

# Application de la convergence en probabilité à l'inversion de la transformée de Laplace

## Amphi 5 - E. Gobet

Etant une fonction  $g : \mathbb{R}^+ \mapsto \mathbb{R}^+$  intégrable, on définit sa transformée de Laplace par

$$\hat{g}(t) := \int_0^{+\infty} e^{-tx} g(x) dx;$$

l'objectif de retrouver numériquement  $g$  à partir de  $\hat{g}$ .

**Une application en modélisation aléatoire :** on modélise les pluies cumulées, sur une période et sur une région données, par la variable aléatoire

$$S = \sum_{i=1}^N X_i \tag{1}$$

où

- $N$  décrit le nombre (aléatoire) de pluies,
- $(X_i)_{i \geq 1}$  sont des variables i.i.d., la  $i$ -ème modélisant le volume d'eau de la  $i$ -ème pluie,
- il y a indépendance entre  $N$  et les  $X_i$ .

De tels modèles sont courants dans de multiples applications, pour modéliser par exemple les pertes en assurances, la taille d'une population. . .

Supposons maintenant que la loi de  $X_i$  a une densité et que  $\mathbb{P}(N \geq 1) = 1$ . Alors il n'est pas difficile de montrer que  $S$  a une densité, que nous notons  $g$ . L'intégrale

$$\int_0^{+\infty} e^{-tx} g(x) dx = \mathbb{E}(e^{-tS}) = \hat{g}(t)$$

correspond à la transformée de Laplace de  $g$ . En fait, une particularité du modèle (1) est de disposer d'une expression semi-explicite de la transformée de Laplace  $\hat{g}$  : en utilisant l'indépendance de  $N$  et des  $X_i$ , nous obtenons

$$\mathbb{E}(e^{-tS}) = \sum_{i \geq 1} \mathbb{P}(N = i) [\mathbb{E}(e^{-tX_1})]^i. \tag{2}$$

**Inversion de la transformée de Laplace :** pour une synthèse sur le sujet, nous renvoyons le lecteur à Abate-Whitt (1992). Ici, nous présentons deux méthodes, qui se justifient à l'aide de la convergence en probabilité. On suppose que  $g$  est continu et borné.

1. Formule de POST ET WIDDER :  $g$  est calculé à partir des dérivées de  $\hat{g}$ . Précisément, on a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{(-1)^{n-1} (\theta n)^n}{\Gamma(n)} \hat{g}^{(n-1)}(\theta n) = g(\theta^{-1}), \quad \theta > 0. \tag{3}$$

PREUVE. Soit  $X_n$  la v.a. de loi  $\Gamma(n, \theta)$  de densité  $f_{X_n}(y) = \frac{\theta^n y^{n-1} e^{-\theta y}}{\Gamma(n)} \mathbf{1}_{y \geq 0}$ . On sait que  $X_n$  peut se décomposer à l'aide de v.a.  $(E_i)_{i \geq 1}$  indépendantes de loi exponentielle  $\text{Exp}(\theta)$  :

$$X_n = \sum_{i=1}^n E_i.$$

Ainsi, on déduit

$$\mathbb{E}(X_n/n) = \mathbb{E}(E_1) = \theta^{-1}, \quad \text{Var}(X_n/n) = \text{Var}(E_1)/n,$$

démontrant ainsi que  $\mathbb{E}|X_n/n - \theta^{-1}|^2 \rightarrow 0$ , c'est-à-dire que  $X_n/n$  converge en moyenne quadratique vers  $\theta^{-1}$ , et par conséquent en probabilité.

Comme  $g$  est continu,  $g(X_n/n)$  converge aussi en probabilité vers  $g(\theta^{-1})$ . La convergence a aussi lieu dans  $L_1$  car  $g$  est bornée, d'où

$$\mathbb{E}(g(X_n/n)) \rightarrow g(\theta^{-1}). \tag{4}$$

Enfin, on note que  $(-1)^n \hat{g}^{(n)}(t) = \int_0^{+\infty} x^n e^{-tx} g(x) dx$  et

$$\mathbb{E}(g(X_n/n)) = \int_0^{+\infty} \frac{\theta^n y^{n-1} e^{-\theta y}}{\Gamma(n)} g\left(\frac{y}{n}\right) dy = \frac{(-1)^{n-1} (\theta n)^n}{\Gamma(n)} \hat{g}^{(n-1)}(\theta n). \quad \square$$

2. Formule de GAVER ET STEHFEST :  $g$  est calculé à l'aide des valeurs ponctuelles de  $\hat{g}$ . On a

$$\lim_{n \rightarrow +\infty} \frac{\theta(2n)!}{(n-1)!n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \hat{g}((k+n)\theta) = g(\ln(2)/\theta), \quad \theta > 0. \tag{5}$$

PREUVE. Dans l'esprit, la preuve est similaire, mais cette fois en considérant d'autres variables aléatoires pour  $X_n$ , précisément la v.a. de loi Beta( $n, n+1$ ), de densité  $f_{X_n}(y) = \frac{(2n)!}{(n-1)!n!} y^{n-1} (1-y)^n \mathbf{1}_{y \in ]0,1[}$ . Par le calcul (assez calculatoire !), on peut montrer

$$\mathbb{E}(X_n) = \frac{n}{2n+1} \rightarrow \frac{1}{2}, \quad \text{Var}(X_n) = \frac{n}{2(2n+1)^2} \rightarrow 0,$$

ce qui, comme pour la preuve précédente, implique que  $X_n/n$  converge vers  $\frac{1}{2}$  en moyenne quadratique, et donc en probabilité. Il en découle

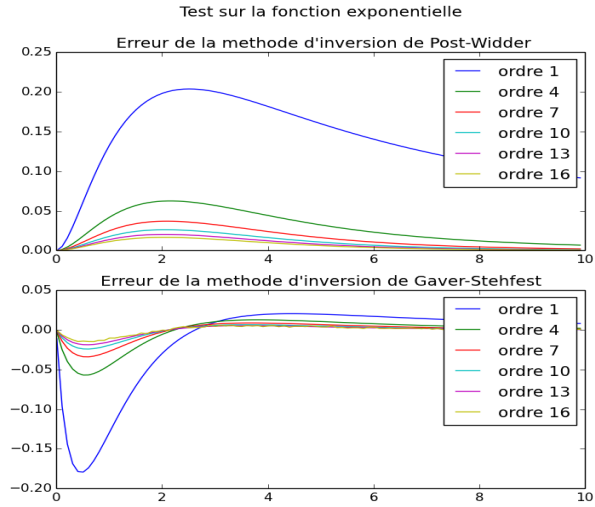
$$\mathbb{E}(g(-\ln(X_n)/\theta)) \rightarrow g(\ln(2)/\theta).$$

Enfin la loi de  $-\ln(X_n)/\theta$  a pour densité  $f_{-\ln(X_n)/\theta}(x) = \theta e^{-\theta x} f_{X_n}(e^{-\theta x}) = \theta \frac{(2n)!}{(n-1)!n!} e^{-\theta x n} (1 - e^{-\theta x})^n \mathbf{1}_{x > 0}$  (appliquer la formule de changement de variable) ; ainsi, en écrivant  $\mathbb{E}(g(-\ln(X_n)/\theta))$  avec cette densité et en développant  $(1 - e^{-\theta x})^n$ , on obtient

$$\mathbb{E}(g(-\ln(X_n)/\theta)) = \frac{\theta(2n)!}{(n-1)!n!} \sum_{k=0}^n (-1)^k \binom{n}{k} \hat{g}((k+n)\theta).$$

**Mise en œuvre numérique.**

Dans un 1er test, on prend  $g(x) = e^{-x}$  (associé à  $N = 1$  et  $X_i$  de loi exponentielle de paramètre 1), pour lequel  $\hat{g}(t) = 1/(1 + t)$ . Sur les graphes ci-contre, on trace les erreurs sur  $g$  par la méthode de Post-Widder et Gaver-Stehfest pour différentes valeurs de  $n$ . On observe bien une convergence vers 0 des erreurs quand  $n \rightarrow +\infty$ . Le code Python est disponible sur la page web de l'auteur.



Prenons maintenant un cas plus réaliste où  $N$  a la loi de Poisson de paramètre  $\lambda = 5$ , conditionnée à être supérieure à 1 :

$$\mathbb{P}(N = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!} / (1 - e^{-\lambda}), \quad k \in \mathbb{N}^*.$$

Pour la loi de chaque pluie  $X_i$ , on prend

- soit une distribution exponentielle de paramètre 1, pour laquelle  $\mathbb{E}(e^{-tX_1}) = 1/(1 + t)$ ,
- soit une distribution uniforme sur  $[1/2, 3/2]$ , pour laquelle  $\mathbb{E}(e^{-tX_1}) = e^{-t/2} - e^{-3t/2}$ .

On remarque que dans ces deux modèles, la moyenne de pluie est la même (égale à 1), et on peut déduire que  $S$  a la même espérance dans les deux modèles. Le graphe ci-dessous montre la densité de  $S$  calculée par l'algorithme de Gaver-Stehfest : on observe que malgré une espérance identique, la distribution dépend fortement de l'hypothèse sur la pluie : la distribution est plus étalée pour des pluies de loi exponentielle car le support est tout  $\mathbb{R}^+$ . Une des conséquences est que pour quantifier le risque de pluies extrêmes, le choix de modèle et l'identification de ses paramètres est une question très importante.

