condition initiale autorisant un fonctionnement périodique (de période 1) du système.

De manière analogue au cas classique (cf. Proposition 4.1.1.1) on dira qu'une matrice est irréductible si le graphe associé est fortement connexe, ou, ce qui est équivalent, si la matrice $(I \oplus A)^{n-1}$ a tous ses coefficients $\succ \varepsilon$.

EXEMPLE 4.1.3.2. Voir Figure 4.2. On a représenté le coefficient a_{ij} sur l'arc $j \mapsto i$. La matrice est irréductible (il y a un chemin entre n'importe quels sommets). Par contre, la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$$

n'est pas irréductible car il n'y a pas de chemin du sommet 2 au sommet 1.

$$A = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon & 2 \\ e & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 2 & 3 \end{bmatrix}$$

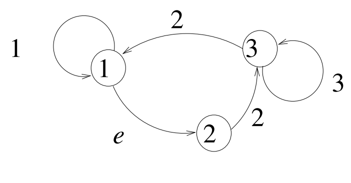


FIG. 4.2: Une matrice et son graphe

THÉORÈME 4.1.3.3. *Une matrice $A \in (\mathbb{R}_{\max})^{n \times n}$ irréductible admet une unique valeur propre, notée $\rho(A)$, donnée par*

$$\rho(A) = \bigoplus_{k=1}^{n} (\mathrm{tr}\ A^k)^{1/k} \ . \tag{4.6}$$

Avant de montrer ce résultat, nous faisons quelques remarques sur la quantité $\rho(A)$ définie en (4.6). On note que dans l'algèbre usuelle, disons pour une matrice A dont les valeurs propres sont réelles positives, le rayon spectral de A est égal à $\lim_{k\to\infty}(\mathrm{tr}A^k)^{\frac{1}{k}}$, comme on le voit aisément en mettant A sous forme triangulaire, de sorte que (4.6) est l'analogue du rayon spectral. En explicitant $\mathrm{tr}A^k$, on peut écrire

$$\rho(A) = \bigoplus_{k=1}^{n} \bigoplus_{i_1\dots i_k} \left(A_{i_1 i_2} \dots A_{i_k i_1}\right)^{1/k}$$

En définissant le *poids* $w_A(c)$ du circuit $(i_1, \dots , i_k)$ de *longueur* $l(c) = k$ par

$$w_A(c) = A_{i_1 i_2} A_{i_2 i_3} \dots A_{i_k i_1} \quad , \tag{4.7}$$

on a

$$\rho(A) = \bigoplus_{c} w(c)^{\frac{1}{l(c)}} \quad . \tag{4.8}$$

$\rho(A)$ est donc égal à la *moyenne géométrique*[7] *maximale* des poids des circuits du graphe. Si un circuit $c = c_1 c_2$ est le produit de deux circuits élémentaires, on constate que le poids moyen de c est dominé par le plus grand des poids moyens de c_1 et de c_2. On pourra donc se limiter aux circuits élémentaires pour calculer le max (4.6). En outre, comme les circuits de longueur supérieure à n sont composés, on pourra écrire, quitte à rajouter des termes redondants à (4.6) :

$$\rho(A) = \bigoplus_{k=1}^{\infty} (\mathrm{tr}\ A^k)^{1/k} \quad .$$

EXEMPLE 4.1.3.4. Pour la matrice A de la Figure 4.2, le graphe associé n'admet que les trois circuits élémentaires (1, 1), (3, 3) et (1, 2, 3, 1), d'où

$$\rho(A) = \max(A_{11}, A_{33}, \frac{A_{32} + A_{21} + A_{13}}{3}) = 3 \quad .$$

EXERCICE 4.1.3.5. Soient P une matrice de permutation, D une matrice diagonale à coefficients diagonaux non nuls et α un scalaire. Montrer les propriétés suivantes :

1. $\rho(\alpha A) = \alpha\rho(A)$.
2. $\rho(PAP^{-1}) = \rho(A)$
3. $\rho(DAD^{-1}) = \rho(A)$
4. $\rho(A) \preceq \bigoplus_{ij} A_{ij}$
5. si A symétrique, alors $\rho(A) = \bigoplus_{ij} A_{ij}$
6. $\forall k \in \mathbb{N}, \quad \rho(A^k) = (\rho(A))^k$

Nous attaquons maintenant la preuve de 4.1.3.3. D'abord, une remarque structurelle élémentaire.

LEMME 4.1.3.6. *Si A est irréductible, un vecteur propre u a toutes ses composantes différentes de ε.*

Démonstration. C'est un cas spécial du Lemme "de solidarité" 4.1.1.2, car $\mathbb{R}_{\max}$ est un semianneau positif. □

[7] géométrique dans le dioïde, i.e. arithmétique dans l'algèbre usuelle

On rappelle que l'étoile de la matrice A est définie (dans un dioïde complet) par

$$A^* = \bigoplus_{k=0}^{\infty} A^k \quad .$$

Dans un dioïde non complet, il faut que les matrices A^k admettent une borne sup pour que cette écriture ait un sens.

LEMME 4.1.3.7. *Dans le dioïde $\mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$, la matrice A^* est bien définie* [8] *si et seulement si $\rho(A) \preceq e$.*

Ce n'est que la version duale de la Proposition 2.2.5.2 du Chapitre 2.

On découpe maintenant le théorème en deux parties.

LEMME 4.1.3.8 ("SUR-VALEUR PROPRE"). *Soit $A \in (\mathbb{R}_{\max})^{n\times n}$ irréductible, $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$ et $\rho(A)$ défini comme en (4.6). Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe $u \in \mathbb{R}_{\max}^n \setminus \{\varepsilon\}$ tel que $Au \preceq \lambda u$,*
2. *$\rho(A) \preceq \lambda$.*

Le vecteur u associé sera qualifié de "sous-vecteur propre" et λ de sur-valeur propre. Le lemme affirme que lorsque A est irréductible, la moyenne géométrique maximale $\rho(A)$ est la plus petite sur-valeur propre.

LEMME 4.1.3.9 ("SOUS-VALEUR PROPRE"). *Soit $A \in (\mathbb{R}_{\max})^{n\times n}$, $\lambda \in \mathbb{R}_{\max}$ et $\rho(A)$ défini comme en (4.6). Les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *Il existe $u \in \mathbb{R}_{\max}^n \setminus \{\varepsilon\}$ tel que $Au \succeq \lambda u$,*
2. *$\rho(A) \succeq \lambda$.*

Le vecteur u sera qualifié de sur-vecteur propre et λ de sous-valeur propre. Le Lemme affirme que $\rho(A)$ est sous-valeur propre maximale (même si A n'est pas irréductible).

Avant de montrer ces lemmes, donnons un procédé simple pour construire des sous-vecteurs propres.

NOTATION 4.1.3.10 (MATRICES A_λ, $\tilde{A}$). Soit λ un scalaire non nul. On définit $A_\lambda = \lambda^{-1}A$. Lorsque $\rho(A)$ n'est pas nul, on pose $\tilde{A} = A_{\rho(A)} = (\rho(A))^{-1}A$.

LEMME 4.1.3.11. *Si $\lambda \succeq \rho(A) \neq \varepsilon$, alors toute colonne non nulle de la matrice $(A_\lambda)^*$ est sous-vecteur propre pour λ. En particulier, toute colonne non nulle de $\tilde{A}^*$ est sous-vecteur propre pour $\rho(A)$.*

Démonstration. On a par homogénéité $\rho(A_\lambda) = \lambda^{-1}\rho(A)$. La convergence de la matrice $(A_\lambda)^*$ résulte du Lemme 4.1.3.7. L'assertion découle de l'observation suivante[9] :

$$A_\lambda(A_\lambda)^* = (A_\lambda)^+ = \bigoplus_{n\geq 1}(A_\lambda)^n \preceq (A_\lambda)^* \quad . \tag{4.9}$$

□

Preuve du Lemme 4.1.3.8. (1)⇒(2). On peut écrire :

$$\forall k, \quad A^k u \preceq \lambda^k u,$$

d'où

[8] de manière équivalente, en se plongeant dans $\overline{\mathbb{R}}_{\max} = \mathbb{R}_{\max} \cup \{+\infty\}$, tous les coefficients de A^* sont $\prec +\infty$.

[9] On rappelle que la matrice A^+ est définie par $A^+ = A \oplus A^2 \oplus \dots$

$$\forall i, k \quad A_{ii}^k u_i \preceq \lambda^k u_i$$

et comme tous les u_i sont non nuls (via 4.1.3.6), on a en simplifiant

$$\forall i, k \;\; (A_{ii}^k)^{\frac{1}{k}} \preceq \lambda, \tag{4.10}$$

soit en sommant :

$$\rho(A) = \bigoplus_{k=1}^{n} (\mathrm{tr} A^k)^{\frac{1}{k}} = \bigoplus_{i=1}^{n} (A_{ii}^k)^{\frac{1}{k}} \preceq \lambda \;\; . \tag{4.11}$$

(2)⇒(1) Réciproquement, le Lemme 4.1.3.11 garantit l'existence d'un sous vecteur propre lorsque $\lambda \neq \varepsilon$. Si $\lambda = \varepsilon$, on a $\rho(A) = \varepsilon$, la matrice A est sans circuits, donc nilpotente. Soit p le plus grand p tel que $A^p \neq \varepsilon$. On aura $Au \preceq \varepsilon u$ en prenant u égal à une colonne non nulle de (A^p). Cela montre le Lemme 4.1.3.8 □

Preuve du Lemme 4.1.3.9. (1)⇒(2). Choisissant $u_i \neq 0$:

$$\lambda u_i \preceq (Au)_i = A_{i,i_2} u_{i_2} \tag{4.12}$$

pour un certain i_2 réalisant le max dans $(Au)_i$. En appliquant le même argument à i_2, et en continuant de même, on obtient une suite $\{i_p\}_{p\geq 1}$ à valeurs dans $\{1, \dots, n\}$, et donc on a des indices q et $k \leq n$ tels que $i_{q+k} = i_q$. On peut supposer $q = i$. On a alors :

$$\lambda u_i \preceq (Au)_i = A_{i,i_2} u_{i_2}, \quad \lambda u_{i_2} \preceq A_{i_2,i_3} u_{i_3}, \quad \dots \quad \lambda u_{i_k} \preceq A_{i_k,i} u_i, \tag{4.13}$$

ce qui, après des substitutions répétées, donne :

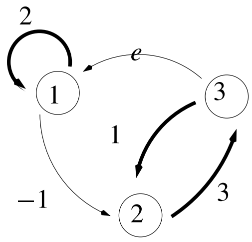
$$\lambda^k u_i \preceq A_{i,i_2} A_{i_2,i_3} \dots A_{i_k,i} u_i \;\; . \tag{4.14}$$

Comme $u_i \neq 0$, la moyenne géométrique du circuit $(i, i_2, \dots, i_k)$ est minorée par λ, d'où $\lambda \preceq \rho(A)$.

(2)⇒(1). Supposons tout d'abord $\rho(A) \neq \varepsilon$, et introduisons la notation suivante :

NOTATION 4.1.3.12 (GRAPHE CRITIQUE). Les circuits qui réalisent le max dans (4.8) sont qualifiés de *critiques*. On appelle *graphe critique*, noté $\mathsf{GC}(A)$, le sous graphe de $\mathsf{G}(A)$ formé des sommets et arêtes appartenant à un circuit critique. On notera $\mathcal{C}^c = (C_1^c, \dots, C_q^c)$ l'ensemble des q composantes fortement connexes du graphe critique.

EXEMPLE 4.1.3.13. On a représenté sur la Figure 4.3 une matrice et son graphe. A est de rayon spectral 2. Le graphe critique est en traits gras. On a les deux composantes fortement connexes $C_1^c = \{1\}$ et $C_2^c = \{2, 3\}$.



$$A = \begin{bmatrix} 2 & \varepsilon & e \\ -1 & \varepsilon & 1 \\ \varepsilon & 3 & \varepsilon \end{bmatrix}$$

FIG. 4.3: Graphe critique (en gras)

Soit i un indice appartenant à un circuit critique de A. Ce circuit a un poids e pour la matrice $\tilde{A}$. On a alors $(\tilde{A})^+_{ii} = e$, et donc les colonnes

$$(\tilde{A}^*)_{\cdot,i} = \bigoplus_{n\geq 0}(\tilde{A}^n)_{\cdot,i}, \quad (\tilde{A}^+)_{\cdot,i} = \bigoplus_{n\geq 1}(\tilde{A}^n)_{\cdot,i},$$

qui ne diffèrent éventuellement que sur la diagonale en raison du premier terme de la somme ($\tilde{A}^0 = \mathrm{Id}$) sont égales. Il résulte de

$$\tilde{A}(\tilde{A}^*)_{\cdot,i} = (\tilde{A}^+)_{\cdot,i} = (\tilde{A}^*)_{\cdot,i}$$

que le vecteur $u = (\tilde{A}^*)_{\cdot,i}$ est vecteur propre de A. Le cas $\rho(A) = \varepsilon$ se traite de manière analogue à 4.1.3.8,(2)$\Rightarrow$(1). Cela achève la preuve du Lemme 4.1.3.9. Le Théorème 4.1.3.3 résulte immédiatement des Lemmes 4.1.3.8 et 4.1.3.9. □

Nous caractérisons maintenant le moduloïde[10] des vecteurs propres de A.

THÉORÈME 4.1.3.14. *Soit $A \in (\mathbb{R}_{\max})^{n\times n}$ irréductible et $C^c_1, \dots, C^c_q$ les composantes fortement connexes du graphe critique. Choisissons $i_1 \in C^c_1, \dots, i_q \in C^c_q$. La famille formée des colonnes suivantes de $\tilde{A}^+$:*

$$\{\tilde{A}^+_{\cdot,i_1}, \dots, \tilde{A}^+_{\cdot,i_q}\} \tag{4.15}$$

est une famille génératrice minimale du moduloïde propre de A pour la valeur propre $\rho(A)$.

Le lemme suivant montre que la famille (4.15) ne dépend pas[11] du choix des indices $i_1, \dots, i_q$.

LEMME 4.1.3.15. *Si i_s et i_t appartiennent à la même composante fortement connexe du graphe critique, alors les vecteurs $v_{i_s} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{A}^+_{\cdot,i_s}$ et $v_{i_t} \stackrel{\text{def}}{=} \tilde{A}^+_{\cdot,i_t}$ sont proportionnels.*

Démonstration. Montrons que les deux colonnes $\tilde{A}^+_{\cdot,i_s}$ et $\tilde{A}^+_{\cdot,i_t}$ sont proportionnelles. Comme i_s et i_t appartiennent à la même composante fortement connexe du graphe critique, on a $\tilde{A}^+_{i_t i_s}\tilde{A}^+_{i_s i_t} = e$, et donc, pour tout r :

$$\begin{aligned}
\tilde{A}^+_{r,i_s} &\succeq \tilde{A}^+_{r,i_t}\tilde{A}^+_{i_t i_s} \\
&\succeq \tilde{A}^+_{r,i_s}\tilde{A}^+_{i_s,i_t}\tilde{A}^+_{i_t,i_s} \\
&\succeq \tilde{A}^+_{r,i_s}
\end{aligned}$$

d'où l'on conclut que

$$\tilde{A}^+_{\cdot,i_s} = \tilde{A}^+_{\cdot,i_t}\tilde{A}^+_{i_t,i_s} \quad .$$

□

Il est donc sensé de choisir arbitrairement un indice par composante fortement connexe, comme on l'a fait. Nous attaquons maintenant la preuve du théorème.

1/ La famille (4.15) engendre le moduloïde propre Posons $v_j = \tilde{A}^+_{\cdot,j}$. On prétend qu'un vecteur propre u pour la valeur propre $\rho(A)$ vérifie

[10] i.e. module sur un dioïde, défini de manière analogue aux modules sur un anneau

[11] à une permutation et à la multiplication par des scalaires inversibles près

$$u = \tilde{A}^+ u = \bigoplus_s v_{j_s} u_{j_s} \tag{4.16}$$

ce qui montrera que la famille est génératrice. On a, comme les v_{j_s} correspondent à des colonnes de $\tilde{A}^+$:

$$\tilde{A}^+ u = \bigoplus_k \tilde{A}^+_{\cdot,k} u_k \succeq \bigoplus_s v_{j_s} u_{j_s} \quad . \tag{4.17}$$

On a d'autre part en choisissant des indices réalisant le max dans $u = \tilde{A}u$:

$$\begin{aligned} u_i &= \tilde{A}_{ii_2} u_{i_2} \\ u_{i_2} &= \tilde{A}_{i_2 i_3} u_{i_3} \quad \ldots \end{aligned}$$

En poursuivant de la sorte, on finit par obtenir un indice i_k appartenant à un circuit c tel que $w_{\tilde{A}}(c) = e$, i.e. un circuit critique. On a alors :

$$\tilde{A}^+_{r,i} u_i = \tilde{A}_{ri} \tilde{A}_{ii_2} \ldots \tilde{A}_{i_{k-1} i_k} u_{i_k} \preceq \tilde{A}^+_{ri_k} u_{i_k}$$

ce qui montre l'inégalité opposée à (4.17).

2/ La famille (4.15) est génératrice minimale Ce résultat est un peu plus délicat et peut être sauté en première lecture. Pour montrer ce résultat de type indépendance linéaire, on fait appel à une structure algébrique symétrisée. On introduit le dioïde des couples, soit $\mathbb{R}^2_{\max}$ muni des lois

$$(a, a') \oplus (b, b') = (a \oplus a', b \oplus b'), \quad (a, a') \otimes (b, b') = (ab \oplus a'b', ab' \oplus a'b) \quad .$$

Sur $\mathbb{R}^2_{\max}$ est défini un signe moins : $\ominus(a, a') = (a', a)$. On a $\ominus(x \oplus y) = (\ominus x) \oplus (\ominus y)$, $\ominus(xy) = (\ominus x)y = x(\ominus y)$ et $\ominus \ominus x = x$ comme le lecteur le vérifiera aisément. On peut identifier l'élément $a \in \mathbb{R}_{\max}$ au couple $(a, \varepsilon) \in \mathbb{R}^2_{\max}$. On plonge de la sorte $\mathbb{R}_{\max}$ dans $\mathbb{R}^2_{\max}$. Moyennant cette identification, on peut écrire $(a, a') = a \ominus a'$. Autrement dit, $\mathbb{R}^2_{\max}$ est obtenu à partir de $\mathbb{R}_{\max}$ par doublement de structure, ce qui revient à manipuler un signe moins formel. On peut alors définir le déterminant d'une matrice $B \in \mathbb{R}^{n \times n}_{\max}$ (à valeur dans $\mathbb{R}^2_{\max}$) par la formule usuelle :

$$\det B = \bigoplus_\sigma \operatorname{sgn}(\sigma) \bigotimes_{i=1}^n B_{i\sigma(i)}$$

où $\operatorname{sgn}(\sigma)$ vaut e si σ est paire et $\ominus e$ sinon. D'ordinaire, si les vecteurs colonnes d'une matrice sont linéairement dépendants, alors le déterminant de la matrice est nul. Ici, on a de manière analogue :

LEMME 4.1.3.16. *Soit B une matrice carrée telle que $B_{\cdot,k} = \bigoplus_{l \neq k} \lambda_l B_{\cdot,l}$. Alors, le déterminant de B est de la forme $a \ominus a$.*

Démonstration. Le déterminant se développant par multilinéarité comme d'habitude, il suffit de voir que le déterminant d'une matrice ayant deux colonnes identiques est de la forme $a \ominus a$. Or un couple x est de la forme $a \ominus a$ ssi $x = \ominus x$ (car alors $x = x \ominus x$), donc il suffit de montrer que $\det B = \ominus \det B$. Supposons $B_{\cdot,i} = B_{\cdot,j}$, et soit τ la transposition d'indices i, j. On a

$$
\begin{aligned}
\det B &= \bigoplus_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma) \bigotimes_{i} B_{i\sigma(i)} \\
&= \bigoplus_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma\circ\tau) \bigotimes_{i} B_{i\sigma\circ\tau(i)} \\
&= \bigoplus_{\sigma} \operatorname{sgn}(\sigma\circ\tau) \bigotimes_{i} B_{i\sigma(i)} \\
&= \ominus \det B
\end{aligned}
$$

d'où le Lemme 4.1.3.16. □

On peut maintenant conclure la preuve du point 2/. Si la famille n'est pas génératrice minimale, on a une combinaison linéaire de la forme

$$A^{+}_{\cdot,i_k} = \bigoplus_{l\neq k} \lambda_l A^{+}_{\cdot,i_l} \quad .$$

Soit $\mathcal{A}$ la matrice extraite de $\tilde{A}^{+}$ formée des lignes et colonnes d'indices $i_1, \dots, i_q$. Il suffit de voir que $\det \mathcal{A}$ n'est pas de la forme $a \ominus a$. Tout les circuits de la matrice $\mathcal{A}$ étant de poids inférieur ou égal à e, il s'ensuit que pour toute permutation σ, $\bigotimes_s \mathcal{A}_{s\sigma(s)} \preceq e$ (décomposer σ en produit de cycles). En outre, l'égalité est atteinte seulement pour la permutation identité (sinon, le poids d'un cycle non trivial serait égal à e, contredisant le fait que i_s et i_t appartiennent à des composantes fortement connexes différentes du graphe critique). Ainsi, $\det \mathcal{A} = e = (e, b)$ avec $b < e$ et n'est donc pas de la forme $a \ominus a$. □

EXERCICE 4.1.3.17. Valeurs propres et vecteurs propres de la matrice suivante

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & -2 & -3 \\ 1 & \varepsilon & 2 \\ -5 & -4 & -2 \end{bmatrix}$$

EXERCICE 4.1.3.18 *(¶)*. Montrer que

$$\rho(A) = \min\{\|DAD^{-1}\| \mid D \text{ diagonale inversible}\} \quad ,$$

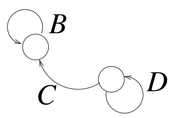
où la "norme" d'une matrice M est définie par $\|M\| = \bigoplus_{ij} M_{ij}$. Indication : on pourra faire usage de certaines des inégalités de l'exercice 4.1.3.5.

4.1.4 Extension aux matrices réductibles

Cette section peut être sautée en première lecture. Nous traitons seulement le cas d'une matrice ayant deux composantes connexes. Quitte à remplacer A par $P^{-1}AP$ (P matrice de permutation), on peut supposer que

$$A = \begin{bmatrix} B & C \\ \varepsilon & D \end{bmatrix} \tag{4.18}$$

avec $C \neq \varepsilon$ (sinon, la matrice est bloc diagonale et on est ramené à la théorie précédente) et en outre que les matrices B et D sont irréductibles[12], soit le schéma ci dessous :



[12]Le cas à plus de deux composantes connexes n'est pas essentiellement plus difficile

Au vu du dessin, le bloc D peut être qualifié de bloc amont (les arcs de C vont de D vers B).

THÉORÈME 4.1.4.1. *La matrice (4.18) admet les deux valeurs propres distinctes $\rho(D)$ et $\rho(B)$ ssi $\rho(D) \succ \rho(B)$. Sinon, elle admet l'unique valeur propre $\rho(B)$.*

Dans tous les cas, on retiendra que $\rho(A) = \max(\rho(B), \rho(D))$ est valeur propre (*le rayon spectral* $(\max, +)$ *est toujours valeur propre, même dans le cas réductible*).

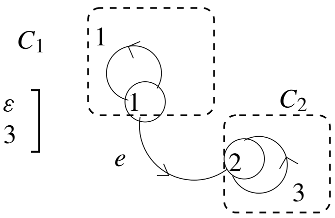
Démonstration. En partionnant un vecteur propre u sous la forme $[v, w]$, il vient

$$\begin{cases} \lambda v = Bv \oplus Cw \\ \lambda w = Dw \ . \end{cases}$$

1/ Cas $w = \varepsilon$. On se ramène au problème spectral pour B. $\rho(B)$ est donc toujours valeur propre de A. 2/ Cas $w \neq \varepsilon$. La seconde équation entraîne $\rho(D) = \lambda$ et la première entraîne d'après le Lemme relatif aux sur valeur propres que $\lambda \succeq \rho(B)$. Il est donc nécessaire que $\rho(B) \preceq \rho(D)$. Alors, on introduit comme précédemment la matrice $\tilde{A} = \rho(D)^{-1}A$, dont l'étoile converge. En raisonnant de même, on voit que toute colonne de $\tilde{A}^+$ telle que $\tilde{A}^+_{ii} = e$ est vecteur propre de A pour la valeur propre $\rho(D)$. Le théorème en résulte. □

EXEMPLE 4.1.4.2. On a représenté une matrice et sa transposée sur la Figure 4.4. On a pour A deux composantes fortement connexes $C_1 = \{1\}$, $C_2 = \{2\}$, C_2 étant en aval de C_1. D'après le théorème, on a donc l'unique valeur propre $\rho(C_2) = 3$ associée à un vecteur propre de support $\{2\}$. Par contre, cette condition est vérifiée pour A^{T}, et donc le spectre de A^{T} est égal à $\{\rho(C_1), \rho(C_2)\} = \{1, 3\}$. Contrairement au cas usuel, le spectre d'une matrice diffère du spectre de sa transposée.

$A = \begin{bmatrix} 1 & \varepsilon \\ e & 3 \end{bmatrix}$

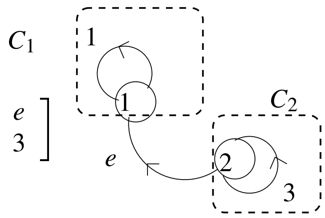


C_2 aval, $\rho(C_2) \not\preceq \rho(C_1)$

une seule valeur propre $\lambda = \rho(C_2) = 3$

vecteur propre associé $\begin{bmatrix} \varepsilon \\ e \end{bmatrix}$

$A^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & e \\ \varepsilon & 3 \end{bmatrix}$



C_1 aval et $\rho(C_1) \preceq \rho(C_2)$

deux valeurs propres $\rho(C_1) = 1$, $\rho(C_2) = 3$

vecteurs propres respectifs $\begin{bmatrix} e \\ \varepsilon \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -3 \\ e \end{bmatrix}$

FIG. 4.4: Condition de placement des valeurs propres

4.2 Cyclicité

4.2.1 Analogie avec l'algèbre usuelle

On étudie maintenant le comportement asymptotique de la suite A^n. Ici encore, nous pensons utile de rappeler certains théorèmes asymptotiques relatifs aux matrices à coefficients positifs ou nuls dans l'algèbre usuelle. C'est donc encore un paragraphe culturel. Soit tout d'abord $A \in (\mathbb{R}^+ \setminus \{0\})^{n \times n}$. Sur le cas particulier de la Figure 4.1, on constate que l'image par A^k du cône positif tend vers une droite vectorielle. En normalisant, on pose $B = \rho(A)^{-1}A$, on peut montrer que B^k converge vers une matrice fixe de rang 1. Lorsque l'on considère des matrices dont certains coefficients peuvent être nuls, la situation est plus compliquée : par exemple, pour A matrice de permutation d'ordre p, la suite $\{A^k\}_{k \in \mathbb{N}}$ cycle sur p valeurs. La notion pertinente qui permet d'éliminer cette difficulté est la suivante :

DÉFINITION 4.2.1.1. On appelle cyclicité de la matrice irréductible A, notée $c(A)$, le pgcd des longueurs des circuits du graphe associé à A. Lorsque $c(A) = 1$, la matrice A est dite primitive.

EXEMPLE 4.2.1.2. La matrice A de la Figure 4.5 a pour cyclicité 2. La matrice B est primitive. La matrice de permutation C est cyclique d'ordre 3 (la cyclicité est égale à l'ordre de la permutation). Le lecteur notera enfin qu'une matrice irréductible dont l'un des coefficients diagonaux est non nul est primitive.

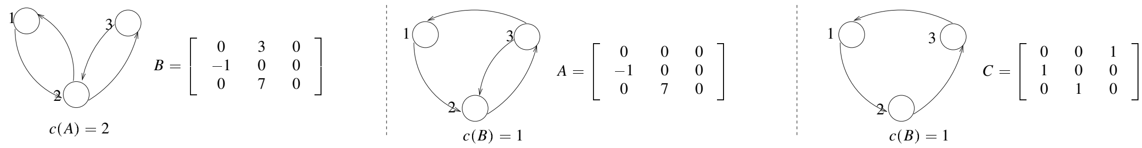


FIG. 4.5: Matrices et graphes associées

La suite des puissances d'une matrice primitive est ultimement positive :

LEMME 4.2.1.3. *Soit $A \in (\mathbb{R}^+)^{n\times n}$. Les propriétés suivantes sont équivalentes :*

1. *A est primitive*
2. *Il existe $N \in \mathbb{N}$, $k \geq N \Rightarrow \forall i, j \in \{1, \dots, n\}$, $\quad A^k_{ij} > 0$.*

Démonstration. (2)⇒(1) On a en effet $A^N_{ii} > 0$, $A^{N+1}_{ii} > 0, \dots$, soient des circuits de longueur $N, N+1, N+2, \dots$, donc $c(A) = \mathrm{pgcd}(N, N+1, N+2, \dots) = 1$.
(1)⇒(2) Soient $c_1, \dots, c_q$ des circuits[13] tels que $\mathrm{pgcd}(|c_1|, \dots, |c_q|) = 1$. Choisissons des points $i_1, \dots, i_q$ respectivement dans $c_1, \dots, c_q$. Le graphe associé à A étant fortement connexe, il existe un chemin p_1 de j à i_1, un chemin p_2 de i_1 à i_2, ..., un chemin p_{q+1} de i_q à i. Pour tout $\alpha \in \mathbb{N}^q$, on a donc le chemin de j à i :

$$\mathcal{P}_\alpha = p_1 c_1^{\alpha_1} p_2 c_2^{\alpha_2} \dots c_q^{\alpha_q} p_q$$

de longueur

$$|\mathcal{P}_\alpha| = |p_1| + \alpha_1|c_1| + \dots + \alpha_q|c_q| \tag{4.19}$$

Comme les $|c_l|$ sont premiers entre eux, il résulte facilement du théorème de Bezout que tout k assez grand est égal à $|\mathcal{P}_\alpha|$ pour un certain q-uplet d'entiers naturels α, et donc que $A^k_{ij} > 0$ pour k assez grand. □

Nous donnons pour mémoire le résultat suivant [35, 64], que nous ne prouvons pas :

THÉORÈME 4.2.1.4. *Soit A une matrice primitive et P le projecteur spectral*[14] *associé à la valeur propre $\rho(A)$. Alors*

$$A^k = (\rho(A))^k P + o((\rho(A))^k) \ . \tag{4.20}$$

[13] On note $|c_i|$ la longueur d'un chemin ou circuit c_i

[14] en général, si $\lambda_1, \dots, \lambda_q$ sont les valeurs propres de A de multiplicités respectives $n_1, \dots, n_q$, on a la décomposition en somme directe des espaces caractéristiques : $\mathbb{R}^n = \ker(\lambda_1 - A)^{n_1} + \dots + \ker(\lambda_q - A)^{n_q}$. Le projecteur π_i d'image $\ker(\lambda_i - A)^{n_i}$ et de noyau la somme des autres espaces caractéristiques est le *projecteur spectral* associé à λ_i. Ici, la situation est très simple, puisque le rayon spectral d'une matrice primitive est racine simple du polynôme caractéristique [35, 64]. Soient w et v des vecteurs propres de A respectivement à gauche et à droite ($wA = \rho(A)w$ et $Av = \rho(A)v$), alors on montre que P est donné par $P = (wv)^{-1}vw$.

En mettant A sous forme de Jordan, ce théorème revient à montrer que $\rho(A)$ est racine simple du polynôme caractéristique et que toutes les autres racines sont de module strictement inférieur.

Le proposition suivante ramène l'étude asymptotique des matrices irréductibles non primitives à celle des matrices primitives.

PROPOSITION 4.2.1.5. *Soit A irréductible. La matrice $A^{c(A)}$ est bloc diagonale, chaque bloc étant primitif.*

LEMME 4.2.1.6. *Les longueurs de deux chemins de mêmes extrémités sont congrues modulo $c(A)$.*

Démonstration. Soient p_1 et p_2 deux chemins de j à i. A étant irréductible, on a un chemin r de i à j, donc

$$\begin{cases} |rp_1| = |r| + |p_1| \equiv 0 \pmod{c(A)} \\ |rp_2| = |r| + |p_2| = 0 \pmod{c(A)} \end{cases}$$

et en faisant la différence $|p_1| \equiv |p_2| \pmod{c(A)}$. □

Introduisons la relation d'équivalence suivante sur $\{1, \dots, n\}$: "$i \mathcal{R} j$ ssi la longueur de tout chemin de j à i est multiple de $c(A)$".

On conclut maintenant la preuve de la proposition. Singularisons un point i. On a $c(A)$ classes d'équivalences pour la relation $\mathcal{R}$, $C_0, \dots, C_{c(A)-1}$, caractérisées comme suit :

$$j \in C_l \Leftrightarrow \text{la longueur de tout chemin de } j \text{ à } i \text{ est congrue à } l \text{ modulo } c(A)$$

On constate en outre qu'un circuit parcoure nécessairement toutes les classes successivement (quand on rajoute un arc, on passe dans la classe suivante). Ainsi, d'une part, tout chemin de longueur multiple de $c(A)$ aboutit nécessairement dans la classe d'où il part, ce qui montre que $A^{c(A)}$ est une matrice bloc diagonale, et d'autre part, l'ensemble des circuits passant par une classe donnée est égal à l'ensemble des circuits de A, ce qui montre que le pgcd des longueurs de ces circuits est égal à $c(A)$, donc que la cyclicité d'un bloc irréductible quelconque de $A^{c(A)}$ est égale à 1, ce qui montre la proposition. □

4.2.2 Cyclicité des matrices (max,+)

4.2.2.1 *(Cyclicité dans le cas (max,+)).* On définit comme suit la cyclicité d'une matrice $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$.

1. La cyclicité d'une composante connexe du graphe critique est égale au pgcd des longueurs des circuits de cette composante.
2. La cyclicité de la matrice A est égale au ppcm des cyclicités des composantes connexes du graphe critique. On la notera $c(A)$.

Le théorème suivant étend la formule asymptotique 4.2.1.4 au cas $(\max, +)$. La situation $(\max, +)$ est plus précise et plus simple, puisque le régime asymptotique est atteint en un temps fini au lieu d'être atteint asymptotiquement.

THÉORÈME 4.2.2.2 (FONDAMENTAL). *Soit $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n \times n}$ irréductible. Il existe un entier N tel que*

$$k \geq N \Rightarrow A^{k+c(A)} = (\rho(A))^{c(A)} A^k \quad . \tag{4.21}$$

LEMME 4.2.2.3. *Tout circuit du graphe critique est critique.*

Preuve du Lemme. Soit $c = (i_1, \dots, i_k)$ circuit du graphe critique. On a donc un chemin p_1 tel que $p_1 \cup (i_1 i_2)$ soit un circuit critique, p_2 tel que $p_2 \cup (i_2 i_3)$ soit un circuit critique, et ainsi de suite. Le circuit composé $p_1 \dots p_k c$ est donc critique. Si le poids moyen de c était inférieur strictement à $\rho(A)$, alors le poids moyen du circuit $p_1 \dots p_k$ serait supérieur strictement à $\rho(A)$: absurde. □

On traite d'abord le cas de matrices de cyclicité 1. Quitte à normaliser A, on peut supposer $\rho(A) = e$.

LEMME 4.2.2.4. *Soit A telle que $\rho(A) = e$ et $c(A) = 1$. On a $A^{k+1} = A^k$ pour k assez grand.*

Démonstration. 1/ Pour i appartenant au graphe critique, $A^k_{ii} = A^+_{ii} = e$ à partir d'un certain rang. Soient en effet $c_1, \dots, c_k$ des circuits de la composante connexe du graphe critique contenant i tels que

$$\mathrm{pgcd}(|c_1|, \dots, |c_k|) = 1 \ .$$

Il existe un circuit α passant par i et rencontrant chacun de c_l. On en déduit pour tout $(n_1, \dots, n_k) \in \mathbb{N}^k$ l'existence d'un circuit passant par i et d'image commutative

$$\alpha c_1^{n_1} \dots c_k^{n_k} \ .$$

Via le Théorème de Bezout, pour tout n assez grand, il existe un k-uplet d'entiers $(n_1, \dots, n_k)$ tel que $n = |\alpha| + n_1|c_1| + \dots + n_k|c_k|$. Ainsi, pour n grand, on a un circuit de longueur n passant par i. D'après le Lemme 4.2.2.3, un tel circuit est critique, d'où $A^n_{ii} = e$.

2/ Pour j appartenant au graphe critique et i quelconque, $A^k_{ij} = A^+_{ij}$ à partir d'un certain rang. Soit en effet k_0 tel que $A^{k_0}_{ij} = A^+_{ij}$. On a

$$A^{k_0+k}_{ij} \succeq A^{k_0}_{ij} A^k_{jj} = A^{k_0}_{ij} = A^+_{ij}$$

pour k assez grand d'après le point 1/. Comme l'autre inégalité est triviale, le point 2/ est acquis.

3/ Pour j n'appartenant pas au graphe critique, on va montrer qu'à partir d'un certain rang :

$$A^k_{\cdot,j} = \bigoplus_{i \text{ critique}} A^k_{\cdot,i} A^+_{ij} \ . \qquad (4.22)$$

Soit q tel que $A^q_{ij} = A^+_{ij}$. On a pour k assez grand

$$A^k_{\cdot,j} \succeq \bigoplus_{i \text{ critique}} A^{k-q}_{\cdot,i} A^q_{ij}$$

et comme d'après 2/ pour k assez grand, $A^{k-q}_{\cdot,i} = A^+_{\cdot,i}$, on obtient pour k grand :

$$A^k_{\cdot,j} \succeq \bigoplus_{i \text{ critique}} A^+_{\cdot,i} A^+_{ij} \ .$$

On montre maintenant que pour k grand, les chemins réalisant le max dans A^k_{ij} passent nécessairement par le graphe critique. On note η le poids moyen maximum des circuits non critiques (le "deuxième poids moyen"). Un tel chemin p se factorise en un chemin élémentaire (de longueur au plus $n - 1$) et des circuits de poids au plus η, d'où la majoration

$$w(p) \preceq \eta^{k-n+1} A^+_{ij} \ .$$

On en déduit que pour k grand (ne dépendant pas de p), $w(p)$ est dominé par

$$\bigoplus_{l \text{ critique}} A^+_{i,l} A^+_{lj}$$

ce qui montre l'égalité (4.22). □

Cas d'une matrice de cyclicité quelconque On pose $B = A^{c(A)}$. D'après la Proposition 4.2.1.5, B est bloc diagonale, les blocs étant irréductibles de cyclicité 1. On peut donc écrire

$$k \geq N \Rightarrow B^{k+1} = \rho(B) B^k = A^{kc(A)+c(A)} = \rho(A)^{c(A)} A^{kc(A)}$$

d'où

$$k \geq c(A)N \Rightarrow A^{k+c(A)} = \rho(A)^{c(A)} A^k$$

ce qui achève la preuve du théorème. □

EXEMPLE 4.2.2.5. Soit

$$A = \begin{bmatrix} -\eta & -2 \\ -1 & e \end{bmatrix} \ .$$

On a

$$A^n = \begin{cases} \begin{bmatrix} \eta^{-n} & -2 \\ -1 & e \end{bmatrix} & \text{si } \eta^n \leq 3 \\ \begin{bmatrix} -3 & -2 \\ -1 & e \end{bmatrix} & \text{si } \eta^n > 3 \end{cases}$$

Ainsi, le régime périodique peut être atteint au bout d'un temps arbitrairement grand.

4.2.3 Application : régime périodique et taux de production

Soit un graphe d'événements temporisé fonctionnant en régime autonome. Un tel graphe se représente par l'équation récurrente $x(k) = Ax(k-1)$. Lorsque A est irréductible, le théorème de cyclicité entraîne que le comportement est périodique, i.e.

$$x(k+c) = \rho(A)^c x(k)$$

pour k assez grand. En revenant à l'algèbre usuelle, cela s'écrit

$$x(k+c) = c \times \rho(A) + x(k) \ .$$

Autrement dit, c événements se produisent toutes les $c\rho(A)$ unités de temps, et $\rho(A)$ est le temps moyen de production d'une pièce (l'inverse du taux de production). Pour conclure, on peut donc énoncer le résultat suivant, fondemental pour la compréhension des systèmes de production :

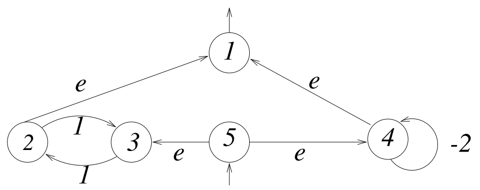
un graphe d'événements temporisé fortement connexe fonctionnant en régime autonome atteint après un régime transitoire fini un régime périodique, le taux de production étant l'inverse de la valeur propre de la matrice de la dynamique (max,+) du système.[15]

[15] L'extension au cas réductible ne présente pas une grande difficulté mais est fastidieuse (on décompose A en composante irréductibles, à chaque composante est associée un régime périodique d'après ce qui précéde, etc.). Dans la section suivante, nous établissons un résultat général plus faible

4.2.4 Temps de Cycle

On vient de voir que le théorème de cyclicité répond complètement au problème de déterminer le comportement asymptotique de la suite $x(k) = A^k x(0)$, quand la matrice A est irréductible. Une conséquence bien remarquable de l'hypothèse d'irréductibilité est que si $x(0)$ a toutes ses composantes finies, $\lim_k x(k)_i/k$ est égal à la valeur propre de A, pour tout i. Autrement dit, toutes les composantes du système fonctionnent au même rythme. Une telle condition n'est pas toujours réalisée en pratique. Par exemple, dans une ligne de production gérée naïvement, il se peut très bien que les cellules en amont produisent plus rapidement que les cellules en aval, ce qui fait d'ailleurs exploser le stock intermédiaire (d'ou le qualificatif de naïf pour la gestion). On voudrait bien sûr détecter ce genre de phénomènes, quand ils ont lieu.

Il est donc naturel de calculer l'asymptotique de $A^k x(0)$ lorsque A est réductible. Dans le semi-anneau $\mathbb{R}_{\max}$ (mais aussi, mutatis mutandis, dans le semi-anneau $(\mathbb{R}^+, +, \times)$) on a la pathologie suivante. Considérons la matrice A de la Figure 4.6. . On trouve les valeurs



$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & e & \varepsilon & e & \varepsilon \\ \varepsilon & \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon \\ \varepsilon & 1 & \varepsilon & \varepsilon & e \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & -2 & e \\ \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon & \varepsilon \end{bmatrix}$$

FIG. 4.6: Le comportement de A^k_{15} dépend de la parité de k

suivantes de la suite $\{A^k_{15}\}_{k\geq 0}$: ε,ε,0,1,−4,3,−8,5,−12,7,−16, ... On peut le voir graphiquement : A^k_{15} est égal au chemin de poids maximal de 5 à 1 dans le graphe associé à A, représenté à gauche de la figure. Il est clair sur le dessin que si k est pair, un tel chemin passe nécessairement par la composante connexe $\{4\}$ de rayon spectral égal à -2 et pas par la composante connexe $\{2, 3\}$ de rayons spectral égal à 1. Au contraire, les chemins de longueur impaire passent par cette composante connexe de rayon spectral 1, ce qui explique les taux de croissances différents de A^k_{15} suivant la parité de k.

Une manière d'exclure cette pathologie est de recourir à une opération de moyennisation, bien naturelle dans les applications aux systèmes à événements discrets. Le vecteur initial $x(0)$ n'a pas en général des coordonnées arbitraires dans $\mathbb{R}_{\max}$: on peut la plupart du temps supposer que les coordonnées de $x(0)$ sont finies (des coordonnées infinies ne sont pas dénuées de sens physique et d'intérêt, prendre $x(0)_i = -\infty$, c'est faire démarrer le nœud i avant tout le monde, i.e. lui donner infiniment d'avance, mais il s'agit d'une autre histoire que celle qui nous occupe ici).

Sur l'exemple de la matrice A ci-dessus, le lecteur vérifiera que $\lim_k (A^k x(0))_i/k = 1$, pour tout i, dès que tous les coefficiens de $x(0)$ sont finis : on a ainsi moyenné les comportements cycliques des différents coefficients de la i-ième ligne de A^k en multipliant à droite par $x(0)$.

Cette observation nous conduit à définir la quantité suivante, baptisée temps de cycle par Gunawardena [47].

DÉFINITION 4.2.4.1 (TEMPS DE CYCLE). Supposons que la matrice $A \in (\mathbb{R}_{\max})^{n\times n}$ a au moins un coefficient fini par ligne. On appelle temps de cycle de A, la limite

$$\chi(A) = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} \times (A^k x) \ , \tag{4.23}$$

où $x \in \mathbb{R}^n$ est un vecteur quelconque.

La notation $\frac{1}{k} \times (A^k x)$ est une hybridation un peu monstrueuse des notations classiques et des notations max-plus (la division est dans l'algèbre usuelle, la puissance de matrice en max-plus). Les puristes ou les esthètes préférons écrire, en max-plus : $\chi_i(A) = \lim_{k\to\infty}(A^k x)_i^{1/k}$.

Comme le remarque Gunawardena, la notion de temps de cycle est intéressante plus généralement pour toute application $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ qui vérifie les propriétés d'homogénéité et de monotonie déjà évoquées au Chapitre 1 :

$$\begin{aligned} &(\mathsf{H}) \qquad f(\lambda + x) = \lambda + f(x) \ , \\ &(\mathsf{M}) \qquad x \le y \Rightarrow f(x) \le f(y) \ , \end{aligned}$$

pour tous $\lambda \in \mathbb{R}$, $x, y \in \mathbb{R}^n$, avec, par définition, $\lambda + x = (\lambda + x_1, \ldots, \lambda + x_n)$, et $x \le y$ si $x_i \le y_i$, pour $i = 1, \ldots, n$. Cela résulte en effet de l'observation élémentaire suivante due à Crandall et Tartar.

PROPOSITION 4.2.4.2. *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vérifie* (H) *et* (M)*, alors elle vérifie :*

$$(\mathsf{N}) \qquad \|f(x) - f(y)\| \le \|x - y\| \ ,$$

où $\|\cdot\|$ désigne la norme sup. Réciproquement, si f vérifie (H) *et* (N)*, alors elle vérifie* (M).

Autrement dit, sous l'hypothèse d'homogénéité, les propriétés de monotonie et de non-dilatation pour la norme sup sont équivalentes. Avant de montrer cette proposition, nous en déduisons sinon l'existence du temps de cycle χ, du moins le fait que χ ne dépend pas de la condition initiale $x \in \mathbb{R}^n$.

COROLLAIRE 4.2.4.3 (UNIVERSALITÉ DU TEMPS DE CYCLE). *Si $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ vérifie* (H) *et* (M)*, la limite $\chi(f) = \lim_{k\to\infty} k^{-1} f^k(x)$, si elle existe pour un $x \in \mathbb{R}^n$ particulier, existe pour tout $y \in \mathbb{R}^n$, et a la même valeur.*

En effet, d'après la proposition qui précède, f vérifie (N), et donc $\|f^k(x) - f^k(y)\| \le \|x - y\|$. Le corollaire en résulte aussitôt. Passons maintenant à la preuve de cette proposition.

Démonstration. On peut écrire :

$$-\|x - y\| + y \le x \le y + \|x - y\| \ .$$

Sous les hypothèses (H) et (M), on en tire :

$$-\|x - y\| + f(y) \le f(x) \le f(y) + \|x - y\| \ ,$$

donc $\|f(x) - f(y)\| \le \|x - y\|$. On a montré la première assertion de la proposition : ((H) et (M)) $\Rightarrow$ (N).

Passons à la seconde assertion. Si $x \le y$, on a $0 \le y - x \le \|y - x\|$, et donc $-\|y - x\| \le y - x - \|y - x\| \le 0$, ce que nous réecrivons :

$$x \le y \Rightarrow \|y - (x + \|y - x\|)\| \le \|y - x\| \ . \tag{4.24}$$

En supposant en outre que l'hypothèse (N) est vérifiée, on tire de (4.24) :

$$x \le y \Rightarrow \|f(y) - f(x + \|y - x\|)\| \le \|y - x\| \ .$$

En utilisant (H), il vient

$$x \le y \Rightarrow \|f(y) - (f(x) + \|y - x\|)\| \le \|y - x\| \ .$$

On peut réécrire la dernière igégalité sous la forme $\|U - W\| \le W$, avec $W = \|y - x\|$ et $U = f(y) - f(x)$. On a alors : $U \ge W - \|U - W\| \ge 0$, i.e. $f(y) \ge f(x)$. On a montré ((H) et (N)) $\Rightarrow$ (M). $\square$

En général, les hypothèses d'homogénéité de de monotonie (H) et (M) ne suffisent pas à garantir l'existence du temps de cycle $\chi(f)$. Dans le cas des applications max-plus linéaires, le temps de cycle existe bien et se calcule comme suit. On note $\mu(A)_i$ le max des poids moyens des circuits qui sont en amont de i dans le graphe associé à A (rappelons que le poids moyen du circuit $(i_1, \ldots, i_k, i_1)$ vaut $k^{-1}(A_{i_1 i_2} + \cdots + A_{i_k i_1})$).

PROPOSITION 4.2.4.4. *Si $A \in (\mathbb{R}_{\max})^{n\times n}$ a au moins un coefficient fini par ligne, on a $\chi(A) = \mu(A)$.*

En attendant la version suivante du polycopié (c'est un trou), la preuve –pas très longue– est laissée en exercice au lecteur (voir [47]).

4.2.5 Algorithme de Karp pour le calcul du temps de cycle et du rayon spectral

Le rayon spectral de la matrice A peut se calculer simplement. Un algorithme naïf consiste à évaluer[16] la formule (4.6) ce qui suppose la tabulation des puissances successives de la matrice A jusqu'à l'ordre n (= taille de A). Pour une matrice pleine, on a ainsi un algorithme de temps d'exécution $O(n^4)$.

Mais on peut faire beaucoup mieux. Une méthode plus efficace (en temps $O(n^3)$) permettant de calculer la valeur propre d'une matrice consiste à appliquer une formule due à Karp [49], que nous présentons ci-après. En outre, une autre classe de méthodes, dites d'itérations sur les politiques, battent l'algorithme de Karp d'un ordre de grandeur avec un temps moyen d'exécution expérimentalement pratiquement linéaire en le nombre de coefficients de la matrice (=$O(n^2)$), mais elles sont plus longues à décrire, et on ne sait pas prouver, pour l'instant, que le temps d'exécution dans le pire des cas est polynomial, voire $O(n^3)$, comme les expériences le laissent conjecturer. Nous renvoyons provisoirement le lecteur intéressé à la section relative à l'algorithme de Howard sur la page web de l'auteur (http ://amadeus.inria.fr/gaubert).

Karp a énoncé son algorithme dans le cas des matrices irréductibles. Dans le cas des matrices réductibles, nous allons montrer que le même algorithme calcule en fait naturellement le temps de cycle.

Le cœur algébrique de la formule de Karp est le résultat suivant "à la Wielandt", analogue à la caractérisation du rayon specttal des matrices irréductibles comme sous-valeur-propre maximale ou sur-valeur-propre minimale donnée plus haut.

THÉORÈME 4.2.5.1 (SUPER-CONVOLUTION). *Soit $y \in (\mathbb{R}_{\max})^{n\times 1} \setminus \{\varepsilon\}$, et $A \in (\mathbb{R}_{\max})^{n\times n}$ une matrice ayant au moins un coefficient fini par ligne. Posons*

$$\Lambda = \{\lambda \in \mathbb{R} \mid \; yA^n \le \bigoplus_{1\le k\le n} \lambda^k y A^{n-k}\} \enspace .$$

On a

$$\max_{\substack{1\le i\le n\\ y_i\neq\varepsilon}} \chi_i(A) = \min \Lambda \enspace . \tag{4.25}$$

Démonstration. Notons $\overline{\mu}$ la quantité à gauche de (4.25). Pour tout $j \in \{1, \ldots, n\}$, on peut choisir $i \in \{1, \ldots, n\}$ tel que $(yA^n)_j = y_i A^n_{ij}$, et un chemin p de longueur n de j à i tel que $A^n_{ij} = w(p)$. Un tel chemin passe au moins deux fois par un même sommet, que nous notons l. Ainsi, on peut écrire p comme la concatenation des chemins $p_2 c p_1$, où c est un circuit

[16] On se souviendra que $a^{\frac{1}{k}}$ en (max,+) vaut $1/k \times a$ avec les notations usuelles, de sorte que (4.6) n'est autre que la moyenne arithmétique maximale des circuits de la matrice A.

de longueur $k \geq 1$ passant par l, p_1 un chemin de j à l (peut être vide), et p_2 un chemin de l à i (peut être vide). Puisque i est en amont de l, on a, en utilisant la caractérisation du temps de cycle donnée dans la Prop. 4.2.4.4, $w(c) \leq \overline{\mu}^k$. Donc, $w(p) \leq \overline{\mu}^k A_{ij}^{n-k}$, et $(yA^n)_j \leq \overline{\mu}^k (yA^{n-k})_j$. Une telle inégalité ayant lieu pour tout j (le cas échéant avec un k différent), on a montré que $\overline{\mu} \in \Lambda$.

Il reste à voir que $\overline{\mu}$ est le plus petit élément de Λ. Prenons un quelconque $\lambda \in \Lambda$. On a

$$yA^n \leq \bigoplus_{1 \leq k \leq n} \lambda^k y A^{n-k} \quad .$$

Par une récurrence immédiate, on prouve :

$$\forall p \geq 0,\ \ yA^{n+p} \leq \bigoplus_{1 \leq k \leq n} \lambda^{k+p} y A^{n-k} \quad .$$

En multipliant à droite par $x \in \mathbb{R}^n$, on obtient :

$$yA^{n+p}x \leq \bigoplus_{1 \leq k \leq n} \lambda^{k+p} y A^{n-k} x \quad .$$

D'où on tire facilement :

$$\begin{aligned}
\max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ y_i \neq \varepsilon}} \chi_i(A) \quad &= \quad \max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ y_i \neq \varepsilon}} \lim_{p \to \infty} (A^{n+p}x)_i^{\frac{1}{n+p}} \\
&= \lim_{p \to \infty} \left(\max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ y_i \neq \varepsilon}} (A^{n+p}x)_i \right)^{\frac{1}{n+p}} \quad = \quad \lim_{p \to \infty} (yA^{n+p}x)^{\frac{1}{n+p}} \leq \lambda \quad .
\end{aligned}$$

Ainsi, $\overline{\mu} \leq \lambda$, pour tout $\lambda \in \Lambda$, ce qui achève la preuve. □

COROLLAIRE 4.2.5.2. *Sous les hypothèses précédentes, on a*

$$\max_{\substack{1 \leq i \leq n \\ y_i \neq \varepsilon}} \chi_i(A) = \max_{\substack{1 \leq j \leq n \\ (yA^n)_j \neq \varepsilon}} \min_{1 \leq k \leq n} \frac{(yA^n)_j - (yA^{n-k})_j}{k} \quad . \tag{4.26}$$

Avec les notations max-plus, cela s'écrit :

$$\bigoplus_{\substack{1 \leq i \leq n \\ y_i \neq \varepsilon}} \chi_i(A) = \bigoplus_{\substack{1 \leq j \leq n \\ (yA^n)_j \neq \varepsilon}} \bigwedge_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{(yA^n)_j}{(yA^{n-k})_j} \right)^{\frac{1}{k}} \quad . \tag{4.27}$$

Démonstration. Les assertions suivantes sont clairement équivalentes

$$yA^n \leq \bigoplus_{1 \leq k \leq n} \lambda^k y A^{n-k}$$

$$(yA^n)_j \neq \varepsilon \Rightarrow \exists k \in \{1, \dots, n\},\ (yA^n)_j \leq \lambda^k (yA^{n-k})_j$$

$$(yA^n)_j \neq \varepsilon \Rightarrow \exists k \in \{1, \dots, n\},\ \left(\frac{(yA^n)_j}{(yA^{n-k})_j} \right)^{\frac{1}{k}}$$

$$\bigoplus_{\substack{1 \leq j \leq n \\ (yA^n)_j \neq \varepsilon}} \bigwedge_{1 \leq k \leq n} \left(\frac{(yA^n)_j}{(yA^{n-k})_j} \right)^{\frac{1}{k}} \leq \lambda$$

Ainsi, on voit que le Corollaire 4.2.5.2 n'est qu'une simple reformulation du Théorème 4.2.5.1. □

Par spécialisation du Corollaire 4.2.5.2, nous optenons la formule donnée par Karp pour les matrices irréductibles.

COROLLAIRE 4.2.5.3 (FORMULE DE KARP). *Pour toute matrice $A \in (\mathbb{R}_{\max})^{n\times n}$ irréductible, et pour tout $i \in \{1,\ldots,n\}$, on a :*

$$\rho(A) = \chi_i(A) = \max_{\substack{1\le j\le n \\ A^n_{ij}\neq\varepsilon}} \min_{1\le k\le n} \frac{A^n_{ij} - A^{n-k}_{ij}}{k} \enspace .$$

Démonstration. Appliquer le Corollaire 4.2.5.2 au vecteur y tel que $y_i = e$ et $y_j = \varepsilon$ pour $j \neq i$. □

Cette formule permet aisément de calculer l'une quelconque des coordonnées du temps de cycle et a fortiori le rayon spectral $\rho(A)$: il suffit de prendre y comme ci-dessus, de mettre les vecteurs yA^k, $k = 1,\ldots,n$ dans un tableau, et d'appliquer la formule (4.26), ce qui exige un espace mémoire $O(n^2)$ et un temps $O(n^3)$. Dans le cas où la matrice est codée de manière creuse, en notant E le nombre d'arcs du graphe associé, il faut un temps $O(nE)$. L'espace mémoire naïf $O(n^2)$ est rédhibitoire pour bien des applications pratiques (pour fixer les idées, $n = 10^5$, $E = 3n$). Nous laissons le lecteur trouver la petite astuce qui permet d'evaluer la formule de Karp avec seulement une place mémoire $O(n)$ (et un temps d'exécution encore $O(nE)$, mais cependant doublé par rapport à l'évaluation naïve, on n'a rien sans rien).

4.2.6 Calcul direct du taux de production à partir du graphe d'événements

Dans ce qui précède, on a associé à un graphe d'événements donné une matrice $A \in \mathbb{R}_{\max}^{n\times n}$ et montré que le taux de production était égal au rayon spectral de A. On peut aussi caractériser directement le taux de production à partir du graphe sans avoir à construire la matrice A, aussi le résultat suivant nous semble-t-il le plus important de ce chapitre en ce qui concerne les applications.

THÉORÈME 4.2.6.1 (FONDAMENTAL). *Le taux de production λ d'un graphe d'événements temporisé fortement connexe est caractérisé par*

$$\lambda = \min_{c \text{ circuit élémentaire}} \frac{N(c)}{T(c)} \enspace , \tag{4.29}$$

où $N(c)$ dénote le nombre total de jetons du circuit et $T(c)$ la somme des temporisations des places du circuit.

Démonstration. On a vu au Chapitre 3,§3.2.5 qu'en l'absence d'entrées, un graphe d'événements admettait les équations suivantes dans $\mathbb{R}_{\max}$

$$x(k) = A_0^*A_1x(k-1) \oplus \ldots \oplus A_0^*A_ax(k-a) \enspace , \tag{4.30}$$

où x désigne le vecteur des fonctions dateurs. Cela s'écrit de manière équivalente sous la forme d'état $X(k) = \mathcal{A}X(k-1)$ avec

$$X(k) = \begin{bmatrix} x(k) \\ \vdots \\ x(k-a+1) \end{bmatrix}, \quad \mathcal{A} = \begin{pmatrix} A_0^*A_1 & A_0^*A_2 & \ldots & A_0^*A_a \\ \mathrm{Id} & \varepsilon & \ldots & \varepsilon \\ \varepsilon & \ddots & & \vdots \\ \varepsilon & \ldots & \mathrm{Id} & \varepsilon \end{pmatrix}$$

Il importe ici de se souvenir comment les matrices $A_0, \ldots, A_a$ sont obtenues à partir du graphe d'événements initial. Supposons par exemple une unique place P sans jetons avec un temps de séjour de t_p unités de temps, située immédiatement entre les transitions j et i. On a l'inéquation $x_i(k) \geq x_j(k) + t_p$, autrement dit, le coefficient t_p associé à une place à 0 jetons apparaît dans la matrice A_0 : on a $A^0_{ij} = t_p$. De même, $(A_1)_{ij}$ correspond à la temporisation maximale des places situées immédiatement entre j et i et contenant un unique jeton, A_2 correspond aux places contenant 2 jetons, et ainsi de suite. À chaque arc du graphe de $\mathcal{A}$, nous associons un chemin du réseau de Petri de la manière suivante. D'une part, à un arc correspondant à un coefficient de la forme $(A_0^* A_r)_{ij}$ de $\mathcal{A}$, nous associons un chemin du réseau de Petri, partant de la transition j, empruntant une place avec r jetons, poursuivant par un nombre quelconque (fini, peut être nul) de places sans jetons, finissant en la transition i, et de poids total $(A_0^* A_r)_{ij}$ (le poids est ici le temps total de séjour). L'existence d'un tel chemin résulte clairement de l'interprétation de $A_0^* A_r$ en termes de graphe (ce chemin n'est en général pas unique). D'autre part, à un arc correspondant à un coefficient de la forme Id_{ii} de $\mathcal{A}$, on associe le chemin de longueur et de poids nul dans le réseau de Petri, allant de i à i. Plus généralement, à un chemin p de $\mathcal{A}$, on associera le chemin du réseau de Petri formé en mettant bout à bout les chemins ainsi associés aux différents arcs de p. Pour tout circuit c de longueur k de $\mathcal{A}$, il est clair que le terme $w(c)/|c|$ est égal à $T(c')/N(c')$ pour le circuit c' du réseau de Petri ainsi associé à c. Réciproquement, si c' est un circuit vérifiant l'égalité dans (4.29), c' est associé à un circuit c de $\mathcal{A}$ par la correspondance décrite. La formule en résulte, moyennant l'observation que la forte connexité du réseau de Petri entraî ne la forte connexité du graphe de $\mathcal{A}$, laquelle est un sous-produit immédiat de cette correspondance. □

EXERCICE 4.2.6.2. Quel est le taux de production du graphe d'événements de la Figure 3.12 du Chapitre 3 ?

4.2.7 En résumé

Nous pensons utile de conclure cet exposé de la théorie spectrale (max, +) en offrant un tableau comparant les résultats avec ceux de la théorie de Perron-Frobenius usuelle.

<table>
<tr><th></th><th>Cas classique</th><th>Cas (max, +)</th></tr>
<tr><td>Propriétés
spectrales</td><td>irréductible $\Rightarrow$
unique valeur propre positive
t.q. vecteur propre associé positif.

$\rho(A) = \max\{t \mid \exists u \in (\mathbb{R}^+)^n \setminus \{0\},\ Au \geq tu\}$</td><td>irréductible $\Rightarrow$
unique valeur propre
graphe critique irréductible $\Rightarrow$
une seule droite propre

$\rho(A) = \max\{t \mid \exists u \in (\mathbb{R}_{\max})^n \setminus \{\varepsilon\},\ A \otimes u \succeq tu\}$</td></tr>
<tr><td>Propriétés
asymptotiques
(cas irréductible)</td><td>cyclicité
$c(A) = $ pgcd des longueurs
des circuits de A

$A^{nc(A)} \simeq \rho(A)^{nc(A)} P$</td><td>1/ si une seule composante f.connexe
du graphe critique,
$c(A) = $ pgcd longueurs
des circuits critiques
2/ en général,
$c(A) = $ ppcm des cyclicités
des composantes f. connexes
du graphe critique

$n \geq N \Rightarrow A^{n+c(A)} = \rho(A)^{c(A)} A^n$</td></tr>
</table>

4.2.8 Quelques mots sur l'extension au cas probabiliste : exposant de Lyapunov des produits de matrices aléatoires

Il s'agit ici d'indiquer brièvement comment ces résultats peuvent se généraliser au cas des matrices aléatoires. Nous renvoyons le lecteur à [4] pour un traitement détaillé.

L'étude du comportement asymptotique de A^n était motivée par le fait que les coefficients de A représentent essentiellement les durées (fixes) de certaines tâches. Plus généralement, on peut s'intéresser au cas où ces durées sont aléatoires. Soit $x(n)$ le vecteur des dateurs du graphe. On aura pour le système autonome une représentation dans l'algèbre $(\max, +)$ du type

$$x(n) = A(n-1)\dots A(1)A(0)x(0) \quad ,$$

où les $A(k)$ sont des matrices aléatoires : $A_{ij}(k)$ représente le temps minimal (aléatoire) de transfert du jeton numéroté k entre les transitions j et i, et l'on s'interroge sur l'existence de la limite de l'espérance

$$L \stackrel{\text{def}}{=} \lim_{n\to\infty} \mathbb{E}[\frac{1}{n} \times x(n)] \tag{4.31}$$

qui est l'inverse du taux de production moyen (i.e. L_i^{-1} représente le nombre moyen de tirs de la transition i par unité de temps). Dans le cas où $\lim_n \mathbb{E}[x(n+1) - x(n)]$ existe, on constate immédiatement (par une moyenne de Cesaro) que $L = \lim_n \mathbb{E}[x(n+1) - x(n)]$: L est alors le le *temps moyen* entre deux événements, ce qui justifie le nom traditionnel de *temps de cycle*. Nous ferons pour simplifier les hypothèses suivantes :

HYPOTHÈSES 4.2.8.1.

1. *Les matrices aléatoires* $A(0), A(2)\dots$ *sont i.i.d. (c'est-à-dire indépendantes identiquement distribuées).*
2. *Les variables aléatoires* $A_{ij}(k)^+ \stackrel{\text{def}}{=} A_{ij}(k) \oplus e = \max(A_{ij}(k), 0)$ *sont intégrables (i.e.* $\mathbb{E}[A_{ij}(k)^+] < \infty$*).*
3. *La condition initiale* $x(0)$ *est une variable aléatoire telle que* $\mathbb{E}[\min_i x(0)_i] > -\infty$ *et* $\mathbb{E}[\max_i x(0)_i] < +\infty$.

Considérons dualement $A_{ij}(k)^- \stackrel{\text{def}}{=} \min(A_{ij}(k), 0)$. On a $A_{ij}(k) = A_{ij}(k)^+ + A_{ij}(k)^-$, donc l'hypothèse (2) nous permet de définir sans ambiguïté $\mathbb{E}[A_{ij}(k)] \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}[A_{ij}(k)^+] + \mathbb{E}[A_{ij}(k)^-]$, éventuellement égale à $-\infty$ (l'hypothèse d'intégrabilité a éliminé le cas ambigu $+\infty + -\infty$). Cette dissymétrie entre $+\infty$ et $-\infty = \varepsilon$ vient du fait que ε est une "bonne valeur" qui correspond à l'absence de certains arcs dans le graphe, et qu'il est essentiel de pouvoir traiter, alors que $+\infty$ correspond à des temps moyens d'attente infinis, qu'il est naturel d'exclure dans une première étude.

Considérons maintenant

$$\|x(n)\| \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_i x_i(n)$$

(autrement dit, on ne regarde que le sup des coefficients de $x(n)$, soit la date la plus tardive d'occurrence de l'événement n à tous les nœuds du graphe). On se contentera du résultat élémentaire suivant qui montre l'existence d'un "taux de production" dans le cas stochastique.

THÉORÈME 4.2.8.2. *Sous les hypothèses 4.2.8.1, on a l'existence de*

$$\ell \stackrel{\text{def}}{=} \lim_n \mathbb{E}[\frac{\|x(n)\|}{n}] \quad . \tag{4.32}$$

Démonstration. Posons plus généralement étant donnée une matrice A non nécessairement carrée : $\|A\| \stackrel{\text{def}}{=} \bigoplus_{ij} A_{ij}$.

LEMME 4.2.8.3 (SOUS-ADDITIVITÉ DE LA NORME). *On a pour toutes matrices A, B de tailles compatibles :*

$$\|A \otimes B\| \leq \|A\| \otimes \|B\| = \|A\| + \|B\|$$

Démonstration. $\|AB\| = \bigoplus_{ij}(AB)_{ij} = \bigoplus_{ijk} A_{ik}B_{kj} \leq \bigoplus_{ijk} \|A\|B_{kj} \leq \|A\| \bigoplus_{kj} B_{kj} = \|A\|\|B\|$. □

Introduisons la notation suivante pour le produit de matrices

$$Z_{n0} \stackrel{\text{def}}{=} A(n-1)\dots A(1)A(0) \quad .$$

Il vient à partir de 4.2.8.3 :

$$\|x(n)\| = \|Z_{n0}x(0)\| \leq \|Z_{n0}\| \otimes \|x(0)\| \quad , \tag{4.33}$$

et d'autre part

$$\|x(n)\| \geq \|Z_{n0}\| \otimes \min_i x(0)_i = \|Z_{n0}\| + \min_i x(0)_i \quad , \tag{4.34}$$

d'où moyennant l'hypothèse 4.2.8.1,(3)

$$\lim_n \frac{\|x(n)\|}{n} = \lim_n \frac{\|Z_{n0}\|}{n} \quad .$$

Introduisons plus généralement pour $p > q$

$$Z_{pq} = A(p-1)\dots A(q) \quad , \qquad z_{pq} \stackrel{\text{def}}{=} \mathbb{E}\|Z_{pq}\| \quad .$$

On a pour $p > r > 0$,

$$Z_{p0} = Z_{pr}Z_{r0} \quad ,$$

donc, par sous additivité de la norme

$$z_{pq} \leq z_{pr} \otimes z_{r0} = z_{pr} + z_{r0} \quad . \tag{4.35}$$

Le point essentiel est que $Z_{p,r}$ est de même loi que $Z_{p-r,0}$ (cela résulte du caractère i.i.d des $A(k)$), donc

$$z_{p,r} = z_{p-r,0} \quad . \tag{4.36}$$

Posons maintenant

$$v_n \stackrel{\text{def}}{=} z_{n0}, \text{ de sorte que } \quad \mathbb{E}\|x(n)\| = v_n \quad .$$

Il résulte de (4.35) et de (4.36) que v_p vérifie l'inégalité *sous additive*

$$v_{p+q} \leq v_p + v_q \quad . \tag{4.37}$$

De telles suites vérifient la propriété suivante, qui est bien classique.

LEMME 4.2.8.4. *Soit* $v_n \in \mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ *une suite* sous-additive. *Alors,* $\lim_n v_n/n$ *existe dans* $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$*, et en outre*

$$\lim_n \frac{v_n}{n} = \inf_n \frac{v_n}{n} \quad .$$

La preuve est laissée au lecteur en guise d'exercice (élémentaire). On déduit aussitôt de ce lemme l'existence dans $\mathbb{R} \cup \{-\infty\}$ de la limite suivante, dite *exposant de Lyapunov*

$$\ell = \lim_p \frac{v_p}{p} = \lim_p \mathbb{E}\|A(p-1)\dots A(0)\|^{\frac{1}{p}} = \lim_p \frac{1}{p} \times \mathbb{E}\|A(p-1) \otimes \dots \otimes A(0)\| \quad . \tag{4.38}$$

$\square$

En fait, on peut montrer beaucoup mieux, à savoir que $\frac{\|x(n)\|}{n}$ converge vers l'exposant de Lyapunov ℓ de manière presque sûre (via le théorème ergodique sous additif de Kingman), et même que $\lim_n x(n)_i/n = \ell$ p.s pour tout i moyennant des conditions d'irréductibilité. Les hypothèses de type i.i.d. peuvent aussi être naturellement relaxées en des hypothèses d'ergodicité et de stationnarité [4]. Cette théorie constitue une extension au cas max, $+$ de la théorie des produits de matrices aléatoires maintenant classique [13, 34], à laquelle le terme “exposant de Lyapunov” a été emprunté. Signalons que le problème du calcul effectif de l'exposant de Lyapunov ℓ est une question ouverte. On sait seulement traiter des cas particuliers de manière exacte, et donner des bornes dans les cas généraux.

EXEMPLE 4.2.8.5. Dans le cas où $A(0), A(1) \dots$ sont des scalaires, (4.38) est une version affaiblie de la loi des grands nombres qui affirme que

$$\ell = \lim_p (A(p-1)\dots A(0))^{\frac{1}{p}} = \lim_p \frac{A(p-1) + \dots + A(0)}{p} = \mathbb{E}[A(0)] \;\; \textit{p.s.}$$

EXEMPLE 4.2.8.6. Voici un cas particulier élémentaire où l'on peut calculer l'exposant de Lyapunov grace à une chaîne de Markov finie sous jacente. Supposons que la variable aléatoire $A(0)$ ne prenne que les deux valeurs :

$$B = \begin{bmatrix} 1 & e \\ e & e \end{bmatrix}, \; C = \begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}, \quad P(A(0) = B) = p, \quad P(A(0) = C) = q, \quad p + q = 1 \quad .$$

On remarque tout d'abord que

$$\begin{aligned} x(n) &= \sum_{i \le n-1} [x(i+1) - x(i)] + x(0) = \sum_{i \le n-1} [A(i)x(i) - x(i)] + x(0) \\ &\stackrel{\text{def}}{=} \sum_{i \le n-1} f(x(i), A(i)) + x(0) \end{aligned} \tag{4.39}$$

où $f(t, D) = Dt - t$ est invariante par addition d'un scalaire sur le premier argument, soit

$$\forall \lambda \in \mathbb{R}, \quad f(\lambda \otimes t, D) = f(\lambda + t, D) = f(t, D) \quad . \tag{4.40}$$

Introduisons l'opérateur de normalisation

$$\mathcal{N} : \mathbb{R}^2_{\max} \to \mathbb{R}^2_{\max}, \; \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} e \\ x_2 - x_1 \end{bmatrix}$$

et définissons l'état normalisé $z(i) = \mathcal{N}(x(i))$. D'après (4.40), on a

$$\frac{x(n)}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i \leq n-1} f(z(i), A(i)) + \frac{1}{n} x(0) \tag{4.41}$$

ce qui exprime $x(n)/n$ comme une moyenne ergodique qui ne dépend que de z et A, à l'influence près de la condition initiale qui est négligeable (terme $\frac{1}{n}x(0)$). Il est donc loisible de choisir $x(0)$, et nous prenons l'état initial (déterministe) $x(0) = [e\ e]^T$. Grace à la normalisation, z est une chaîne de Markov n'ayant que les deux états $Z_0 = \mathcal{N}(x(0)) = [e\ e]^T$ et $Z_1 = \mathcal{N}(Bz(0)) = [e\ \ -1]^T$. Le graphe ainsi que la matrice M de cette chaîne de Markov sont représentés sur la Figure 4.7. L'unique mesure invariante est $\pi = [1 - p\ \ p]$, donc

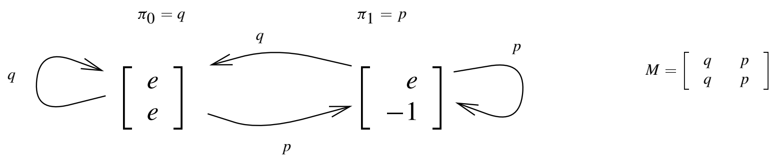


FIG. 4.7: Chaîne de Markov après Normalisation

d'après le théorème ergodique pour les chaînes de Markov et vu la formule (4.41)

$$\begin{aligned} \ell = \lim_n \mathbb{E}[x(n)/n] &= \mathbb{E}f(z_0, A(0))\pi_0 + \mathbb{E}f(z_1, A(0))\pi_1 \\ &= (p \times 1 + q \times 2)(1 - p) + (p \times 1 + q \times 2)p = p + 2q \end{aligned}$$

Notes et références bibliographiques

Les résultats de valeurs propres et vecteurs propres sont l'un des points centraux de la théorie que les différentes écoles (max,+) ont prouvé ou reprouvé avec des motivations et des degrés de précision variés. Les premiers résultats semblent remonter à Cuninghame-Green, Vorobyev [68], Romanovskiĭ[62], Gondran et Minoux [42, 43, 46]. Le théorème de cyclicité dans la forme présentée ici est du à Cohen, Dubois Quadrat et Viot [23], repris dans [4]. Un théorème de cyclicité valide dans des dioïdes plus généraux (loi multiplicative simplifiable et condition de type archimédien) a été obtenu par Dudnikov et Samborskiĭ[32, 52]. Le lecteur pourra aussi consulter le livre de Chretienne et Carlier ([18],Chapitre V, "Méthodes de Circuits Critiques") où les questions de périodicité sont traitées du point de vue de la théorie des graphes bivalués. Les graphes d'événements stochastiques sont traités en détail dans la dernière partie du livre [4].

Chapitre 5

Automates et Systèmes à Événements Discrets

Introduction

On a considéré dans l'introduction de ce cours deux classes de systèmes.

(a) Les systèmes déterministes présentant des phénomènes de synchronisation et de saturation, et dont le comportement *temporel* se représente par des équations linéaires récurrentes sur un dioïde réel (algèbre $(\max, +)$ ou $(\min, +)$) Voir par exemple le limitateur de débit, les processus d'assemblage ...

(b) Des systèmes plus généraux présentant en sus des phénomènes de concurrence (par exemple, deux utilisateurs partageant une ressource). Ces systèmes ne peuvent plus être considérés comme "déterministes", dans la mesure où plusieurs événements peuvent se produire (plusieurs trajectoires partent d'un même état initial). Cependant, on a vu sur des cas particuliers que l'ensemble des trajectoires possibles était déterminé comme l'ensemble des chemins d'un graphe, et était solution d'équations linéaires sur un dioïde de langages.

Ce chapitre d'intéresse aux systèmes de type (b). L'outil mathématique privilégié pour traiter ces systèmes d'un point de vue "logique" est la théorie des langages formels et des automates. Disons grossièrement qu'on se donne un alphabet représentant les différents événements et que le comportement d'un système à événements discrets sera représenté par le *langage* reconnu par un automate. On s'attaquera tout particulièrement aux problèmes de contrôle : on veut garantir un "bon comportement" de l'automate en interdisant éventuellement certaines transitions. Il s'agit là principalement de résultats relatifs au comportement logique de ces systèmes. Ce chapitre est conçu comme une initiation à cette théorie, et nous n'avons pas cherché à inclure les nombreuses et intéressantes extensions. Nous nous en sommes tenus aux résultats de base qui recèlent à notre avis l'essentiel des idées. Voir les notes à la fin pour un bref survol des prolongements.

5.1 Langages et Systèmes à Événements Discrets

5.1.1 Spécification d'un Système à Événements Discrets par un langage

Soit Σ un alphabet *fini*. Chaque lettre de Σ représente un événement. Une suite d'événements correspond à un mot $w = a_1 \dots a_n \in \Sigma^*$, ce qui se lit : d'abord l'événement

a_1 puis l'événement $a_2, \dots$. Le mot vide (unité pour le produit de concaténation) sera noté e. On rappelle que u est un *préfixe* de w s'il existe v tel que $uv = w$, ce que l'on note $u \leq w$. L'ordre $\leq$ est qualifié de *préfixiel*. Une partie $X \subset \Sigma^*$ est dite *préfixielle* si

$$w \in X \text{ et } u \leq w \Rightarrow u \in X \ ,$$

(X est stable par préfixe). Etant donné une partie $X \subset \Sigma^*$, on note

$$\overline{X} = \{u \in \Sigma^* \mid \exists w \in X,\ u \leq w\}$$

la *clôture préfixielle* de X. On a évidemment $\overline{\overline{X}} = \overline{X}$, $\overline{X} \supset X$, $X = \overline{X} \Leftrightarrow X$ est une partie préfixielle, ce qui justifie le terme "clôture"[1]. On spécifie le comportement d'un SED par une partie $L \subset \Sigma^*$ (on dit aussi un *langage*). Si $w = a_1 \dots a_n \in L$, cela signifie que la suite d'événements $a_1 \dots a_n$ est compatible avec le fonctionnement du système. Il est clair que tout préfixe de w est également admissible. *On spécifiera donc un système à événement discrets par une partie préfixielle L de Σ^*.*

EXEMPLE 5.1.1.1. Soit un poinçonneur automatique de tickets de métro. Soit l'alphabet $\Sigma = \{a, b, c\}$. On associe aux lettres a, b, c les événements suivants :

a : ticket introduit
b : ticket accepté
c : ticket refusé

On se convainc que l'ensemble des trajectoires possible est représenté par le langage suivant :

$$\begin{aligned} L &= \overline{(ab \oplus ac)^*} = \overline{ab \oplus ac \oplus (ab)^2 \oplus (ac)^2 \oplus abac \oplus acab \oplus \dots} \\ &= a \oplus ab \oplus ac \oplus aba \oplus aca \oplus abab \oplus \dots \\ &= (e \oplus a)(ab \oplus ac)^* \end{aligned} \tag{5.1}$$

Selon l'usage, on a identifié dans ce qui précède la lettre x et le singleton $\{x\} \subset \Sigma^*$, et l'on a noté l'union $\oplus$. Ainsi, $a \oplus b$ désigne le langage $\{a\} \cup \{b\} = \{a, b\} \subset \Sigma^*$. La notation additive est justifiée par le fait que $(\mathcal{P}(\Sigma^*), \cup, .)$ constitue un dioïde (c'est le dioïde des langages sur Σ). On peut déjà noter au vu de (5.1) que le langage décrivant le système n'est pas quelconque, mais constitue une *partie rationnelle* de Σ^*, i.e. que L s'écrit comme une expression finie faisant intervenir des parties finies et les opération $\oplus, \otimes, *$ (cf. Chap. 2,2.2.4.7).

Notre problème est ici de manier effectivement (i.e. d'un point de vue calculatoire) des langages a priori infinis. On peut dans certains cas comme ci-dessus décrire un langage infini à l'aide d'une expression rationnelle. On peut aussi le décrire comme l'ensemble des mots reconnus par un automate. Nous précisons ce point de vue dans le numéro suivant.

5.1.2 Rappels sur les automates

DÉFINITION 5.1.2.1. On appelle automate (déterministe) sur l'alphabet Σ un quadruplet

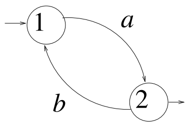
$$\mathcal{A} = (Q, \delta, q_0, Q_a) \ ,$$

où Q est un ensemble (ensemble des états), $q_0 \in Q$ un état initial, $\delta : \Sigma \times Q \to Q$ une fonction en générale partielle (i.e. non définie pour certaines valeurs) qualifiée de *fonction de transition*, et $Q_a \subset Q$ un ensemble d'états dits *finaux* ou encore appelés *états d'acceptation*.

[1] En théorie de la résiduation et des correspondances de Galois [12], une *cloture* est une application croissante f d'un ensemble ordonné dans lui même telle que $f \circ f = f$, $f \geq \mathrm{Id}$.

Dans la suite, les automates ne seront pas supposés finis, sauf spécialement lorsqu'il s'agira de calcul effectif.

La manière la plus simple de spécifier un automate est graphique : l'ensemble Q des états est représenté par l'ensemble des sommets d'un graphe orienté. On dessine une flèche $q \to q'$ valuée par la lettre $a \in \Sigma$ ssi $\delta(a,q) = q'$. La fonction de transition δ peut être donnée sous forme de tableau. L'état initial est repéré par une flèche entrante. Les états finaux par des flèches sortantes. Par exemple, prenons $\Sigma = \{a,b\}$, $Q = \{1,2\}$, $q_0 = 1$ et $Q_a = \{2\}$. Soit la fonction de transition δ donnée par le tableau à droite de la Figure 5.1 : par exemple,



	1	2
1		a
2	b	

fonction de transition

FIG. 5.1: Représentation graphique d'un automate et représentation matricielle

la première ligne signifie que $\delta(a,1) = 2$ et que $\delta(b,1)$ n'est pas défini. On obtient alors le graphe à gauche de la Figure.

On étend la fonction de transition en une fonction partielle sur $\Sigma^* \times Q$ en posant :

$$\delta(e,q) = q, \quad \delta(w\sigma, q) = \delta(\sigma, \delta(w,q))$$

(rappelons que e désigne le mot vide). Par exemple, pour l'automate 5.1, $\delta(ba,2) = \delta(a,\delta(b,2)) = \delta(a,1) = 2$. Dans la suite, on écrira $\delta(w,q)!$ pour "$\delta(w,q)$ est définie". Graphiquement, si $w = a_1 \dots a_n$, $\delta(w,q)$ est défini ssi il existe un chemin dans le graphe partant de q et portant les labels successifs $a_1 \dots a_n$. Si ce chemin conduit au sommet q', évidemment, $\delta(w,q) = q'$. On dira que le mot w est *reconnu* par l'automate $\mathcal{A}$ si $\delta(w,q_0) \in Q_a$. Nous noterons

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \{w \in \Sigma^* \mid \delta(w,q_0) \in Q_a\} \tag{5.2}$$

le *langage reconnu* par l'automate (i.e. l'ensemble des mots envoyant l'état initial sur un état final).

Du point de vue des systèmes à événements discrets, un automate représente un système dynamique, et l'on peut s'interesser à toutes ses trajectoires, y compris celles qui n'arrivent pas dans un état final. Soit donc $\overline{\mathcal{A}} = \{Q, \delta, q_0, Q\}$ l'automate obtenu à partir de $\mathcal{A}$ en rendant tous les états finaux. On s'intéressera particulièrement au langage suivant

$$\overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) \overset{\text{def}}{=} \mathcal{L}(\overline{\mathcal{A}}) = \{w \in \Sigma^* \mid \delta(w,q_0)!\} \tag{5.3}$$

que nous qualifierons de *comportement de l'automate*[2] $\mathcal{A}$. On a clairement

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) \subset \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A}), \quad \overline{\mathcal{L}(\mathcal{A})} \subset \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) = \overline{\overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A})} \ . \tag{5.4}$$

EXEMPLE 5.1.2.2. Pour l'automate de la Figure 5.1, un mot w est reconnu ssi il conduit de l'état 1 à l'état 2, i.e. ssi il commence par un nombre quelconque de circuits ab et s'achève par une lettre a, soit

[2]Cette définition est locale à la communauté des systèmes à événements discrets. Toutes les autres définitions sont standard en théorie des langages.

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = a \oplus aba \oplus ababa \oplus \ldots = (ab)^* a \quad .$$

De même, $\overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$ désigne l'ensemble des chemins partant de 1 et arrivant dans un état quelconque, soit

$$\overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) = e \oplus a \oplus ab \oplus aba \oplus abab \oplus \ldots = (ab)^*(e \oplus a) \quad .$$

On définit les ensembles des états respectivement *accessibles* et *co-accessibles* par

$$Q_{\mathrm{ac}} = \{q \in Q \mid \exists w \in \Sigma^*,\ \delta(w, q_0) = q\},$$
$$Q_{\mathrm{co}} = \{q \in Q \mid \exists w \in \Sigma^*,\ \delta(w, q) \in Q_a\} \quad .$$

L'automate est accessible ssi tous ses états le sont. Définition analogue pour la co-accessibilité. Par exemple, l'automate de la Figure 5.1 est accessible et co-accessible. L'automate est dit *émondé* si $Q = Q_{\mathrm{ac}} = Q_{\mathrm{co}}$. Soit

$$Q_{\mathrm{em}} = Q_{\mathrm{ac}} \cap Q_{\mathrm{co}}, \delta_{\mathrm{em}} = \delta|_{\Sigma \times Q_{\mathrm{em}}} \quad .$$

On définit l'automate

$$\mathrm{Em}(\mathcal{A}) = (Q_{\mathrm{em}}, \delta_{\mathrm{em}}, q_0, Q_m \cap Q_{\mathrm{em}})$$

qui est clairement émondé et reconnaît le même langage que $\mathcal{A}$. On a trivialement :

FAIT 5.1.2.3. *Si $\mathcal{A}$ est co-accessible, alors $\overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) = \overline{\mathcal{L}(\mathcal{A})}$.*

Autrement dit, sous l'hypothèse de co-accessibilité, $\overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$ n'est autre que l'ensemble des mots qui se prolongent en des mots reconnus.

EXEMPLE 5.1.2.4. L'automate de la Figure 5.1 est émondé. Pour l'automate $\mathcal{A}$ de la Figure 5.2, on a

$$Q_{\mathrm{ac}} = \{1, 2, 3\},\ \ Q_{\mathrm{co}} = \{1, 2, 4\}$$

On a représenté à droite de la Figure l'automate émondé $\mathrm{Em}(\mathcal{A})$. On voit facilement que

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = ba^* = \mathcal{L}(\mathrm{Em}(\mathcal{A})), \quad \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) = e \oplus ba^* \oplus aa^* \neq \overline{\mathcal{L}(\mathcal{A})} = \overline{\mathcal{L}}(\mathrm{Em}(\mathcal{A})) = e \oplus ba^* \quad .$$

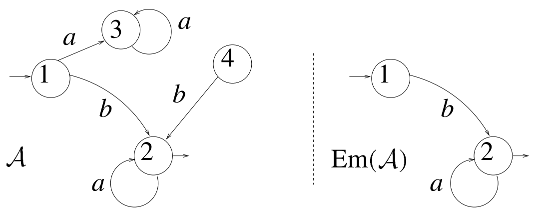
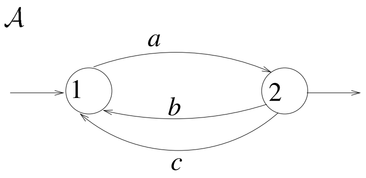


FIG. 5.2: Un automate et l'automate émondé associé

EXEMPLE 5.1.2.5. On a représenté sur la Figure 5.3 l'automate reconnaissant le langage du poinçonneur de métro.

Le lecteur pourrait se demander quel est le lien entre les langages rationnels (cf. Chap 2,2.2.4.7) et les langages reconnus par des automates. On dira qu'un langage est *régulier* s'il est reconnu par un automate fini (i.e. avec un nombre fini d'états). Nous citons pour mémoire le plus célèbre des théorèmes de la théorie des langages formels :



$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = (a(b \oplus c))^* a$$

$$\overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) = \overline{\mathcal{L}(\mathcal{A})} = (a(b \oplus c))^*(e \oplus a)$$

FIG. 5.3: J'suis l'poinçonneur des Lilas (cf. 5.1.1.1)

THÉORÈME 5.1.2.6 (KLEENE). *Soit Σ un alphabet fini. Un langage est régulier ssi il est rationnel.*

Nous ne prouverons pas complètement ce théorème. Notons simplement que l'implication régulier $\Rightarrow$ rationnel a déjà été prouvé au chapitre 2 lorsque l'on a montré que l'ensemble des chemins entre deux sommets d'un graphe (fini) est une partie rationnelle. Le langage reconnu par l'automate n'est autre que l'ensemble des chemins du sommet initial aux sommets finaux. Pour la réciproque, il suffit de vérifier que l'ensemble des langages réguliers est stable par union, produit et étoile, ce qui revient à fabriquer des automates finis reconnaissant $A \oplus B$, AB et A^* à partir d'automates reconnaissant A et B. Nous renvoyons le lecteur à [33] pour la preuve.

5.1.3 Supervision d'un automate

On considère une partition de l'ensemble des événements :

$$\Sigma = \Sigma_{\mathrm{in}} \cup \Sigma_{\mathrm{c}} \ .$$

Σ_{in} désigne l'ensemble des événements "incontrôlables" (une machine tombe en panne, un client arrive, ...) Σ_{c} désigne l'ensemble des événements que l'on peut interdire ou bien autoriser. Par exemple, si l'événement $a \in \Sigma_{\mathrm{c}}$ représente l'entrée d'un train sur une portion de voie, on peut interdire l'événement a au moyen d'un feu rouge.

DÉFINITION 5.1.3.1 (SUPERVISEUR). On appelle *superviseur* une application

$$f : \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) \to \mathcal{P}(\Sigma)$$

telle que $\forall w \in \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A}),\ f(w) \supset \Sigma_{\mathrm{in}}$.

$f(w)$ s'interprète comme *l'ensemble des événements autorisés* connaissant les événements passés donnés par le mot w. On impose $f(w) \supset \Sigma_{\mathrm{in}}$ (les événements incontrôlables sont autorisés de manière permanente).

DÉFINITION 5.1.3.2. On appelle comportement d'un automate $\mathcal{A}$ soumis au superviseur f le langage préfixiel $\overline{\mathcal{L}}_f(\mathcal{A})$ de Σ^* défini récursivement comme suit :

$$\begin{aligned} & e \in \overline{\mathcal{L}}_f(\mathcal{A}) \\ & \forall w \in \Sigma^*, a \in \Sigma,\ \left(wa \in \overline{\mathcal{L}}_f(\mathcal{A}) \Leftrightarrow w \in \overline{\mathcal{L}}_f(\mathcal{A}),\ a \in f(w) \text{ et } wa \in \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) \right) \ . \end{aligned} \tag{5.5}$$

Le *langage contrôlé* par f est par définition :

$$\mathcal{L}_f(\mathcal{A}) = \overline{\mathcal{L}}_f(\mathcal{A}) \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}) \ ,$$

i.e. l'ensemble des mots du comportement supervisé qui aboutissent dans un état final. L'automate supervisé est dit *non bloquante* si $\overline{\mathcal{L}_f(\mathcal{A})} = \overline{\mathcal{L}}_f(\mathcal{A})$.

La condition de non blocage exprime que toute tâche commencée par le système supervisé, i.e. tout mot de $\overline{\mathcal{L}}_f(\mathcal{A})$ doit pouvoir se completer en une tâche achevée (mot de $\mathcal{L}_f(\mathcal{A})$).

Pour rendre effective la définition ci-dessus d'un superviseur, on peut introduire un automate "contrôleur" réalisant cette supervision. Soit un automate $\mathcal{S} = (X, \xi, x_0, X_a)$, et $\phi : X \to \mathcal{P}(\Sigma)$ une application telle que $\forall x \in X,\ \phi(x) \supset \Sigma_{\mathrm{in}}$. On dira que $\mathcal{S}$ réalise le superviseur f si pour tout mot $w \in \overline{\mathcal{L}}_f(\mathcal{A})$:

$$f(w) = \phi(\xi(w, x_0)) \ .$$

Autrement dit, on fait lire au contrôleur $\mathcal{S}$ le même mot que l'automate à contrôler $\mathcal{A}$, et l'ensemble $f(w)$ des événements autorisés est un feedback de l'état du contrôleur $\mathcal{S}$. De manière plus précise, considérons l'ensemble des états (resp. l'état initial, resp. les états finaux) $X \times Q$ (resp. (x_0, q_0), resp. (X_a, Q_a)). Soit la fonction de transition $\xi \times \delta$ définie par

$$\xi \times \delta(\sigma, (x, q)) = \begin{cases} (\xi(\sigma(x)), \delta(\sigma, q)) & \text{si } \sigma \in \phi(x) \\ \text{non défini} & sinon. \end{cases}$$

On notera $\mathcal{S}/\mathcal{A}$ l'automate représentant "$\mathcal{A}$ supervisé par $\mathcal{S}$", soit

$$\mathcal{S}/\mathcal{A} = \mathrm{Ac}(X \times Q, \xi \times \delta, (x_0, q_0), (X_a, Q_a)) \ ,$$

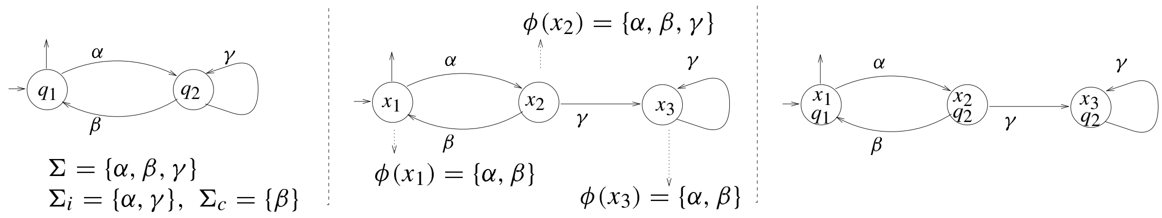
oú Ac dénote la partie accessible d'un automate. Il résulte du fait 5.1.2.3 que l'automate supervisé est non bloquant ssi $\mathcal{S}/\mathcal{A}$ est co-accessible.

EXEMPLE 5.1.3.3. Soit l'automate de la Figure 5.4,(a). Considérons le superviseur $\mathcal{S}$ de la Figure 5.4,(b). On a représenté l'automate $\mathcal{S}/\mathcal{A}$ en (c). On a

$$\mathcal{L}(\mathcal{A}) = (\alpha\gamma^*\beta)^*, \quad \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) = \overline{\mathcal{L}(\mathcal{A})} \ .$$

$$\overline{\mathcal{L}}_f(\mathcal{A}) = \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{S}/\mathcal{A}) = (\alpha\beta)^*(e \oplus \alpha\gamma^*) \ .$$

$$\mathcal{L}_f(\mathcal{A}) = (\alpha\beta)^* \ .$$



(a) Automate $\mathcal{A}$ (b) Contrôleur $\mathcal{S}$ (c) Automate supervisé $\mathcal{S}/\mathcal{A}$

FIG. 5.4: Un automate supervisé

5.2 Synthèse d'un superviseur

5.2.1 Contrôlabilité

Etant donné un automate $\mathcal{A}$ et un langage K, on se demande à quelle condition il existe un superviseur f tel que $\mathcal{L}_f(\mathcal{A}) = K$. On introduit pour cela la notion suivante.

DÉFINITION 5.2.1.1 (CONTRÔLABILITÉ). Le langage $K \subset \Sigma^*$ est dit contrôlable si

$$\overline{K}\Sigma_{\mathrm{in}} \cap \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) \subset \overline{K} \quad . \tag{5.6}$$

Autrement dit, tout préfixe de K suivi d'un événement incontrôlable admissible pour le comportement de $\mathcal{A}$ reste préfixe de K, où “les événements incontrollables ne sont pas illégaux”. La proposition fondamentale qui suit justifie le terme de “contrôlable”.

PROPOSITION 5.2.1.2. *Soit $\mathcal{A}$ un automate. Pour tout $K \subset \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$ non vide, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *il existe un superviseur f tel que $\overline{\mathcal{L}}_f(\mathcal{A}) = K$*
2. *K est une partie préfixielle contrôlable.*

Démonstration. (i)⇒(ii) : Résulte évidemment de la définition de $\overline{\mathcal{L}}_f(\mathcal{A})$ (cf. (5.5)).

(ii)⇒(i). Soit $\mathcal{B} = (X, \xi, x_0, X)$ un automate émondé reconnaissant K (comme K est préfixiel, on peut prendre tous les états finaux). Définissons, pour $x \in X$,

$$\begin{array}{rcl} \Sigma_x^0 & = & \{\sigma \mid \exists s \in K,\ \xi(s, x_0) = x,\ s\sigma \in \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) \text{ et } s\sigma \notin K\} \\ \Sigma_x^1 & = & \{\sigma \mid \exists s \in K,\ \xi(s, x_0) = x \text{ et } s\sigma \in K\} \end{array}$$

De manière intuitive, Σ_x^0 représente les événements qu'il faut prohiber (car il sortent de la cible K) et Σ_x^1 est l'ensemble des événements que l'on peut autoriser.

Comme l'automate est émondé, l'état x est accessible depuis x_0, donc la condition $\exists s, \xi(s, x_0) = x$ est toujours remplie. Notons tout d'abord que $\Sigma_x^0 \cap \Sigma_x^1 = \emptyset$. Supposons en effet $\sigma \in \Sigma_x^0 \cap \Sigma_x^1$ avec

$$\begin{array}{l} s^0 \in K, \xi(s^0, x_0) = x,\ s^0\sigma \notin K \\ s^1 \in K, \xi(s^1, x_0) = x,\ s^1\sigma \in K \quad . \end{array}$$

Alors, $\xi(\sigma, x) = \xi(\sigma, \xi(s^0, x_0)) = \xi(s^0\sigma, x_0)$ qui n'est pas défini (car $s^0\sigma \notin K$), mais par ailleurs, $\xi(\sigma, x) = \xi(\sigma, \xi(s^1, x_0)) = \xi(s^1\sigma, x_0)$ qui est bien défini : contradiction. K étant contrôlable, on a $\Sigma_x^0 \subset \Sigma_c$. Soit $\phi : X \to \Sigma$ une application vérifiant $\phi(x) \cap \Sigma_x^0 = \emptyset$, $\phi(x) \supset \Sigma_x^1 \cup \Sigma_{\mathrm{in}}$. On définit le superviseur f par $f(w) = \phi(\xi(w, x_0))$. On va montrer que $\overline{\mathcal{L}}_f(\mathcal{A}) = K$. Clairement,

$$\overline{\mathcal{L}}_f(\mathcal{A}) \subset K \quad . \tag{5.7}$$

Posons pour un langage M :

$$M^{(j)} = M \cap \Sigma^{(j)} = \{w \in M \mid |w| = j\}$$

(ensemble des mots de longueur j). On montre par récurrence sur j que $\overline{\mathcal{L}}_f(\mathcal{A})^{(j)} = K^{(j)}$. Cas $j = 1$: si $\sigma \in K$, on a $\sigma \in \Sigma_{x_0}^1$, donc $\sigma \in \overline{\mathcal{L}}_f(\mathcal{A})$. Supposons par récurrence que

$$\overline{\mathcal{L}}_f^{(j)}(\mathcal{A}) = K^{(j)} \quad .$$

Soit $s\sigma \in K^{(j+1)}$ avec $s \in K^{(j)} = \overline{\mathcal{L}}_f^{(j)}$. Comme $x = \xi(s, x_0)$ est défini, $s\sigma \in K$ entraîne que $\sigma \in \Sigma_x^1$, donc $\sigma \in f(s)$, d'où $s\sigma \in \overline{\mathcal{L}}_f(\mathcal{A})$ et $\overline{\mathcal{L}}_f^{(j+1)}(\mathcal{A}) \supset K^{(j+1)}$. L'autre inclusion étant claire d'après (5.7), le résultat est acquis. □

Le problème de supervision pour le langage reconnu $\mathcal{L}$ se résoud de manière analogue.

PROPOSITION 5.2.1.3. *Soit $\mathcal{A}$ un automate non-bloquant (i.e. co-accessible). Pour tout $K \subset \mathcal{L}(\mathcal{A})$ non vide, les deux assertions suivantes sont équivalentes :*

1. *il existe un superviseur f tel que l'autamate supervisé soit non bloquant et $\mathcal{L}_f(\mathcal{A}) = K$*
2. *K est contrôlable et $\overline{K} \cap \mathcal{L}(\mathcal{A}) = K$.*

La preuve, similaire, est laissée au lecteur.

EXEMPLE 5.2.1.4. Considérons l'automate représentant un magasin de stockage d'une capacité de trois unités à gauche de la Figure 5.5 (cf. 1,1.1). Supposons que les deux dernières places de stock soient indisponibles, et que l'on veuille limiter la capacité du magasin à une unité. Le langage K admissible est alors la partie préfixielle reconnue par l'automate $\mathcal{B}$ de la Figure 5.5, soit

$$K = (ab)^*(e \oplus a) = \overline{K} \ .$$

Supposons l'événement a contrôlable et b incontrôlable :

$$\Sigma_{\text{in}} = \{b\}, \quad \Sigma_{\text{c}} = \{a\} \ .$$

On a

$$\overline{K}\,\Sigma_i \cap \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) = (ab)^*(e \oplus a)b \cap \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) \ .$$

On a $(ab)^*ab \subset \overline{K}$ et $(ab)^*b \cap \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) = \emptyset$, donc

$$\overline{K}\,\Sigma_i \cap \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) \subset \overline{K}$$

ce qui montre que le langage K est contrôlable. Prenons comme superviseur l'automate $\mathcal{B} = (\{0', 1'\}, \xi, 0', \{0', 1'\})$, avec

$$\phi(0') = \{a, b\}, \quad \phi(1) = \{b\}$$

et posons $f(w) = \phi(\xi(w, x_0))$ On a alors $\overline{\mathcal{L}}_f(\mathcal{A}) = K$. Supposons maintenant $\Sigma_{\text{in}} =$

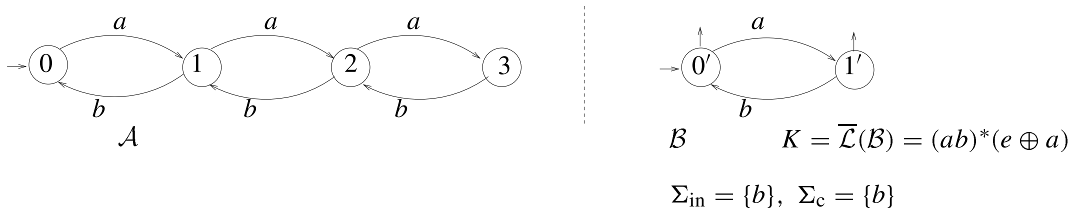


FIG. 5.5: Le langage $K = \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{B})$ est contrôlable

$\{a\}, \ \Sigma_{\text{c}} = \{b\}$. On a alors

$$\overline{K}\,\Sigma_{\text{in}} \cap \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) = (ab)^*(e \oplus a)a \cap \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) \supset \{a^2\}$$

et $a^2 \notin \overline{K}$, ce qui montre que le système n'est plus contrôlable. Tout cela est intuitivement très clair : l'événement a revient à stocker une pièce supplémentaire. Si l'on ne contrôle pas a, on ne peut pas limiter la capacité du stock.

5.2.2 Sous-langage contrôlable maximal

Soit $K \subset \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$. Même si K n'est pas contrôlable, il existe une "approximation contrôlable" naturelle de K. Il s'agit du sous langage contrôlable maximal, dont nous montrons ci après l'existence. Soit $C(K)$ l'ensemble des parties de K contrôlables, i.e.

$$C(K) = \{J \subset K \mid \overline{J}\Sigma_{\text{in}} \cap \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) \subset \overline{J}\} \ . \tag{5.8}$$

Comme $\emptyset$ est contrôlable, $C(K)$ est non vide. Au vu de la condition (5.6), il est immédiat que cet ensemble est stable par union (éventuellement infinie). Donc il admet un plus grand élément. On notera

$$K^{\uparrow} = \sup C(K) = \max C(K)$$

ce plus grand élément (sous-langage contrôlable maximal). Il faut bien voir que la définition de $K^{\uparrow}$ comme borne sup ne permet pas de le calculer. On va donner ci-après une caractérisation alternative de $K^{\uparrow}$ comme point fixe d'un opérateur, ce qui permettra de le calculer par une technique élémentaire d'itération de point fixe. Définissons l'application $\Omega : \mathcal{P}(\Sigma^*) \to \mathcal{P}(\Sigma^*)$ par

$$\Omega(J) = \sup\{T \subset K \mid \overline{T}\Sigma_{\text{in}} \cap \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) \subset \overline{J}\} \ .$$

On obtient facilement les expressions équivalentes de Ω :

$$\Omega(J) = \{t \in K \mid \bar{t}\Sigma_{\text{in}} \cap \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) \subset \overline{J}\} = K \cap \sup\{T \subset \Sigma^* \mid \overline{T}\Sigma_{\text{in}} \cap \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) \subset \overline{J}\} \ . \tag{5.9}$$

PROPOSITION 5.2.2.1. *On a $K^{\uparrow} = \Omega(K^{\uparrow})$. En outre,*

$$J = \Omega(J) \Rightarrow K^{\uparrow} \supset J \ .$$

En d'autres termes, $K^{\uparrow}$ est le plus grand point fixe de l'opérateur Ω.

Démonstration. . En fait, il s'agit d'un lemme tout à fait général sur les structures ordonnées. Soit $\mathcal{E}$ un treillis complet, et soient $f, g : \mathcal{E} \to \mathcal{E}$ deux applications croissantes, f préservant les sup quelconques :

$$f(\bigvee_{u \in \mathcal{U}} u) = \bigvee_{u \in \mathcal{U}} f(u) \quad \text{pour tout } \mathcal{U} \subset \mathcal{E} \tag{5.10}$$

($\mathcal{U}$ éventuellement infinie). Définissons de manière plus générale :

$$\mathcal{C}(K) = \{J \subset K \mid f(J) \leq g(J)\}, \quad K^{\uparrow} \stackrel{\text{def}}{=} \sup \mathcal{C}(K) \ ,$$

ainsi que

$$\mathcal{C}(K, J) = \{M \subset K \mid f(M) \leq g(J)\} \ , \omega(K, J) \stackrel{\text{def}}{=} \sup \mathcal{C}(K, J) \ .$$

Il suffit clairement de montrer que

$$J = \omega(K, J) \quad \Rightarrow \quad J \leq K^{\uparrow} \tag{5.11}$$

$$K^{\uparrow} \quad = \quad \omega(K, K^{\uparrow}) \tag{5.12}$$

Il résulte de (5.10) que $K^{\uparrow} \in \mathcal{C}(K, K^{\uparrow})$, donc

$$K^{\uparrow} \leq \omega(K, K^{\uparrow}) \ . \tag{5.13}$$

D'autre part, en spécialisant $\omega(K, J) \in \mathcal{C}(K, J)$ à $J = K^{\uparrow}$, il vient

$$f(\omega(K, K^{\uparrow})) \leq g(K^{\uparrow}) \leq g(\omega(K, K^{\uparrow}))$$

(par (5.13) et par croissance de g). Ainsi, $\omega(K, K^{\uparrow}) \in \mathcal{C}(K)$, d'où l'on tire $\omega(K, K^{\uparrow}) \leq K^{\uparrow}$. On a montré (5.12). Enfin, $J = \omega(K, J)$ entraîne $J \in \mathcal{C}(K)$, d'où $J \leq K^{\uparrow}$. □

A partir de la Proposition 5.2.2.1, il est naturel d'appliquer un argument de point fixe et de définir la suite :

$$K_0 = K, \ \ K_{j+1} = \Omega(K_j) \ . \tag{5.14}$$

En vertu de la décroissance de la suite $\{K_n\}$, on a l'existence de

$$K_{\infty} = \lim_{n \to \infty} K_n = \bigcap_{n \geq 0} K_n$$

et l'on se demande bien sûr si K_{∞} est le point fixe requis. On a $K^{\uparrow} = \Omega(K^{\uparrow}) \subset K = K_0$. Donc par récurrence $K^{\uparrow} = \Omega(K^{\uparrow}) \subset K_j$ et donc

$$K^{\uparrow} \subset \bigcap_{j \geq 0} K_j = K_{\infty} \ . \tag{5.15}$$

En général, K_{∞} n'a aucune raison d'être un point fixe et cette inclusion est stricte. Nous donnons une condition suffisante dans la section suivante.

5.2.3 Synthèse d'un automate reconnaissant $K^{\uparrow}$

Nous montrons que la convergence de la suite K_n vers le sous-langage contrôlable maximal est acquise sous les hypothèses suivantes

5.2.3.1 *(Hypothèses)*.

1. $\mathcal{A}$ est fini et K est un langage régulier (i.e. reconnu par un automate fini)
2. $K \subset \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$
3. $\overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) = \mathcal{L}(\mathcal{A})$.

L'hypothèse (i) est la plus simple qui permette de manipuler effectivement des langages. L'hypothèse (ii) signifie que le langage "cible" K est une restriction du comportement admissible du système $\overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$, cas auquel il est naturel de ce ramener au besoin en remplaçant K par $K \cap \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$. La condition (iii) enfin signifie qu'on se préoccupe de tous les événements (et pas seulement des mots acceptés). Cette condition est aussi souvent réalisée. Le lecteur pourra se reporter aux exemples de la section suivante pour juger de la classe de problème prise en compte. Moyennant ces hypothèses, on va montrer que chacun des langages K_j de la suite définie ci-dessus et convergeant vers K_{∞} est régulier. On va construire pour cela à chaque étape un automate $\mathcal{C}_j$ reconnaissant K_j, et donner la règle produisant $\mathcal{C}_{j+1}$ a partir de $\mathcal{C}_j$. On montrera que la suite $\mathcal{C}_j$ converge en un nombre fini d'itérations vers un automate $\mathcal{C}_{\infty}$ reconnaissant $K_{\infty} = K^{\uparrow}$.

Dans la suite, on notera

$$\Sigma^{\mathcal{A}}(q) = \{a \in \Sigma \ | \ \delta(a, q)!\}$$

(c'est l'ensemble des événements possibles dans l'état q). Soient

$$\mathcal{A} = (Q, \delta, q_0, Q_a) \text{ et } \mathcal{B} = (X, \xi, x_0, X_a)$$

deux automates émondés tels que $\overline{\mathcal{L}}(\mathcal{B}) \subset \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$. On dit que $\mathcal{B}$ est un *raffinement* de $\mathcal{A}$ si

$$\forall s, t \in \overline{\mathcal{L}(\mathcal{B})}, \quad \xi(s, x_0) = \xi(t, x_0) \Rightarrow \delta(s, q_0) = \delta(t, q_0) \ .$$

On a alors une unique application $h : X \mapsto Q$ telle que

$$\forall s \in \overline{\mathcal{L}(\mathcal{B})}, \quad h(\xi(s, x_0)) = \delta(s, q_0) \ .$$

Par exemple, l'automate de la Figure 5.6,(b) raffine celui de la Figure 5.6,(a), la fonction h étant tabulée sur la Figure. L'intérêt des l'hypothèses 5.2.3.1 est que l'on peut fabriquer un

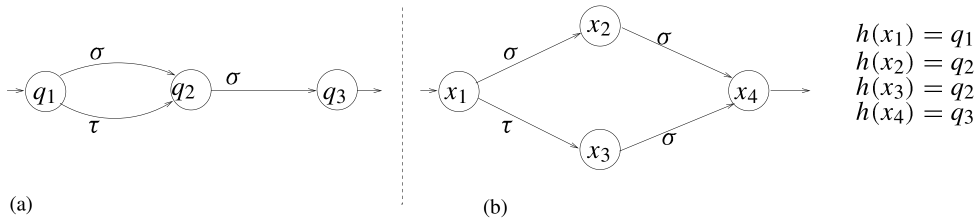


FIG. 5.6: Un automate et un raffinement

automate raffinant $\mathcal{A}$ et reconnaissant K

LEMME 5.2.3.2. *Moyennant l'hypothèse 5.2.3.1, il existe un automate fini $\mathcal{C}_0$ raffinant $\mathcal{A}$ tel que $\mathcal{L}(\mathcal{C}_0) = K$.*

Démonstration. K étant régulier, il existe un automate fini $\mathcal{B} = (Z, \alpha, z_0, Z_a)$ tel que $\mathcal{L}(\mathcal{B}) = K$. On définit le produit $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ des automates $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ par

$$\mathcal{A} \times \mathcal{B} = (Q \times Z, \delta \times \alpha, (q_0, z_0), Q_a \times Z_a)$$

où

$$(\delta \times \alpha)(\sigma, q, z) = (\delta(\sigma, q), \alpha(\sigma, z)) \ .$$

Il est clair que $\mathcal{A} \times \mathcal{B}$ reconnaît l'intersection des langages reconnus par $\mathcal{A}$ et par $\mathcal{B}$. Comme $K \subset \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$, on a

$$\overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) = K \ .$$

On ne change pas le langage reconnu par un automate en l'émondant. En posant

$$\mathcal{C}_0 = \mathrm{Em}(\mathcal{A} \times \mathcal{B}) \ ,$$

on a un automate reconnaissant K et raffinant $\mathcal{A}$. En effet, trivialement

$$\delta \times \alpha(s, q_0, z_0) = \delta \times \alpha(t, q_0, z_0) \Rightarrow \delta(s, q_0) = \delta(t, q_0)$$

□

On considère à nouveau la suite de langages $\{K_j\}$ définie plus haut.

LEMME 5.2.3.3. *Soit $\mathcal{A}$ un automate fini émondé et $\mathcal{C}_j$ un automate fini émondé raffinant $\mathcal{A}$ tel que $K_j = \mathcal{L}(\mathcal{C}_j)$. Alors $w \in \Omega(K_j)$ ssi $w \in K_j$ et*

$$\forall u \in \overline{w}, \quad x = \xi(u, x_0) \Rightarrow \Sigma^{\mathcal{A}}(h(x)) \cap \Sigma_{\text{in}} \subset \Sigma^{\mathcal{C}_j}(x) \ .$$

Démonstration. Les propriétés suivantes sont équivalentes

$$\begin{array}{l}
w \in \Omega(K_j) \\
w \in K_j \text{ et } \overline{w}\Sigma_{\text{in}} \cap \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) \subset \overline{K_j} \\
w \in K_j \text{ et } \forall u \leq w,\ u\Sigma_{\text{in}} \cap \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) \subset \overline{K_j} \\
w \in K_j \text{et } \forall u \leq w,\ \forall \sigma \in \Sigma_{\text{in}},\ u\sigma \in \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A}) \Rightarrow u\sigma \in \overline{K_i} \\
w \in K_j \text{ et } \forall u \leq w,\ \forall \sigma \in \Sigma^{\mathcal{A}}(\delta(u, q_0)) \cap \Sigma_{\text{in}},\ u\sigma \in \overline{K_j} \\
w \in K_j \text{ et } \forall u \leq w,\ \Sigma^{\mathcal{A}}(\delta(u, q_0)) \cap \Sigma_{\text{in}} \subset \Sigma^{\mathcal{C}_j}(\xi(u, x_0))
\end{array}$$

d'où la conclusion. □

Ainsi, on peut construire l'automate $\mathcal{C}_{j+1}$ reconnaissant $K_{j+1} = \Omega(K_j)$ en supprimant les états de $\mathcal{C}_j$ qui violent la contrainte suivante :

$$\Sigma^{\mathcal{A}}(h(x)) \cap \Sigma_{\text{in}} \subset \Sigma^{\mathcal{C}_j}(x) \quad . \tag{5.16}$$

Soient précisément

$$X' = \{x \in X \mid \ \Sigma^{\mathcal{A}}(h(x)) \cap \Sigma_{\text{in}} \subset \Sigma^{\mathcal{C}_j}(x)\} \quad ,$$

$$X'_a = X_a \cap X' \quad ,$$

et soit la nouvelle fonction de transition

$$\xi'(\sigma, x) = \begin{cases} \xi(\sigma, x) & \text{si } \xi(\sigma, x) \in X' \\ \text{non défini} & sinon. \end{cases}$$

On définit alors

$$\mathcal{C}_{j+1} = \begin{cases} \text{Em}(X', \xi', x_0, X'_a) & \text{si } x_0 \in X' \\ \emptyset & \text{sinon.} \end{cases} \tag{5.17}$$

THÉORÈME 5.2.3.4. *Soit $\mathcal{C}_{j+1}$ comme en (5.17). Alors*

$$\overline{\mathcal{L}}(\mathcal{C}_{j+1}) = K_{j+1} = \Omega(K_j) \quad . \tag{5.18}$$

En outre, il existe un indice i tel que $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}_{i+1}$ et l'on a

$$\overline{\mathcal{L}}(\mathcal{C}_i) = K^{\uparrow} \quad .$$

Autrement dit, on obtient en un nombre fini d'itérations un automate reconnaissant le sous-langage contrôlable maximal.

Démonstration. du Théorème. L'assertion (5.18) résulte immédiatement du Lemme 5.2.3.3. Montrons la convergence. Comme $\mathcal{C}_{j+1}$ s'obtient en supprimant des états de $\mathcal{C}_j$, la suite $\mathcal{C}_j$ converge en un nombre fini d'itérations (éventuellement vers l'automate vide), soit pour un certain i, $\mathcal{C}_i = \mathcal{C}_{i+1}$ et donc

$$K_i = \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{C}_i) = \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{C}_{i+1}) = K_\infty = \Omega(K_\infty) \quad .$$

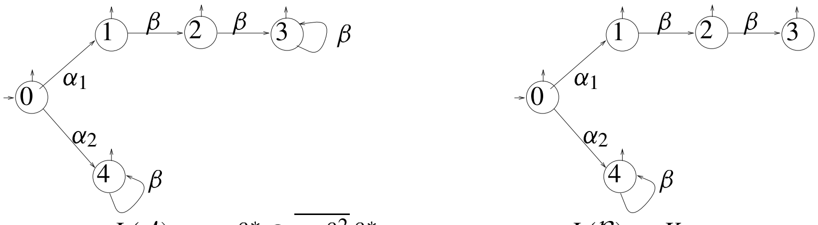
K_∞ est donc point fixe de Ω, et comme $K^{\uparrow}$ est le point fixe maximal (Proposition 5.2.2.1), $K_\infty \subset K^{\uparrow}$. D'autre part, on a observé dans la section précédente que l'on a toujours $K^{\uparrow} \subset K_\infty$. □

5.3 Exemples

Nous donnons quelques exemples d'application de l'algorithme décrit ci-dessus.

5.3.1 Exemple 1 (cf. [69])

Soit $\Sigma = \{\alpha_1, \alpha_2, \beta\}$, $\Sigma_{\text{in}} = \{\beta\}$. $M = \overline{(\alpha_1\beta^2 \oplus \alpha_2)\beta^*}$, $K = \overline{\alpha_1\beta^2} \oplus \alpha_2\beta^*$. On a représenté sur la Figure 5.7 un automate $\mathcal{A}$ tel que $M = \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$. Le mot $\alpha_1\beta^2$ appartient à K,



$L(\mathcal{A}) = \alpha_2\beta^* \oplus \overline{\alpha_1\beta^2}\beta^*$ $\qquad$ $L(\mathcal{B}) = K$

FIG. 5.7: Automates reconnaissant M et K

mais $\alpha_1\beta^3 \notin K$. Comme β est incontrôlable, cela entraîne que $\alpha_1\beta^2 \notin K_1$. De la sorte, il est intuitivement clair que $K^\uparrow = e \oplus \alpha_2\beta^*$. On peut le vérifier plus formellement à partir de la construction de point fixe décrite plus haut. On a pour K_0 la table des transitions suivante :

	0	1	2	3	4	$\Sigma(h(x)) \cap \Sigma_{\text{in}}$	$\Sigma(x)$
0		α_1			α_2		$\alpha_1\alpha_2$
1			β			β	β
2				β		β	β
3						β	
4					β	β	β

Pour $\mathcal{A}$, $\Sigma(3) \cap \Sigma_{\text{in}} = \{\beta\}$ n'est pas inclus dans $\Sigma^{\mathcal{B}}(3)$, il faut donc éliminer l'état 3 du tableau de $\mathcal{B}$. On obtient alors le nouvel automate qui reconnaît K_1 :

	0	1	2	4	$\Sigma(h(x)) \cap \Sigma_{\text{in}}$	$\Sigma(x)$
0		α_1		α_2		$\alpha_1\alpha_2$
1			β		β	β
2			β		β	β
4				β	β	β

$$K_1 = \overline{\alpha_1\beta} \oplus \alpha_2\beta^* \quad .$$

En poursuivant, on obtient

K_2 :

	0	1	4	$\Sigma(h(x)) \cap \Sigma_{\text{in}}$	$\Sigma(x)$
0		α_1	α_2		$\alpha_1\alpha_2$
1				β	β
4			β	β	β

$$K_2 = \overline{\alpha_1} \oplus \alpha_2\beta^* \quad .$$

K_3 :

	0	4	$\Sigma(h(x)) \cap \Sigma_{\text{in}}$	$\Sigma(x)$
0		α_2		$\alpha_1\alpha_2$
4		β	β	β

$$K_3 = e \oplus \alpha_2\beta^* \quad .$$

La contrainte (5.16) est maintenant satisfaite pour tous les états : on a donc $K^\uparrow = e \oplus \alpha_2\beta^*$.

5.3.2 Chat et souris dans un labyrinthe

On reprend l'automate de la Figure 1.2 du Chapitre 1 représentant les mouvements possibles du chat et de la souris. L'automate $\mathcal{B}$ représentant le comportement admissible du système s'obtient en supprimant tous les états diagonaux (où le chat et la souris se trouvent dans la même pièce), soit l'automate de la Figure 5.8. Considérons tout d'abord le cas fort

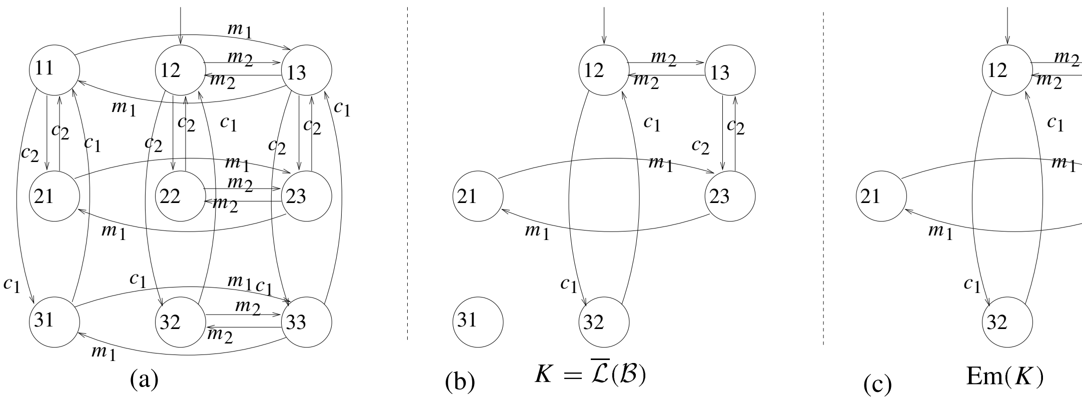


FIG. 5.8: Comportement admissible du chat et de la souris (c)

simple où $\Sigma_{\text{in}} = \emptyset$: cela signifie que l'on contrôle toutes les trappes. Il suffit alors d'interdire les transitions conduisant aux états diagonaux dès qu'on se trouve dans les états les précédant immédiatement. Soit ξ la fonction de transition de l'automate (c). Cela revient à définir un contrôle de la forme

$$f(w) = \phi(\xi(w, i_0 j_0)), \quad i_0 j_0 = 12 \text{ (état initial)},$$

où le retour d'état ϕ ($\phi(q)$ décrit l'ensemble des transitions autorisées au point $q = ij$) est donnée par le tableau suivant :

12	$\phi(q) = \{c_1, m_2\}$
13	$\phi(q) = \{m_2, c_2\}$
21	$\phi(q) = \{m_1\}$
23	$\phi(q) = \{m_1\}$
32	$\phi(q) = \{c_1\}$

Autrement dit, on interdit à la souris tout mouvement qui la ferait rentrer dans une pièce où le chat se trouve déjà et de même pour le chat. Un cas plus intéressant est celui où $\Sigma_{\text{in}} = \{c_1\}$. Le chat peut alors de manière incontrôlable emprunter la trappe c_1. Calculons le sous-langage contrôlable maximal. Pour l'automate de la Figure 5.8, on a le tableau suivant.

	12	13	21	23	32	$\Sigma(h(x)) \cap \Sigma_{\text{in}}$	$\Sigma(x)$
12		m_2			c_1	c_1	$m_1 \oplus c_1$
13	m_2			c_2		c_1	$m_1 \oplus c_2$
21	m_2			m_1			m_1
23		c_2	m_1				$m_1 \oplus c_2$
32	m_2					c_1	c_1

La contrainte $\Sigma(h(x)) \cap \Sigma_{\text{in}} \subset \Sigma(x)$ est violée pour $x = 13$. Lorsque l'on supprime cet état de l'automate $\mathcal{A}$, on obtient l'automate $\mathcal{C}$ à gauche de la Figure 5.9, pour lequel les états 21 et 23 ne sont plus accessibles. L'automate émondé correspondant est représenté à droite de la Figure. On vérifie en dressant un tableau analogue que la contrainte est maintenant satisfaite pour tous les états. Cette automate reconnaît donc le sous-langage commandable maximal de K. Ce langage est réduit à c_1^*. Autrement dit, le chat peut circuler librement entre les pièces 1 et 3, ce qui est normal, l'événement c_1 étant incontrôlable. En outre, la souris est cantonnée dans la pièce 2, comme on aurait pu le voir de manière tout à fait élémentaire.

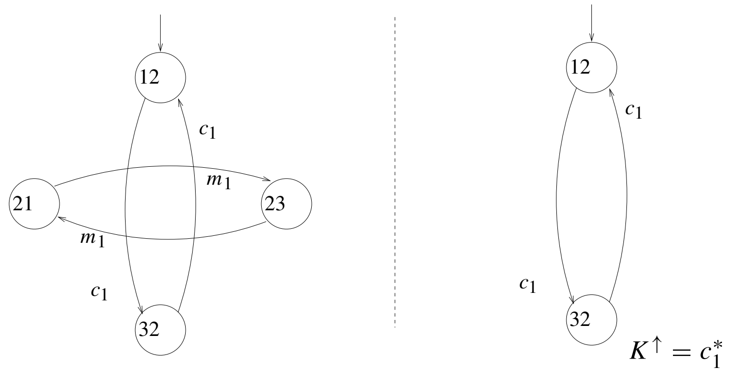


FIG. 5.9: Calcul de $K^\uparrow$

Commentaires et références

La théorie de la supervision des automates est due à l'école de Ramadge et Wonham. Cet exposé est largement inspiré des trois papiers [58, 59, 69], que le lecteur pourra utilement lire. Signalons quelques problèmes et quelques directions d'approfondissement.

Dans le cas où les hypothèses du théorème 5.2.3.4 ne sont pas vérifiées, on peut se demander si la suite K_j converge encore vers $K^\uparrow$. La convergence n'a pas lieu en général pour des langages non réguliers [69]. Par contre, les conditions $\mathcal{L}(\mathcal{A}) = \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$ et $K \subset \overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A})$ du Théorème 5.2.3.4 qui sont commodes pour définir la suite d'automates reconnaissant les K_j peuvent être relaxées comme suit. Lorsque M est un langage régulier, on note $\|M\|$ le nombre minimal d'états d'un automate reconnaissant M.

THÉORÈME 5.3.2.1. *(Ramadge et Wonham [69]) Supposons $\mathcal{A}$ fini et K régulier. La suite $\{K_j\}$ définie en (5.14) converge en un nombre fini d'itérations vers $K^\uparrow$. En outre*

$$\|K^\uparrow\| \leq \|\overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A})\|\|K\| + 1 \ .$$

On s'est limité dans ce chapitre au minimum concernant la supervision d'automates. Il y a une méthode de nature différente qui permet de calculer le langage controlable maximal : au lieu de calculer une suite d'automates, on soustrait à K le langage des mots indésirables que l'on caractérise comme une sorte de résiduel. Nous avons privilégié ici par simplicité la première approche, historiquement la plus ancienne et très naturelle, mais il faut bien voir que la complexité de l'approche via la résiduation est meilleure. En effet, la première approche émonde de manière progressive un automate raffinant $\mathcal{A}$ et reconnaissant K (soit au plus $\|\overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A})\|\|K\|$ états), donc le nombre d'itérations est borné par le nombre d'arcs à émonder, soit au plus $(\|\overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A})\|\|K\|)^2$. Le second algorithme exposé dans [16] valable pour une partie K préfixielle a une complexité de $O(\|\overline{\mathcal{L}}(\mathcal{A})\|\|K\|^2)$.

Dans le cadre, de cette introduction, nous avons, pour faire bref, laissé de coté les problèmes de contrôle en observation partielle. La théorie présentée ici s'étendre de manière élégante, pour peu que certaines conditions naturelles d'observabilité ou de clôture du langage légal K par rapport aux observations (normalité) soient vérifiées [70].

On a ignoré aussi le principal problème pratique qui est lié à la taille des automates : lorsque l'on couple un système à n état avec un système à p états, on obtient en général un automate produit (à np états). Pour cette raison, les questions de *contrôle décentralisé* sont essentielles. Il s'agit d'implémenter uniquement des contrôleurs locaux sans avoir à manipuler des produits d'automates. Certaines conditions de décentralisation de nature algébrique ont été mises en évidence. Nous renvoyons le lecteur intéressé à [70, 59].

Annexe A

Travaux dirigés : equations linéaires dans les dioïdes

Les exercices de base sont signalés par le signe ➷. *Les exercices d'une difficulté particulière sont signalés par le signe* ¶

A.1 Leçon de calcul

Que valent les expressions suivantes dans l'algèbre $(\max, +)$:

$$2 \oplus 3 = ? \quad 2 \otimes -1 = ? \quad 2 \oplus -\infty = ? \quad 0 \otimes 3 = ? \quad 3^2 = ? \quad 2^3 = ? \quad \frac{2}{3} = ? \quad \sqrt[2]{8} = ?$$

A.2 Equation du second degré dans l'algèbre (max,+)

➷Résoudre

$$ax^2 \oplus c = bx$$

dans $(\mathbb{R} \cup \{-\infty\}, \max, +)$.

A.3 Symétrisabilité d'un dioïde

➷Un élément x d'un dioïde peut il avoir un symétrique (i.e. un élément x' t.q. $x \oplus x' = \varepsilon$) ? Un dioïde est-il plongeable dans un anneau ?

A.4 Étoiles de séries

Exercices 2.2.1.8 et 2.2.1.9 du Chapitre 2.

A.5 Étoile de matrice

➷Calculer l'étoile de la matrice suivante dans le dioïde $\mathbb{R}_{\min}$.

$$A = \begin{bmatrix} \varepsilon & 2 & 3 \\ -1 & \varepsilon & -2 \\ 5 & 3 & 2 \end{bmatrix} \quad .$$

Que dire de l'étoile de A dans l'algèbre $(\max, +)$?

A.6 Formule du binome dans les dioïdes et applications

a) Dans un dioïde dont le produit est commutatif, donner une “formule du binome” pour $(a \oplus b)^n$. Que devient la formule du binome dans le dioïde $\mathbb{R}_{\max}$? Y a t-il une formule du binome dans un doïde non-commutatif ?

b) (¶ sans l'indication à la fin de l'exo.) Si en outre le produit est simplifiable, montrer que l'on a

$$(a \oplus b)^n = a^n \oplus b^n \quad .$$

c) Montrer que sous les mêmes hypothèses

$$ab \leq a^2 \oplus b^2 \quad .$$

d) On appelle *groupe réticulé* un groupe $(G, \cdot)$ muni d'un ordre de treillis tel que $\forall a, b, c$: $(a \vee b)c = ac \vee bc$, $c(a \vee b) = ca \vee cb$. d.1) Montrer que ces identités sont équivalentes à $\forall a, b, c$: $(a \wedge b)c = ac \wedge bc$, $c(a \wedge b) = ca \wedge cb$. d.2) Quelle est la différence entre un dioïde et un groupe réticulé ?

e) Montrer que dans un groupe réticulé commutatif, l'équation $x^p = a$ ($p \in \mathbb{N}$, $a \in G$ fixés) admet au plus une solution (on pourra montrer que $x^p = e$ entraîne $x = e$).

f) Trouver tous les groupes réticulés finis.

g) Exhiber un groupe réticulé où l'équation $x^p = a$ admet plusieurs solutions.

[*Indication* pour b) Comparer $(a \oplus b)^2(a \oplus b)$ et $(a^2 \oplus b^2)(a \oplus b)$.]

A.7 Equation implicite dans un dioïde de langages

On considère $(\mathcal{P}(\{a, b\}^*), \cup, .)$ le dioïde des langages sur $\{a, b\}$. Trouver la plus petite solution (pour l'inclusion) de l'équation

$$x = a(a \oplus b)x \oplus b \quad .$$

La solution est elle unique ? Indication : pour l'unicité, si on n'y arrive pas à la main, on peut recourir à l'argument massue exposé dans l'exercice suivant.

A.8 Un peu de topologie

On considère A un alphabet fini, et étant donnés deux langages L, L', on pose

$$\omega(L, L') = \inf\{n \in \mathbb{N} \mid \ L \cap A^n \neq L' \cap A^n\}$$

(avec $\inf \emptyset = +\infty$). Soit $\rho : 0 < \rho < 1$. Montrer que l'on définit une distance d sur $\mathcal{P}(A^*)$ en posant

$$d(L, L') = \rho^{\omega(L,L')} \quad .$$

On pourra montrer un peu mieux, à savoir que d vérifie l'inégalité *ultramétrique* :

$$d(L, L'') \leq \max(d(L, L'), d(L', L'')) \quad .$$

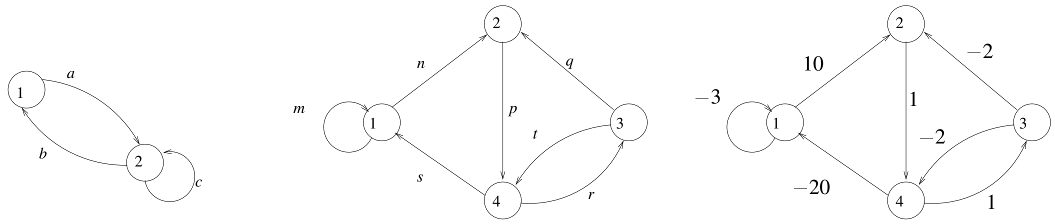
On considère une équation implicite de la forme

$$x = Lx \oplus L' \tag{A.1}$$

où L, L' sont des langages, et L ne contient pas le mot vide. Montrer que l'application $x \mapsto Lx \oplus L'$ est contractante. Que peut on en conclure pour les solutions de l'équation (A.1).

A.9 Énumération d'un ensemble de chemins

Soit le graphe à gauche de la Figure suivante.



circuits(2)=$(c \oplus ab)^*$
(a)

circuits(4)= ?
(b)

(c)

L'ensemble des chemins allant du sommet 2 au sommet 2 est égal à

$$(ab \oplus c)^* = ab \oplus c \oplus abc \oplus cab \oplus abab \oplus \dots$$

(on lit les mots de droite à gauche).

a/ Donner une expression analogue pour l'ensemble des chemins $4 \to 4$ dans le graphe (b) de cette Figure.

b/ Donner l'ensemble de tous les circuits élémentaires passant par le sommet 4.

c/ On considère maintenant le graphe de la Figure (c). Quel est le poids maximal d'un circuit passant par 4 ? Le poids moyen maximal d'un tel circuit ? Le poids maximal d'un chemin de 4 à 2 ? Le poids minimal d'un tel chemin ?

A.10 Déterminants et formules de Cramer

¶¶Soit $\mathcal{D}$ un semi-anneau, A une $n \times n$-matrice à coefficients dans $\mathcal{D}$. On définit le déterminant positif :

$$\det{}^+ A = \bigoplus_{\sigma \text{ permutation paire}} \bigotimes_i A_{i\sigma(i)}$$

et $\det^- A$ de manière analogue pour les permutations impaires, de sorte que l'on a "formellement" $\det A = \det^+ A - \det^- A$. On désigne par $A_{(i|j)}$ la matrice A privée de la ligne i et de la colonne j. On définit la comatrice positive :

$$(\mathrm{com}^+ A)_{ij} = \begin{cases} \det{}^+ A_{(i|j)} & \text{si } i+j \text{ pair} \\ \det{}^- A_{(i|j)} & \text{si } i+j \text{ impair} \end{cases}$$

et la comatrice négative $\mathrm{com}^- A$ en inversant les conditions de parité.

a/ Montrer que

$$(\mathrm{com}^+ A)^T A \oplus (\det{}^- A)\,\mathrm{Id} = (\mathrm{com}^- A)^T A \oplus (\det{}^+ A)\,\mathrm{Id}$$

b/ En déduire le résultat suivant (condition de Cramer).

$$Ax = b \Rightarrow \quad (\det{}^+ A)x \oplus (\mathrm{com}^- A)^T b = (\det{}^- A)x \oplus (\mathrm{com}^+ A)^T b$$

c/ Application. Résoudre dans $\mathbb{R}_{\max}$ le système de deux équations linéaires suivant :

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 4 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 \\ 7 \end{bmatrix} .$$

Annexe B

Travaux dirigés : Réseaux de Petri et Graphes d'Événements

B.1 Philosophes Dînant

Exercice 3.1.1.7 du Chapitre 3.

B.2 Cellules de production en série

On considère la ligne de production formée de deux cellules représentée sur la Figure B.1. Des pièces brutes arrivent dans un stock de capacité illimitée S_1. La cellule C_1 comprend 1 machine, qui met 1 unité de temps pour traiter une pièce. A l'issue du traitement, la pièce est déposée dans un stock S_2 situé entre C_1 et C_2. La cellule C_2 est formée de deux machines pouvant travailler en parallèle (i.e. traitant des pièces de manière indépendante) et mettant chacune deux unités de temps pour traiter les pièces. A l'issue, les pièces sont déposées en S_3.

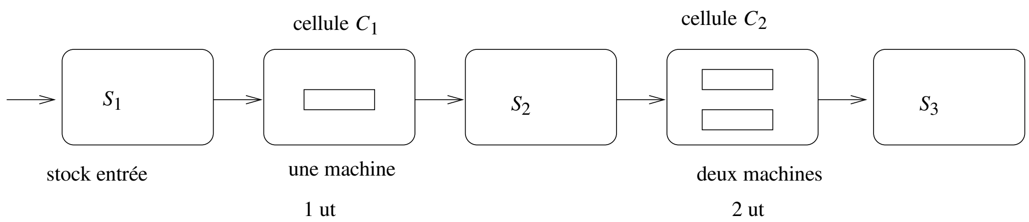


FIG. B.1: Ligne de production

a/ Dessiner un graphe d'événements temporisé représentant ce système.

b/ Ecrire un système d'équations de la forme

$$x(t) = A_0 x(t) \oplus A_1 x(t-1) \oplus \ldots \oplus A_k x(t-k) \oplus Bu(t)$$

dans l'algèbre (min, +). Que dire du système analogue d'équations dans l'algèbre (max, +) ? Ecrire une représentation sous forme d'état

$$x(t) = Ax(t-1) \oplus Bu(t), \quad y(t) = Cx(t) \ .$$

dans l'algèbre (min, +) en essayant de minimiser la taille de l'état.

c/ Calculer la série de transfert du système.

d/ On suppose que le système commence à fonctionner à l'instant 0. A cette date, une très grande quantité de pièces brutes arrivent dans le stock S_1. Représenter le nombre de pièces achevées en fonction du temps $t \mapsto y(t)$ (compteur de sortie). Quel est le taux de production ? Que peut on dire du stock entre C_1 et C_2 ? Que se passerait-t-il si les machines en C_2 prenaient trois unités de temps pour traiter les pièces ?

B.3 Simplification de Réseau de Petri

On considère le graphe d'événements de la Figure B.2,

a/ Ecrire un système d'équations de la forme

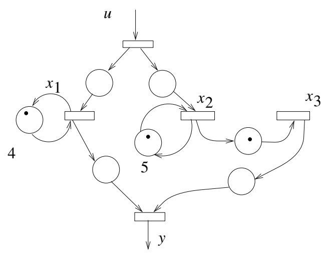
$$x_n = Ax_{n-1} \oplus Bu_n,\, y_n = Cx_n \tag{B.1}$$

pour les dateurs dans l'algèbre (max, +).

b/ Calculer la série de transfert du système.

b'/ Quel est le débit maximal admissible pour chaque transition (nombre de tirs par unité de temps) ?

c/ Peut on remplacer A, B, C par des matrices A', B', C' de dimension plus petite telles que la relation entrée-sortie $u \mapsto y$ du système (B.1) soit identique ? Si oui, dessiner un graphe d'événements plus simple ayant le même comportement entrée-sortie.



(temporisations en toutes lettres dans les places)

FIG. B.2: Quelles sont les équations de ce graphe d'événements ?

B.4 Calcul de transfert

On considère une entreprise de vente par correspondance fonctionnant comme suit. En u arrivent des commandes par courrier. En x_1 un employé dépouille le courrier et vérifie les commandes, ce qui lui prend 10 minutes par commande. Il passe alors un bon à l'un ou l'autre de deux magasiniers (en x_2) qui mettent chacun 30 minutes pour servir une commande. Une troisième personne (en x_3) prépare les colis. Elle peut traiter deux colis en parallèle et peut commencer à travailler dès que l'employé en x_1 lui a transmis la commande, mais doit attendre que les magasiniers l'aient livrée pour fermer le colis. La préparation d'un colis lui prend au minimum 15 minutes (lorsque les magasiniers ne la font pas attendre). On vérifie que ce système se représente par le graphe d'événements de la Figure B.3, (a).

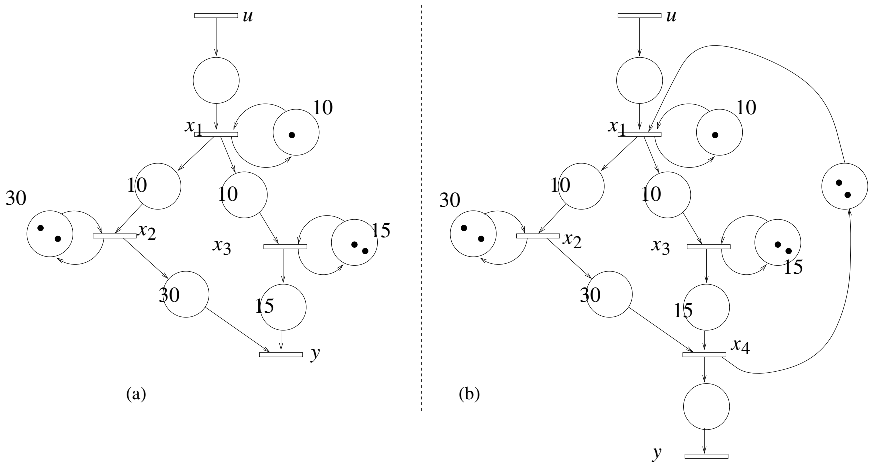


FIG. B.3: Service de livraison

a/ Ecrire ce système sous la forme

$$x = Ax \oplus Bu, \quad y = Cx$$

où $A \in (\mathbb{R}_{\max}[\gamma])^{3\times 3}$ et B, C sont des matrices à coefficients constants.

b/ Donner la relation entrée sortie sous la forme $y = hu$, où $h \in \mathbb{R}_{\max}[[\gamma]]$. On suppose qu'une infinité de commandes arrivent à l'instant 0 (et que le système ne fonctionnait pas auparavant). Dessiner la sortie y. Quel est le taux de production du système pour cette entrée. Que dire du nombre de bons en attente d'être servis par les magasiniers entre x_1 et x_2.

c/ Pour palier l'inconvénient observé à la fin du b/, on a fait appel à un cabinet de conseil en organisation qui a proposé la modification suivante. La personne qui expédie les colis (en x_3) reçoit le bon des magasiniers et après avoir mis le colis à l'expédition, retourne le bon à x_1, qui n'accepte maintenant de dépouiller une nouvelle demande que si le nombre de bons délivrés n'excède pas de plus de deux unités le nombre de bons retournés par x_3. On obtient alors le nouveau réseau de Petri de la Figure B.3,(b). Calculer la série de transfert. Calculer la sortie y correspondant à la même entrée qu'en (b). Que peut on dire du taux de production ? Peut on améliorer la modification proposée par le conseil ?

Annexe C

Travaux dirigés : automates et Systèmes à Événements Discrets

Modèle simplifié du Triangle de Gagny

On considère la portion de réseau de chemin de fer de la figure C.1 (croisement en triangle). Il s'agit d'éviter la situation de blocage décrite à droite de la Figure. On considère

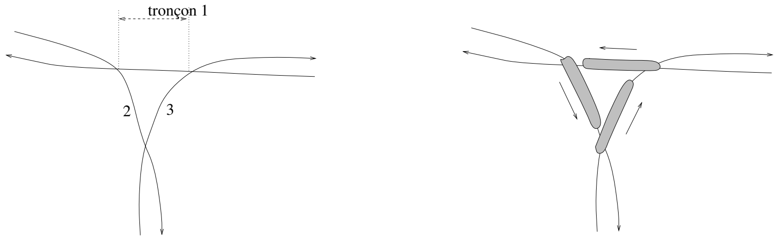


FIG. C.1: Croisement en triangle

l'alphabet

$$\Sigma = \{e_1, s_1, e_2, s_2, e_3, s_3\} \ .$$

On a l'ensemble des événements suivants :

e_1	un train rentre sur le tronçon 1
s_1	un train sort du tronçon 1
e_2	un train rentre sur le tronçon 2
	...

a/ A chaque tronçon $i = 1, 2, 3$, on associe un état q_i valant 0 où 1 : $q_i = 0$ signifie aucun train sur le tronçon, $q_i = 1$ signifie qu'un train est présent sur le tronçon. L'état global des trois tronçons est représenté par le triplet $(q_1, q_2, q_3) \in Q$ où $Q = \{0, 1\}^3$. Initialement, il n'y a aucun train sur les trois tronçons. Représenter le système par un Σ automate $\mathcal{A}$ ayant pour ensemble d'états Q.

b/ Le langage admissible K est l'ensemble des mots qui ne conduisent pas à la situation de blocage représentée à droite de la Figure C.1.

Donner un automate raffinant $\mathcal{A}$ et reconnaissant le langage admissible K.

c/ On suppose que les entrées sur les tronçons e_1, e_2, e_3 sont contrôlables et que les sorties ne le sont pas, soit la partition

$$\Sigma_{\mathrm{in}} = \{s_1, s_2, s_3\}, \quad \Sigma_{\mathrm{c}} = \{e_1, e_2, e_3\} \ .$$

Montrer que le langage K est contrôlable. Construire un superviseur.

d/ On suppose en outre que e_1 est incontrôlable (la ligne 1 est une ligne rapide prioritaire que l'on ne souhaite pas interrompre). Le langage K est il contrôlable ? Calculer le sous langage contrôlable maximal $K^{\uparrow}$ (on donnera un automate reconnaissant $K^{\uparrow}$).

e/ En outre e_2 n'est plus contrôlable. Calculer $K^{\uparrow}$.

Bibliographie

[1] R. Alur, C. Courcoubetis, and D.L. Dill. Model-checking in dense real-time. *Information and Computation*, 104(1), 1993.

[2] A. Arnold. *Systèmes de transition finis et sémantique des processus communiquants*. Masson, 1992.

[3] J.M. Autebert. *Les langages algébriques*. Masson, 1987.

[4] F. Baccelli, G. Cohen, G.J. Olsder, and J.P. Quadrat. *Synchronization and Linearity*. Wiley, 1992.

[5] F. Baccelli, G. Cohen, G.J. Olsder, and J.P. Quadrat. *Synchronization and Linearity*. Wiley, 1992.

[6] F. Baccelli and A.D. Makowski. Queuing models for systems with synchronization constraints. *IEEE Proc, Special Issue on Discrete Event Systemes*, 77(1) :138–161, Jan. 1989.

[7] R.C. Backhouse and B.A. Carré. Regular algebra applied to path finding problems. *J. of the Inst. of Maths and Appl.*, 15 :161–186, 1975.

[8] J. Berstel. *Transductions and Context-Free languages*. Teubner, Stuttgart, 1979.

[9] J. Berstel and C. Reutenauer. *Rational Series and their Languages*. Springer, 1988.

[10] G. Birkhoff. *Lattice Theory*, volume XXV of *American Methematical Society Colloquium Publications*. A.M.S, Providence, Rhode Island, 1940.

[11] M. Blanchard. *Comprendre maitriser et appliquer le GRAFCET*. Automatisation Production, ADEPA.

[12] T.S. Blyth and M.F. Janowitz. *Residuation Theory*. Pergamon press, 1972.

[13] P. Bougerol and J. Lacroix. *Products of Random Matrices with Applications to Schrödinger Operators*. Progress in Probability and Statistics. Birkhäuser, 1985.

[14] G. W. Brams. *Réseaux de Petri : Théorie et pratique*. Masson, 1983.

[15] B.A. Brandin and W.M. Wonham. Supervisory control of timed discrete-event systems. *IEEE-TAC*, 39(2) :329–342, 1994.

[16] R.D. Brandt, V. Garg, R. Kumar, F. Lin, S.I. Marcus, and W.M. Wonham. Formulas for calculating supremal controllable and normal sublanguages. *Systems and Control Letters*, 15 :111–117, Aug. 1990.

[17] Z.Q. Cao, K.H. Kim, and F.W. Roush. *Incline algebra and applications*. Ellis Horwood, 1984.

[18] J. Carlier and P. Chretienne. *Problèmes d'Ordonnancement : modélisation, complexité, algorithmes*. Masson, Paris, 1988.

[19] B.A. Carré. *Graphs and Networks*. Oxford University Press, 1979.

[20] W. Chou and R.B. Griffiths. Effective potentials, a new approach and new results for one-dimensional systems with competing lenght scales. *Phys. Rev. Lett.*, 56 :1929–31, 1986.

[21] W. Chou and R.B. Griffiths. Ground states of one dimensional systems using effective potentials. *Phys. Rev. B*, 34 :6219–34, 1986.

[22] P. Chretienne. *Les Réseaux de Petri Temporisés*. Thèse Université Pierre et Marie Curie (Paris VI), Paris, 1983.

[23] G. Cohen, D. Dubois, J.P. Quadrat, and M. Viot. Analyse du comportement périodique des systèmes de production par la théorie des dioïdes. Rapport de recherche 191, INRIA, Le Chesnay, France, 1983.

[24] G. Cohen, D. Dubois, J.P. Quadrat, and M. Viot. A linear system theoretic view of discrete event processes and its use for performance evaluation in manufacturing. *IEEE Trans. on Automatic Control*, AC–30 :210–220, 1985.

[25] G. Cohen, P. Moller, J.P. Quadrat, and M. Viot. Linear system theory for discrete-event systems. In *23rd IEEE Conf. on Decision and Control*, Las Vegas, Nevada, 1984.

[26] G. Cohen, P. Moller, J.P. Quadrat, and M. Viot. Dating and counting events in discrete event systems. In *25th IEEE Conf. on Decision and Control*, Athens, Greece, 1986.

[27] G. Cohen, P. Moller, J.P. Quadrat, and M. Viot. Algebraic tools for the performance evaluation of discrete event systems. *IEEE Proceedings : Special issue on Discrete Event Systems*, 77(1), Jan. 1989.

[28] J.H. Conway. *Regular algebra and finite machines*. Chapman and Hall, 1971.

[29] R.A. Cuninghame-Green. *Minimax Algebra*. Number 166 in Lecture notes in Economics and Mathematical Systems. Springer, 1979.

[30] J. Dieudonné. *Calcul infinitésimal*. Hermann, Paris, 1980.

[31] M.L. Dubreil-Jacotin, L. Lesieur, and R. Croisot. *Leçons sur la Théorie des Treillis, des Structures Algébriques Ordonnées, et des Treillis géométriques*, volume XXI of *Cahiers Scientifiques*. Gauthier Villars, Paris, 1953.

[32] P. Dudnikov and S. Samborskiĭ. Endomorphisms of semimodules over semirings with an idempotent operation. *Math. in USSR, Izvestija*, 38(1), 1992. translation of Izv. Akad. Nauk SSSR Ser. Mat. 55, 1991.

[33] S. Eilenberg. *Automata, Languages and Machines*, volume A. Acad. Press, 1974.

[34] H. Furstenberg and H. Kesten. Products of random matrices. *Ann. Math. Statist.*, 31, 1960.

[35] F.R. Gantmacher. *Theorie des Matrices, volume II*. Dunod, 1966.

[36] S. Gaubert. *Théorie des systèmes linéaires dans les dioïdes*. Thèse, École des Mines de Paris, July 1992.

[37] S. Gaubert. Performance evaluation of (max,+) automata. *IEEE Trans. on Automatic Control*, 40(12), Dec 1995.

[38] G. Gierz, K.H. Hofmann, K. Keimel, J.D Lawson, M. Mislove, and D.S. Scott. *A Compendium of Continuous Lattices*. Springer, 1980.

[39] P. Glasserman. *Gradient Estimation via Pertubation Analysis*. Kluwer, 1991.

[40] P. Glasserman and D. Yao. *Monotone Structures in Discrete Event Systems*. Wiley, 1994.

[41] J.S. Golan. *The theory of semirings with applications in mathematics and theoretical computer science*, volume 54. Longman Sci & Tech., 1992.

[42] M. Gondran and M. Minoux. Valeurs propres et vecteurs propres en théorie des graphes. In *Problèmes combinatoires et théorie des graphes*, number 260 in Colloques internationaux CNRS, Orsay, 1976.

[43] M. Gondran and M. Minoux. Valeurs propres et vecteurs propres dans les dioïdes et leur interprétation en théorie des graphes. *EDF, Bulletin de la Direction des Etudes et Recherches, Serie C, Mathématiques Informatique*, 2 :25–41, 1977.

[44] M. Gondran and M. Minoux. L'indépendance linéaire dans les dioïdes. *E.D.F., Bulletin de la Direction des Etudes et recherches, Série C, Mathématiques, Informatique*, 1 :67–90, 1978.

[45] M. Gondran and M. Minoux. *Graphes et algorithmes*. Eyrolles, Paris, 1979. Engl. transl. *Graphs and Algorithms*, Wiley, 1984.

[46] M. Gondran and M. Minoux. Linear algebra in dioids : a survey of recent results. *Annals of Discrete Mathematics*, 19 :147–164, 1984.

[47] J. Gunawardena. Min-max functions. *Discrete Event Dynamic Systems*, 4 :377–406, 1994.

[48] J. Gunawardena, editor. *Idempotency*. Publications of the Newton Institute. Cambridge University Press, 1998.

[49] R.M. Karp. A characterization of the minimum mean-cycle in a digraph. *Discrete Maths.*, 23 :309–311, 1978.

[50] G. Litvinov and V. Maslov. Correspondence principle for idempotent calculus and some computer applications. Report IHES/M/95/33, IHES, Bures-sur-Yvette, France, April 1995.

[51] M. Lothaire. *Mots*. Hermes, 1990.

[52] V. Maslov and S. Samborskiĭ, editors. *Idempotent analysis*, volume 13 of *Adv. in Sov. Math.* AMS, RI, 1992.

[53] V.P. Maslov. *Méthodes Operatorielles*. Mir, Moscou, 1973. trad. fr. 1987.

[54] James L. Peterson. *Petri net theory and the modeling of systems*. Prentice-Hall, 1981.

[55] M. Plus. L'algèbre (max, $+$) et sa symétrisation ou l'algèbre des équilibres. *Comptes Rendus à l'Académie des Sciences, Section Automatique*, 1990.

[56] M. Plus. Linear systems in (max, $+$)-algebra. In *Proceedings of the 29th Conference on Decision and Control*, Honolulu, Dec. 1990.

[57] V.K. Garg R. Kumar. *Modeling and control of logical discrete event systems*. Kluwer Acadamic Press, 1995.

[58] P.J. Ramadge and W.M. Wonham. Supervisory control of a class of discrete event processes. *SIAM J. Control and Optimization*, 25(1) :206–230, Jan 1987.

[59] P.J.G. Ramadge and W.M. Wonham. The control of discrete event systems. *IEEE Proceedings : Special issue on Discrete Event Systems*, 77(1) :81–97, Jan. 1989.

[60] W. Reisig. *Petri Nets : an Introduction*. Monographs on Theoretical Computer Science. Springer, Berlin, 1985.

[61] C. Reutenauer. *Aspects mathématiques des réseaux de Petri*. Masson, Paris, 1989.

[62] I.V. Romanovskiĭ. Optimization of stationary control of discrete deterministic process in dynamic programming. *Kibernetika*, 3(2) :66–78, 1967.

[63] A. Salomaa and M. Soittola. *Automata Theoretic Aspects of Formal Powers Series*. Springer, New York, 1978.

[64] E. Seneta. *Non-negative matrices and Markov chains*. Springer series in statistics. Springer, 1981.

[65] I. Simon. Limited subsets of the free monoid. In *Proc. of the 19th Annual Symposium on Foundations of Computer Science*, pages 143–150. IEEE, 1978.

[66] Rajan Suri. Perturbation analysis : The state of the art and research issues explained via the G1/G/1 queue. *IEEE Proc, Special Issue on Discrete Event Systemes*, 77(1) :114–137, Jan. 1989.

[67] Jan. Van Leeuwen, editor. *Handbook of theoretical computer science - B : .formal models and semantics*. Elsevier, 1990.

[68] N.N. Vorobyev. Extremal algebra of positive matrices. *Elektron. Informationsverarbeitung und Kybernetik*, 3, 1967. in russian.

[69] W.M. Wonham and P.J. Ramadge. On the supremal controllable sublanguage of a given language. *SIAM J. Control and Optimization*, 25(3) :637–659, May 1987.

[70] W.M. Wonham and P.J. Ramadge. Modular supervisory control of discrete event systems. *Math. Control, Sign. and Syst.*, 1(1) :13–30, Jan. 1988.

[71] U. Zimmermann. *Linear and Combinatorial Optimization in Ordered Algebraic Structures*. North Holland, 1981.

Table des matières

Index