Aléatoire

MAP 311 - X2013

Leçon 5

Mots clés :

1. Somme de variables indépendantes : variance et densité.
2. Convergences de suite de variables aléatoires :
   (a) convergence presque-sûre
   (b) convergence en probabilité
   (c) convergence en moyenne
3. Lois faible et forte des Grands Nombres.

Somme de variables aléatoires indépendantes

Proposition.

1. Soient $(X_1, \dots, X_n)$ des variables aléatoires de carré intégrable. Alors

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{X_i}) = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbb{V}\mathrm{ar}(\mathbf{X_i}) + \mathbf{2} \sum_{\mathbf{1 \leq i < j \leq n}} \mathbb{C}\mathrm{ov}(\mathbf{X_i}, \mathbf{X_j}).$$

2. Si de plus les X_i sont indépendants, alors $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{X_i}) = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbb{V}\mathrm{ar}(\mathbf{X_i})$.

PREUVE.
1) $(X, Y) \mapsto \mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y)$ forme bilinéaire sur $L_2 \times L_2$.
2) X et Y indépendants ➠ $\mathbb{C}\mathrm{ov}(X, Y) = 0$. □

Corollaire. Si $(X_i)_i$ indépendants de même loi de carré intégrable, alors

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{X_i}) = \frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}(\mathbf{X_1})}{\mathbf{n}}.$$

Disparition des fluctuations aléatoires de $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} X_i$ *lorsque* $n \to +\infty$ *!*

Somme de v.a. indépendantes et convolution

Proposition. Soient X et Y deux v.a.r. indépendantes, de densités respectives f_X et f_Y. Alors $Z = X + Y$ admet une densité f_Z donnée par

$$f_Z(z) = \int_{\mathbb{R}} f_X(x) f_Y(z-x)\mathrm{d}x = \int_{\mathbb{R}} f_X(z-y) f_Y(y)\mathrm{d}y.$$

f_Z est le **produit de convolution** de f_X et de f_Y et est noté $f_Z = f_X * f_Y$.

Preuve. (par *méthode de la fonction muette*)

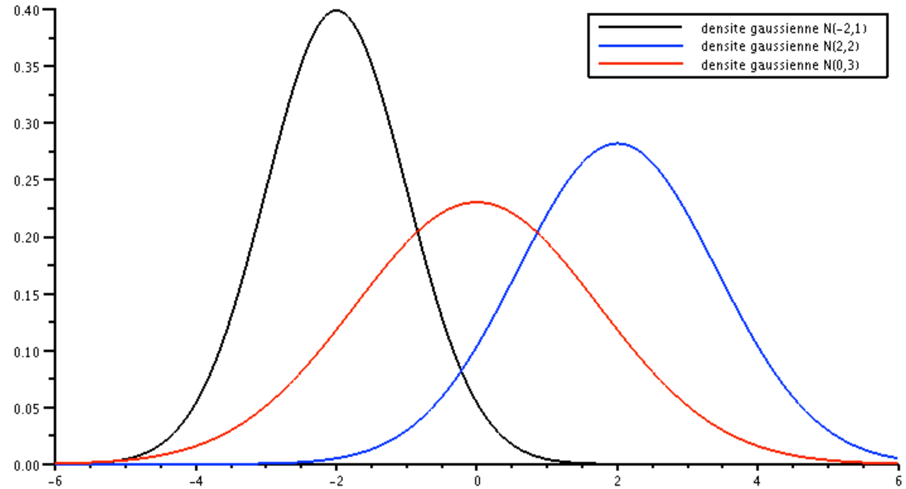
Soit g une fonction continue bornée :

$$\begin{aligned}
\mathbb{E}(g(Z)) &= \int_{\mathbb{R}} \int_{\mathbb{R}} g(x+y) f_X(x) f_Y(y)\mathrm{d}x\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}} \left(\int_{\mathbb{R}} g(z) f_X(z-y)\mathrm{d}z \right) f_Y(y)\mathrm{d}y \\
&= \int_{\mathbb{R}} g(z) \left(\int_{\mathbb{R}} f_X(z-y) f_Y(y)\mathrm{d}y \right)\mathrm{d}z.
\end{aligned}$$

$\square$

Exemples.

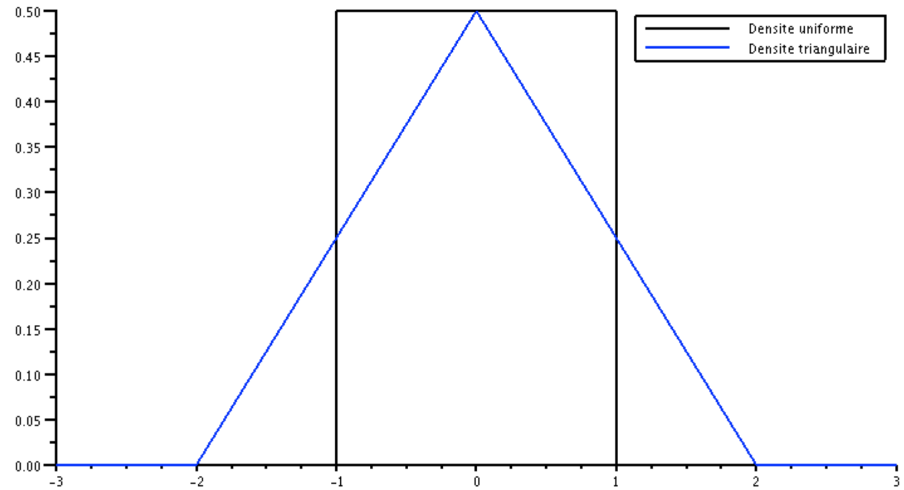
1) La **somme de deux v.a. indépendantes de loi normale** $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et $\mathcal{N}(\mu, \tau^2)$ est une loi normale $\mathcal{N}(m + \mu, \sigma^2 + \tau^2)$.



2) La **somme de deux v.a. indépendantes de loi uniforme** sur $[-1, 1]$ est une loi à densité triangulaire

$$f_2(x) = \frac{1}{4}\Big((x+2)_+ - 2x_+ + (x-2)_+\Big)$$

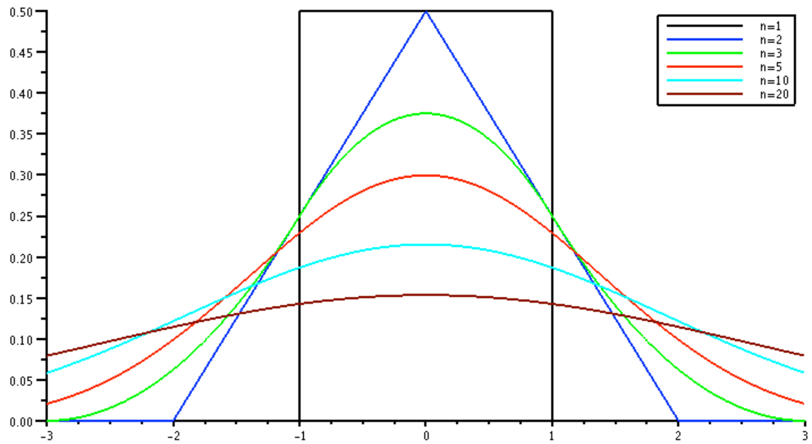
où $x_+ = \max(x, 0)$.



3) Quelle est la densité de la **somme de n v.a. indépendantes de loi uniforme** sur $[-1,1]$?

$\sum_{i=1}^{n} U_i$ a pour densité $*^n f_1(x) = f_n(x)$ avec

$$f_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \begin{pmatrix} k \\ n \end{pmatrix} \frac{(x+(n-2k))_+^{n-1}}{2^n (n-1)!}.$$



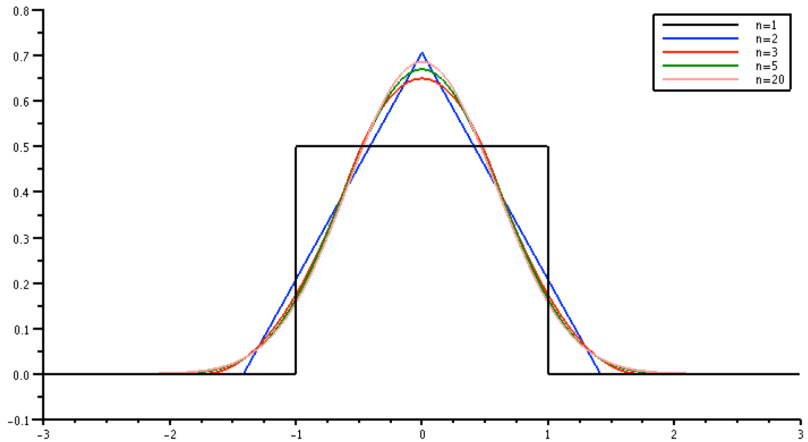
La densité s'étale quand $n \to +\infty$...

4) **Et si on renormalise ?**

$\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^{n} U_i$ a pour densité $\sqrt{n} f_n(\frac{x}{\sqrt{n}})$.

Mis en évidence par Lagrange (1736-1813).

Expliqué à la Leçon 6.



La densité converge quand $n \to +\infty$!

Convergence de variables aléatoires

1er objectif : justifier "les lois empiriques" du hasard

- **Approche fréquentiste :** la fréquence empirique converge vers la probabilité.

  Exemple. Dans un jeu de Pile ou Face équilibré, *on s'attend* à

fréquence d'apparition de Pile sur n lancers $= \frac{n^P}{n}(\omega) \to \frac{1}{2} = \mathbb{P}(1 \text{ lancer donne Pile})$.

- Justification *a posteriori* de cet axiome : **loi des Grands Nombres**.

- **Vers des résultats plus généraux** :
  - $(Y_1, \ldots, Y_n, \ldots)$ variables aléatoires **i.i.d**.
  - modélise les résultats d'une expérience répétée de manière indépendante
  - Convergence de la v.a. $X_n : \omega \mapsto X_n(\omega) = \dfrac{Y_1 + \cdots + Y_n}{n}(\omega)$?

2ème objectif

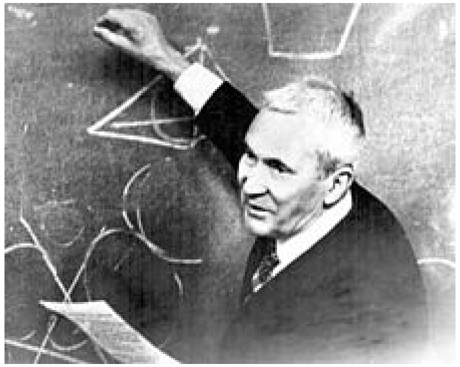
- **Convergences en probabilité :** ensemble d'outils cruciaux pour **analyser les modèles** de manière asymptotique, les **estimer** et les **simuler numériquement**.

  Exemples.

  - Grands échantillons en statistique (sondages...), méthodes de Monte-Carlo
  - Grandes populations d'individus et de particules en interaction
  - "Stabilisation/moyennisation" en temps grand d'un système dynamique stochastique
  - Et bien d'autres...

Bernoulli (1654-1703)

Chebyshev (1821-1884)



Kolmogorov (1903-1987)

A propos de la convergence de X_n vers X

- **Plusieurs convergences** (de nature différente) :
  - **Les v.a. X_n et X sont proches :**
    - $|X_n - X|$ petit pour tout ω ?
    - $|X_n - X|$ petit avec grande probabilité ?
    - $|X_n - X|$ petit en moyenne ?
  - **Les lois de X_n et X sont proches :**
    - F_{X_n} tend vers F_X, voir Leçon 6.
- **Plusieurs convergences** pour différentes utilisations pratiques : **asymptotique d'une suite de v.a., calcul d'espérance, de moments** ...

Une première subtilité. On ne peut pas attendre que la convergence éventuelle ait lieu pour **tout** $\omega \in \Omega$.

Exemple. Dans le jeu de Pile ou Face, si $\omega = PPP\cdots$, alors $f_n^P(\omega) = 1 \neq \frac{1}{2}$! !

1ère notion de convergence : la convergence presque-sûre

Définition. La suite $(X_n)_n$ **converge presque sûrement vers** X **(noté** $X_n \overset{p.s.}{\to} X$**)** si

$$\mathbb{P}(\{\omega : |\mathbf{X_n}(\omega) - \mathbf{X}(\omega)| \to \mathbf{0} \text{ quand } n \to +\infty\}) = \mathbf{1}.$$

L'événement où la convergence a lieu,

$$\mathbf{C_X} = \{\omega : |\mathbf{X_n}(\omega) - \mathbf{X}(\omega)| \to \mathbf{0}\},$$

est de probabilité 1.

Exemple. $X_n = \mathbf{1}_{U \leq 1/n}$ où U est une variable de loi uniforme sur $[0,1]$:

$$\mathbf{X_n} \overset{\mathbf{p.s.}}{\to} \mathbf{0} = \mathbf{X}, \qquad \mathbf{C_X} = \{\mathbf{U} > \mathbf{0}\}.$$

Quelques propriétés faciles

Proposition.

- **Soit f une fonction continue : si $X_n \stackrel{p.s.}{\to} X$ alors $f(X_n) \stackrel{p.s.}{\to} f(X)$.**

  Preuve. $\{\omega : |X_n(\omega) - X(\omega)| \to 0\} \subset \{\omega : |f(X_n)(\omega) - f(X)(\omega)| \to 0\}$. □

- **Si $X_n \stackrel{p.s.}{\to} X$ et $Y_n \stackrel{p.s.}{\to} Y$, alors $(X_n, Y_n) \stackrel{p.s.}{\to} (X, Y)$.**

  Preuve. Pour tout $\omega \in C_X \cap C_Y$, $(X_n, Y_n)_n(\omega)$ converge vers $(X, Y)(\omega)$ et $\mathbb{P}([C_X \cap C_Y]^c) = \mathbb{P}(C_X^c \cup C_Y^c) \leq \mathbb{P}(C_X^c) + \mathbb{P}(C_Y^c) = 0$. □

- **Si $X_n \stackrel{p.s.}{\to} X$ et $Y_n \stackrel{p.s.}{\to} Y$, alors $X_n + Y_n \stackrel{p.s.}{\to} X + Y$ et $X_n Y_n \stackrel{p.s.}{\to} XY \ldots$**

  Preuve. Appliquer les deux résultats précédents avec $f(x, y) = x + y$, $f(x, y) = xy$. □

Passage au calcul d'espérance

Théorème (*Th. de Lebesgue ou de convergence dominée*).
Si $\mathbf{X_n} \overset{\mathbf{p.s.}}{\to} \mathbf{X}$ et si

$$\forall \mathbf{n}, \quad |\mathbf{X_n}| \leq \mathbf{Z} \in \mathbf{L_1},$$

alors $\mathbf{X_n}, \mathbf{X} \in \mathbf{L_1}$ et

$$\mathbb{E}(\mathbf{X_n}) \to \mathbb{E}(\mathbf{X}).$$

Remarque. On a un résultat plus fort : $\mathbb{E}(|X_n - X|) \to 0$ (convergence en moyenne $X_n \overset{L_1}{\to} X$, vue plus loin).

Exemple. $X_n = \mathbf{1}_{U \leq 1/n}$: $X_n \overset{p.s.}{\to} 0 = X$, $|X_n| \leq 1$ et $\mathbb{E}(X_n) = \frac{1}{n} \to 0 = \mathbb{E}(X)$.

Contre-exemple. $X_n = n\mathbf{1}_{U \leq 1/n}$: $X_n \overset{p.s.}{\to} 0 = X$ mais X_n non dominé...
Le théorème ne s'applique pas et en effet

$$\mathbb{E}(X_n) = n\mathbb{P}(U \leq 1/n) = 1 \neq 0 = \mathbb{E}(X).$$

Un constat avant d'aller plus loin

- La convergence $\stackrel{p.s.}{\to}$ *ressemble* à la convergence simple de fonctions ($g_n(x) \to g(x)$ pour tout x).

- Mais c'est un **mode de convergence exigeant**, parfois difficile à établir.

- En **aléatoire**, on recherche des **modes de convergence plus souples** pouvant mener facilement à des **convergences d'espérance**

$$\mathbb{E}(f(X_n)) \to \mathbb{E}(f(X)).$$

Analogue à la convergence d'intégrale en analyse.

2ème notion de convergence : la convergence en probabilité

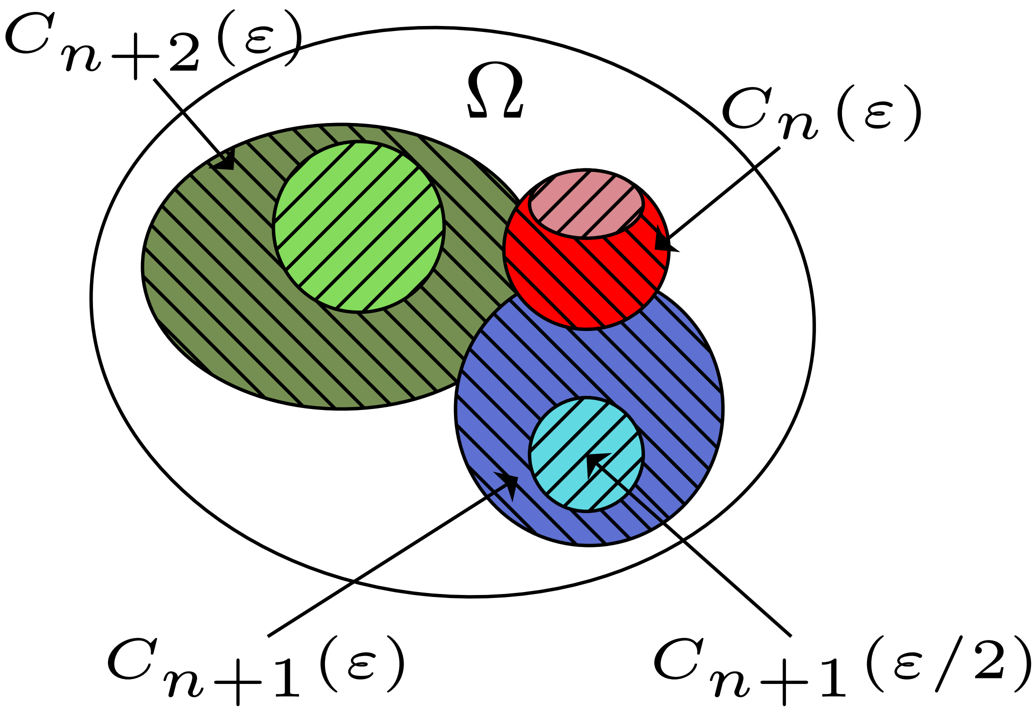
Définition. La suite $(X_n)_n$ **converge en probabilité vers** X **(noté** $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$**)** si **pour tout** $\varepsilon > 0$

$$\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \to 0$$

quand $n \to +\infty$.

Les évènements de proximité $\mathbf{C_n}(\varepsilon) = \{\omega : |\mathbf{X_n}(\omega) - \mathbf{X}(\omega)| < \varepsilon\}$

- sont tels que $\mathbb{P}(\mathbf{C_n}(\varepsilon)) \to \mathbf{1}$ pour tout $\varepsilon > 0$,
- sans nécessairement être croissants (en n).



Proposition. La convergence presque-sûre implique la convergence en probabilité.

Preuve. page 25

Proposition. Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, alors il existe une sous-suite telle que $X_{\sigma(n)} \xrightarrow{p.s.} X$.

Preuve. Construction itérative de la sous-suite :

- soit $\sigma(n) := i > \sigma(n-1)$ tel que $\mathbb{P}(|X_i - X| \geq \frac{1}{n}) \leq \frac{1}{2^n}$;
- $A_n = \{|X_{\sigma(n)} - X| \geq \frac{1}{n}\}$ vérifie $\sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(A_n) < +\infty$.
- Application du lemme de Borel-Cantelli :
  avec probabilité 1, un nombre fini d'évènements $(A_n)_n$ est réalisé.

□

Un exemple de convergence en probabilité mais non presque-sûre

La suite $(X_n)_n$ est définie par :

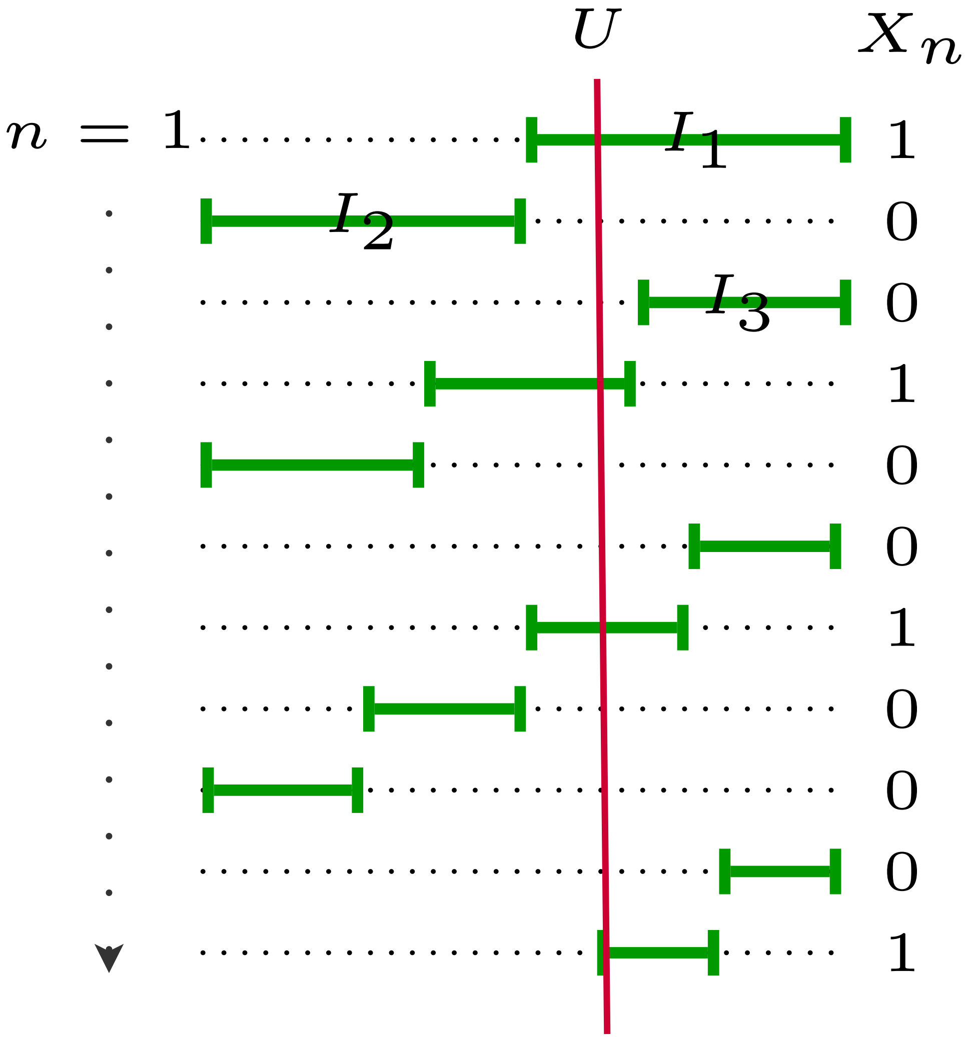
$$\mathbf{X_n = 1_{U \in I_n}}$$

avec U de loi uniforme sur $[0, 1]$.

Pas de convergence presque-sûre.

MAIS **convergence en probabilité vers 0** :

$$\mathbb{P}(|X_n| \geq \varepsilon) = \mathbb{P}(X_n = 1)$$
$$= \mathrm{Leb}(I_n) \to 0.$$



Régles de calcul avec la convergence en probabilité

Proposition.

- **Si f est une fonction continue et $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, alors $f(X_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} f(X)$.**

  PREUVE. Voir Proposition 5.1.10 $\square$

- **$X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$, alors $(X_n, Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} (X, Y)$.**

  PREUVE. Si $|.| = |.|_\infty$, alors
  $\mathbb{P}(|(X_n, Y_n) - (X, Y)| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) + \mathbb{P}(|Y_n - Y| \geq \varepsilon) \to 0.$ $\square$

- **Si $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} Y$, alors**

  - $X_n + Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X + Y$ **;**
  - $X_n Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} XY$ **;**
  - $a_n X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$ **si** $a_n \to 0$**,** **etc . . .**

Une troisième notion de convergence : convergence en moyenne

Définition. La suite $(X_n)_n$ **converge en moyenne** L_1 **vers** X **(**$X_n \stackrel{L_1}{\to} X$**)** si X_n **et** X **sont dans** L_1 **et**

$$\mathbb{E}|X_n - X| \to 0.$$

En particulier, $\mathbb{E}(X_n) \to \mathbb{E}(X)$.
(on peut aussi définir la convergence en moyenne quadratique : $\mathbb{E}|X_n - X|^2 \to 0$.*)*

Proposition (un critère suffisant). Soient $(X_n)_n$ et X de carré intégrable : **si** $\mathbb{E}(X_n - X) \to 0$ **et** $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n - X) \to 0$**, alors** $X_n \stackrel{L_1}{\to} X$**.**

Preuve. Inégalité de Cauchy-Schwarz :
$\mathbb{E}|X_n - X| \leq \sqrt{\mathbb{E}|X_n - X|^2} = \sqrt{[\mathbb{E}(X_n - X)]^2 + \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_n - X)} \to 0.$ □

Théorème. La convergence en moyenne implique la convergence en probabilité.

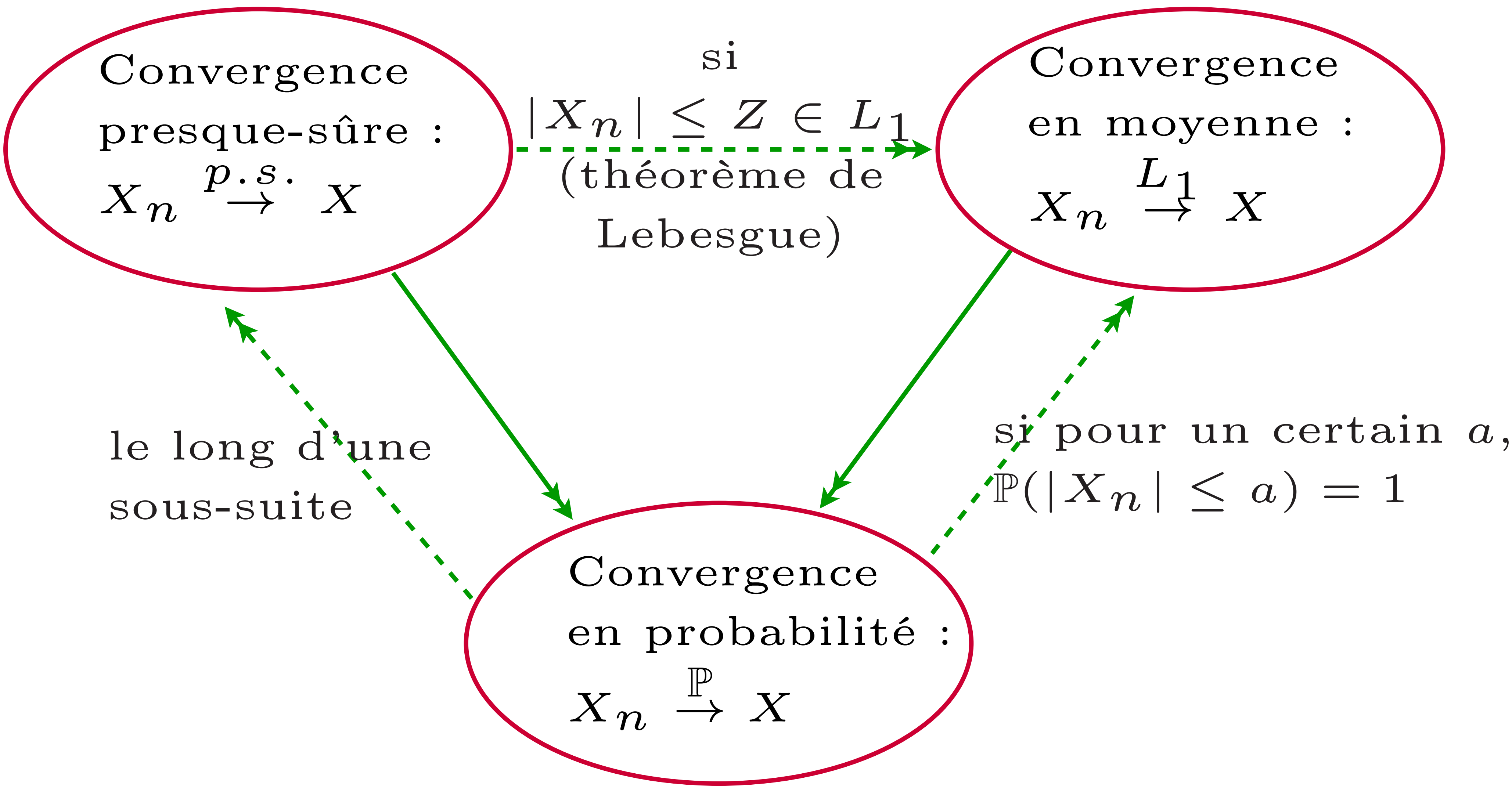
PREUVE. Inégalité de Markov : $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{E}|X_n - X|/\varepsilon \to 0.$ □

Proposition (la réciproque peut être vraie).
S'il existe une constante a telle que $\mathbb{P}(|X_n| \leq a) = 1$, alors **la convergence en probabilité entraine la convergence en moyenne.**

Corollaire pratique. Si f est continue bornée et $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$, alors

$$\mathbb{E}(f(X_n)) \to \mathbb{E}(f(X)).$$

Résumé des différents modes de convergence



Une application en analyse : inversion de la transformée de Laplace

Comment **retrouver** g (fonction bornée) **à partir de** $\hat{g}(t) = \int_0^{+\infty} e^{-tx} g(x)dx$?

Exemple. Loi de $\mathbf{S} = \sum_{\mathbf{i=1}}^{\mathbf{N}} \mathbf{X_i}$ avec $N \geq 1$ indépendant de $(X_i)_{i\geq 1}$ (iid) ?

- Modélisation : pertes en assurance, pluies et crues, tailles de population...
- La transformée de Laplace : $\mathbb{E}(e^{-tS}) = \sum_{i\geq 1} \mathbb{P}(N = i)[\mathbb{E}(e^{-tX})]^i$, explicite si X a une TL explicite ➠ g densité de la loi de S et $\hat{g}(t) = \mathbb{E}(e^{-tS})$.

1. **Formule de Post et Widder (années 30) :**

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{(-1)^{n-1}(\theta n)^n}{\Gamma(n)} \hat{g}^{(n-1)}(\theta n) = g(\theta^{-1}).$$

Preuve. *Cor. pratique* + si X_n de loi $\Gamma(n, \theta)$ alors $X_n/n \stackrel{L_1}{\to} \theta^{-1}$. □

2. **Formule de Gaver et Stehfest (années 70) :**

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{\theta(2n)!}{(n-1)!n!} \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} \hat{g}((k+n)\theta) = g(\ln(2)/\theta).$$

Preuve. *Cor. pratique* + si X_n de loi Beta$(n, n+1)$ alors $X_n \stackrel{L_1}{\to} \frac{1}{2}$. □

Loi faible des grands nombres

Théorème. Soit $(X_n)_n$ une suite de variables aléatoires indépendantes, de même loi, intégrables $(m = \mathbb{E}(X_1)$ est fini). Alors

$$M_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \to m$$

en probabilité et en moyenne.

Preuve. (quand $\mathbb{E}(X_1^2) < +\infty$) : $\mathbb{E}(M_n - m) = 0, \mathbb{V}\mathrm{ar}(M_n - m) = \frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1)}{n} \to 0$. $\square$

Loi forte des grands nombres

Théorème. Sous les mêmes hypothèses, la convergence est presque-sûre :

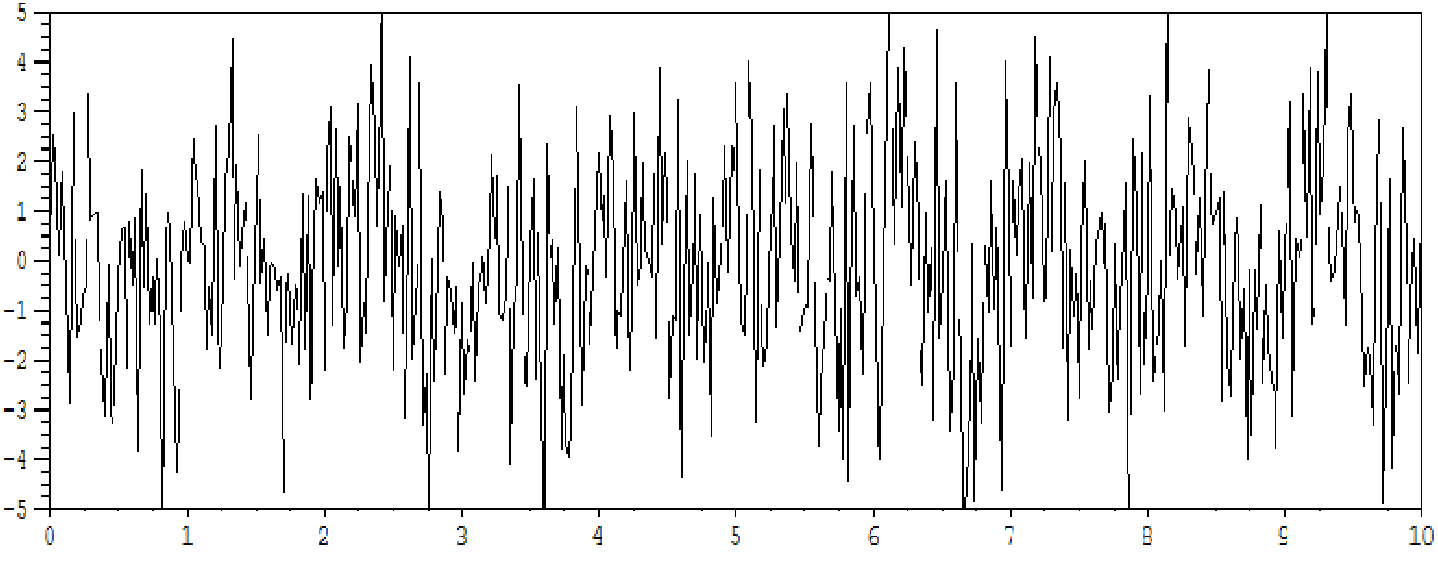
$$M_n = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n} \xrightarrow{p.s.} m.$$

Conséquence : valide a posteriori l'approche fréquentiste en prenant $X_i = \mathbf{1}_{A_i}$.

Preuve. page 26

Démonstration : filtrage d'un signal périodique bruité

- Signal pur (caché) : $\mathbf{s(t), t \geq 0}$, est une fonction périodique de période $T = 1$.
- Signal bruité (en haut dans les simulations) : $\mathbf{b(t) = s(t) + B(t)}$ avec $B(t), B(t+1), \ldots$ indépendants, de même loi, centrés.



Signal de période 1 + bruit (sur 10 périodes)

- Signal filtré (en bas dans les simulations) : $f_n(t) = \frac{b(t)+b(t-1)+\cdots+b(t-n)}{n+1}$ si $n = 0, 1, \ldots$ est tel que $n \leq t < n+1$.

Comme $\mathbf{f_n(t) = s(t) + \frac{B(t)+\cdots+B(t-n)}{n+1}}$, la loi forte des Grands Nombres entraine que $\mathbf{f_n(t) - s(t) \overset{p.s.}{\to} 0}$ **lorsque** $\mathbf{n \to +\infty}$.

POUR EN SAVOIR PLUS

Quid du comportement asymptotique de $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ si $\mathbb{E}|X| = +\infty$?

Supposons $X \geq 0$.

1. **Limite infinie :** montrer $M_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \overset{p.s.}{\to} +\infty$.

   Indication : remplacer X_i par $\min(X_i, L)$ et prendre $L \uparrow +\infty$.

2. **Vitesse d'explosion :** supposons $\mathbb{E}(X^p) < +\infty$ avec $0 < p < 1$: trouver $a_n \uparrow +\infty$ telle que $\frac{X_1+\cdots+X_n}{a_n} \overset{p.s.}{\to} 0$.

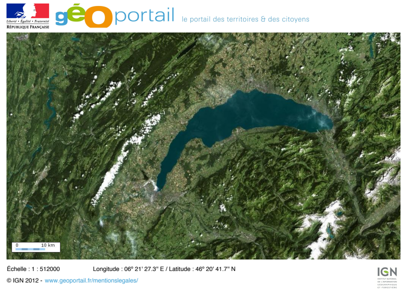
   Indication : prendre $(a_n)_n$ telle que $\sum_{n\geq 1} 1/a_n^p < +\infty$.

   i) Montrer $\sum_{n\geq 1} \frac{X_n^p}{a_n^p} < +\infty$ p.s., puis $\sum_{n\geq 1} \frac{X_n}{a_n} < +\infty$ p.s..

   ii) Conclure avec le lemme de Kronecker : si $\sum_{n\geq 1} y_n$ converge et $a_n \uparrow +\infty$, alors $\frac{1}{a_n} \sum_{k=1}^n a_k y_k \to 0$.

Autres applications de la LGN : voir la suite du cours (Monte-Carlo, statistique, ..., traitement du signal et d'image)

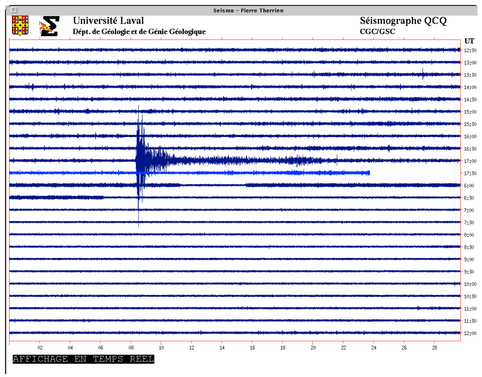
Images dégradées par un bruit d'acquisition, de numérisation, de transmission.



Amélioration de qualité par application de filtres de lissage (moyennes locales des pixels) :

- les bruits sont-ils indépendants, isotropes ? flou de bougé, de mise au point...
- respect des contours ?

Parfois, de l'information pertinente est dans le "bruit" : exemple récent en sismologie avec meilleure reconstruction de la carte de la vitesse de propagation des ondes sismiques du sous-sol. http://www.centre-cournot.org/index.php/2011/09/07/le-bruit-en-probabilite-2/?lang=fr



Preuve - $X_n \overset{p.s.}{\to} X$ implique $X_n \overset{\mathbb{P}}{\to} X$

Soit $\varepsilon > 0$:

- $\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\mathbf{1}_{|X_n - X| \geq \varepsilon} \leq \dfrac{|X_n - X|}{1 + |X_n - X|} := Z_n;$
- $Z_n \overset{p.s.}{\to} 0\,;$
- $|Z_n| \leq 1\,;$
- par le théorème de Lebesque, $\mathbb{E}(Z_n) \to 0$;
- $\dfrac{\varepsilon}{1+\varepsilon}\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \mathbb{E}(Z_n) \to 0.$

$\square$

page 14

Preuve de $M_n = \frac{X_1+\cdots+X_n}{n} \overset{p.s.}{\to} m$ (dans le cas $\mathbb{E}(X_1^2) < +\infty$)

On suppose $m = \mathbb{E}(X_1) = 0$ quitte à remplacer X_i par $X_i - m$.

Etape 1 : $M_{n^2} \overset{p.s.}{\to} 0$. Par le Théorème de Tonelli (sous forme générale)

$$\mathbb{E}(\sum_{n\geq 1} M_{n^2}^2) = \sum_{n\geq 1} \mathbb{E}(M_{n^2}^2) = \sum_{n\geq 1} \frac{\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1)}{n^2} < +\infty$$

donc $\{\omega : \sum_{n\geq 1} M_{n^2}^2(\omega) < +\infty\}$ est de probabilité 1, impliquant $M_{n^2} \overset{p.s.}{\to} 0$.

Etape 2 : "les fluctuations de M_n pour $p^2 \leq n < (p+1)^2$ sont petites".

Soit $p(n)$ l'entier tel que $p^2(n) \leq n < (p(n)+1)^2$ et posons

$$\mathbf{Z_n = M_n - \frac{p^2(n)}{n} M_{p^2(n)} = \frac{1}{n} \sum_{k=p^2(n)+1}^{n} X_j},$$

$$\mathbb{V}\mathrm{ar}(\mathbf{Z_n}) = \frac{n - p^2(n)}{n^2} \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) \leq \frac{2p(n)+1}{n^2} \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) \leq \frac{\mathbf{c}}{\mathbf{n^{3/2}}}.$$

Ainsi $\mathbb{E}(\sum_{n\geq 1} Z_n^2) \leq \sum_{n\geq 1} \frac{c}{n^{3/2}} < +\infty \Rightarrow Z_n \overset{p.s.}{\to} 0 \Rightarrow M_n \overset{p.s.}{\to} 0.$

page 21