Aléatoire

MAP 311 - X2013

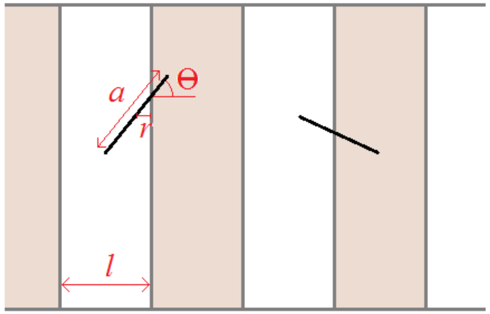
Leçon 6

Mots clés :

1. Application de la loi des Grands Nombres aux méthodes de Monte Carlo
2. Convergence en loi
3. Fonction caractéristique d'un vecteur aléatoire
   (a) Définition, propriétés
   (b) Variables aléatoires indépendantes
   (c) Un autre critère de convergence en loi : théorème de Lévy
4. Fluctuations gaussiennes et Théorème de la Limite Centrale

Méthodes de Monte Carlo

▷ **Expérience de l'aiguille de Buffon (1733)**

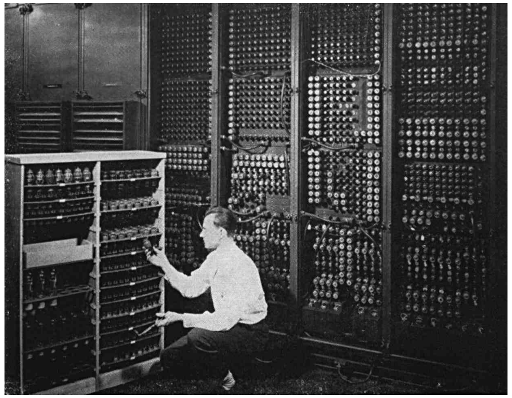


Source : http://fr.wikipedia.org/wiki/Aiguille_de_Buffon

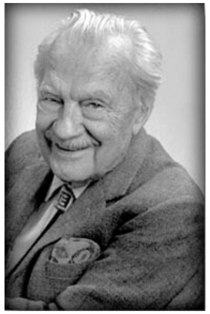
Si $a \leq l$:

$\mathbb{P}(\text{intersection}) = \frac{\mathbf{2a}}{\pi \mathbf{l}}.$

▷ **Los Alamos National Laboratory (dans les années 40-50).** Nouvelle ère du nucléaire (1er essai, bombes atomiques, recherches intensives) et nouvelle ère informatique (premiers ordinateurs électroniques, ENIAC).



Début de la simulation numérique avec premiers **calculs de neutronique** à base de **simulations aléatoires** (Metropolis, von Neumann, Ulam...).



Méthodes de Monte Carlo et calcul d'intégrales

Proposition. Soit $(U_n)_n$ **une suite de v.a. indépendantes de loi uniforme sur** $[0,1]$ et $g : [0,1] \mapsto \mathbb{R}$ une fonction intégrable. Alors, quand $n \to \infty$,

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{g(U_j)} \stackrel{\mathbf{p.s.}}{\to} \int_{[\mathbf{0,1}]} \mathbf{g(x)dx}.$$

Preuve. $X_j = g(U_j)$ définit une suite de v.a.r. indépendantes de même loi, intégrables car $\mathbb{E}|X_1| = \int_{[0,1]} |g(x)|dx < +\infty$.

Par la Loi des Grands Nombres, $\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{g(U_j)} \stackrel{\mathbf{p.s.}}{\to} \mathbb{E}(\mathbf{g(U_1)}) = \int_{[\mathbf{0,1}]} \mathbf{g(x)dx}$. □

En dimension d, avec des variables de loi plus générale :

Proposition. Soit $(V_n)_n$ **une suite de v.a. indépendantes dont la loi a une densité** $p(.)$ **sur** $\mathbb{R}^d$, et $g : \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{R}$ telle que $\int_{\mathbb{R}^d} |g(x)|p(x)dx < +\infty$:

$$\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}} \sum_{\mathbf{j=1}}^{\mathbf{n}} \mathbf{g(V_j)} \stackrel{\mathbf{p.s.}}{\to} \int_{\mathbb{R}^{\mathbf{d}}} \mathbf{g(x)p(x)dx}.$$

Calcul de $\int_{\mathbb{R}^d} \phi(x)dx$ par méthode de Monte Carlo

Se base sur une décomposition de la forme $\phi(x) = g(x)p(x)$ avec p densité de probabilité d'une v.a. V : $\int_{\mathbb{R}^\mathbf{d}} \phi(\mathbf{x})\mathbf{dx} = \mathbb{E}(\mathbf{g}(\mathbf{V}))$.

- **Quelle est la meilleure décomposition ?**
  Expertise de l'utilisateur : facilité de simulation des $(V_i)_i$ de densité p, convergence rapide (vitesses obtenues avec le théorème de la limite centrale)...

- La **méthode de Monte Carlo converge sans condition de régularité sur g** : **algorithme robuste, inconditionnellement stable.**
  $\neq$ **méthodes déterministes** (discrétisation, quadratures).

- La **vitesse de convergence ne dépend pas de la dimension d'espace** (vitesse obtenue plus loin avec le théorème de la limite centrale).

Comment simuler une variable aléatoire ?

▷ En dimension 1, **méthode d'inversion de la Fonction de Répartition** (voir Leçon 3 diapositive 12).

▷ **Simulation de loi conditionnelle**

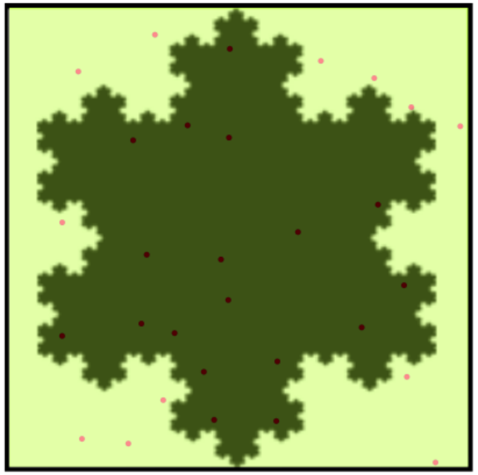
Théorème. Pour une v.a. Z et un événement A de probabilité non nulle, considérons $(Z_n, A_n)_{n\geq 1}$ la suite d'éléments aléatoires indépendants de même loi que (Z, A). Notons $\nu = \inf\{n \geq 1 : \ A_n \text{ est réalisé}\}$: alors, la v.a. Z_ν a la loi conditionnelle de Z sachant A.

Preuve. page 24. □

Remarque. $\nu \overset{loi}{=} \mathcal{G}(\mathbb{P}(A))$ ➠ $\mathbb{E}(\nu) = \frac{1}{\mathbb{P}(A)}$.

Exemple. Comment simuler la loi uniforme sur $B \subset [0,1]^d$?

Réponse : Simuler $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ de loi uniforme sur $[0,1]^d$ et prendre la 1ère simulation qui tombe dans B.



▷ Méthode de rejet

Théorème. Soient X et Y, deux v.a. dans $\mathbb{R}^d$, de densité f et g. On suppose qu'il existe une constante $c(\geq 1)$ satisfaisant : $c\ g(\cdot) \geq f(\cdot)$.

Si U est une v.a. de loi uniforme sur $[0,1]$ indépendante de Y, alors la loi conditionnelle de Y sachant $\{c\,U\ g(Y) < f(Y)\}$ coïncide avec celle de X.

Preuve. page 25. □

Algorithme de simulation avec rejet

`Répéter` (avec des simulations indépendantes)

`--> Simuler` Y_n `de densité` g

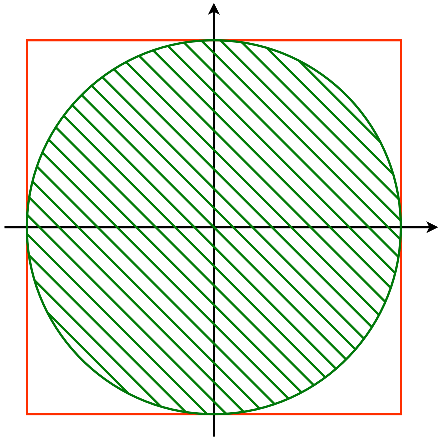
`--> Simuler` U_n `de loi uniforme sur` $[0,1]$

`Jusqu'au premier` $n = n'$ `tel que` $cU_n g(Y_n) < f(Y_n)$.

➥ $Y_{n'}$ a la même loi que X.

Nombre de passages = v.a. de loi géométrique $\mathcal{G}(1/c)$ (il faut c proche de 1).

Illustration : volume de la sphère unité pour différentes dimensions d



Objectif : calcul de $\mathbf{V_d} = \int_{[-1,1]^d} \mathbf{1}_{x_1^2+\dots x_d^2\le 1} \mathbf{dx_1 \dots dx_d}$.

Ratio volume sphère/cube :

$$\mathbf{R_d} = \frac{\mathbf{V_d}}{\mathbf{2^d}} = \int_{[-1,1]^d} \mathbf{1}_{x_1^2+\dots x_d^2\le 1} \frac{\mathbf{dx_1}}{\mathbf{2}} \dots \frac{\mathbf{dx_d}}{\mathbf{2}}.$$

Exemples. $R_2 = \frac{\pi}{4} = 0.785\dots$, $R_3 = \frac{\pi}{6} = 0.524\dots$, $R_4 = \frac{\pi^2}{32} = 0.308\dots$.

LGN : si $(X^{(n)})_n$ est une suite de v.a. indépendantes de loi uniforme sur $[-1,1]^d$, alors

$$\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{|X^{(j)}|^2\le 1} = \frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{|X_1^{(j)}|^2+\dots+X_d^{(j)}|^2\le 1} \overset{\text{p.s.}}{\to} \mathbf{R_d}.$$

Rappel (cours 5) : $\mathbb{V}\mathrm{ar}\Big(\sqrt{n}\Big(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{|X^{(j)}|^2\le 1}\Big)\Big)$ ne dépend pas de n.

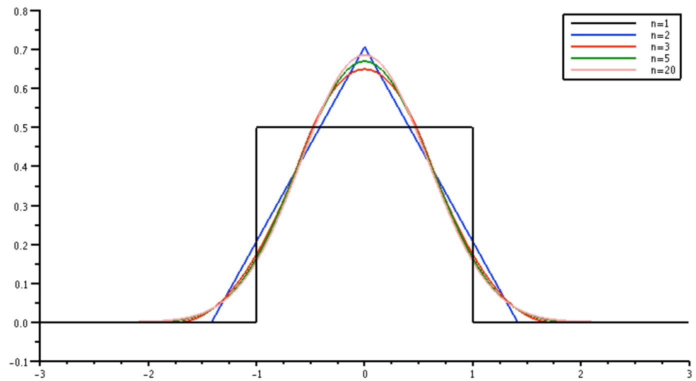
▷ **Question :** convergence p.s. de $\sqrt{n}\left(\frac{1}{n}\sum_{j=1}^{n} \mathbf{1}_{|X^{(j)}|^2\le 1} - R_d\right)$? **NON**, voir démo.

Convergence en loi

- Les convergences presque-sûre ou en probabilité ou en moyenne décrivent (dans un certains sens) la proximité des réalisations de $X_n(\omega)$ et de $X(\omega)$, ω par ω.
- Nouveau point de vue : **proximité des lois**.
- $(X_n)_n$ et X pas nécessairement définis sur le même espace de probabilité.
- **Application potentielle :** convergence d'espérances des variables aléatoires (sans forcément convergence de leurs "réalisations").
- **La convergence en loi a déjà été rencontrée** dans les précédentes leçons :

  ▷ leçon 2 diapositive 12 : si X_n sont des variables de loi binomiale $\mathcal{B}(n, a_n)$ avec $na_n \to \theta > 0$ quand $n \to \infty$, alors $\mathbb{P}(X_n = j) \to e^{-\theta}\frac{\theta^j}{j!}$, pour tout $j \in \mathbb{N}$.

  ▷ leçon 5 diapositive 5 : si $(U_i)_i$ sont des variables indépendantes de loi uniforme sur $[-1, 1]$, alors la densité de $\frac{1}{\sqrt{n}}\sum_{i=1}^{n} U_i$ se rapproche très vite de la densité gaussienne.



Une première définition

Définition. La suite $(X_n)_n$ **converge en loi vers** X **(noté** $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$**)** si **pour toute fonction** f **continue bornée**

$$\mathbb{E}(\mathbf{f}(\mathbf{X_n})) \to \mathbb{E}(\mathbf{f}(\mathbf{X}))$$

lorsque $n \to \infty$.

Exemple. Si X_n **de loi normale** $\mathcal{N}(0, \sigma_n^2)$ **avec** $\sigma_n^2 \to \sigma^2 > 0$, alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, où X est de loi $\mathcal{N}(0, \sigma^2)$, car

$$\mathbb{E}(f(X_n)) = \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma_n^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma_n^2}} f(x)dx \longrightarrow \int_{\mathbb{R}} \frac{e^{-\frac{1}{2}\frac{x^2}{\sigma^2}}}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} f(x)dx = \mathbb{E}(f(X))$$

par convergence dominée.

Remarque. Si X_n et X ne prennent que des valeurs entières, on peut montrer que $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$ est équivalent à

$$\mathbb{P}(X_n = j) \to \mathbb{P}(X = j), \quad \forall j \in \mathbb{N}.$$

(voir convergence de v.a. de loi binomiale vers une v.a. de loi de Poisson).

Exemple. Si X_n **de loi de Poisson** $\mathcal{P}(\theta_n)$ **avec** $\theta_n \to \theta > 0$, alors $X_n \xrightarrow{\mathcal{L}} X$, où X est de loi $\mathcal{P}(\theta)$, car

$$\mathbb{P}(X_n = j) = e^{-\theta_n} \frac{\theta_n^j}{j!} \to e^{-\theta} \frac{\theta^j}{j!}.$$

Dans la convergence en loi, les espaces d'état de X_n et de X ne sont pas nécessairement les mêmes (discret, continu).

Dans le cas de v.a. réelles, équivalence avec la convergence des fonctions de répartition

Proposition. Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. *réelles*.
Alors $\mathbf{X_n} \stackrel{\mathcal{L}}{\to} \mathbf{X}$ si et seulement si $\mathbb{P}(X_n \leq x) = F_n(x) \stackrel{n\to\infty}{\longrightarrow} F(x) = \mathbb{P}(X \leq x)$ **en tout point** x **de continuité de** F.

Preuve. page 26 □

Corollaire. Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. *réelles*, telle que $X_n \stackrel{\mathcal{L}}{\to} X$. **Si** X **est une v.a. à densité**, alors pour tout $a < b$

$$\lim_{\mathbf{n}\to\infty} \mathbb{P}(\mathbf{X_n} \in]\mathbf{a}, \mathbf{b}]) = \mathbb{P}(\mathbf{X} \in]\mathbf{a}, \mathbf{b}]).$$

La convergence en probabilité implique la convergence en loi

Proposition. Si $X_n \stackrel{\mathbb{P}}{\to} X$, alors $X_n \stackrel{\mathcal{L}}{\to} X$.

Preuve. Déjà vue à la leçon 5, diapositive 18 (corollaire pratique). □

Un premier exemple du théorème de la limite centrale

Modèle binomial : $S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i$ avec $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$ (avec $\mathbb{E}(X_1) = 0$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) = 1$).

▷ Comportement de la moyenne empirique : $\mathbf{\frac{S_n}{n} \overset{p.s.}{\to} 0}$.

▷ Comme $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\frac{\mathbf{S_n}}{\mathbf{n}}) = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}$, naturel de renormaliser et considérer $\sqrt{n}\frac{S_n}{n}$.

▷ Pas de convergence en probabilité de $\sqrt{n}\frac{S_n}{n}$ (voir simulations début leçon) **MAIS convergence en loi vers la loi gaussienne centrée réduite.**

▷ Première preuve par A. de Moivre (1667-1754).

Preuve (avec formule de Stirling) :

$$\mathbb{P}(a < \frac{S_n}{\sqrt{n}} \leq b)$$

$$= \sum_{a < \frac{(2k-n)}{\sqrt{n}} \leq b} \underbrace{\frac{n!}{k!(n-k)!} 2^{-n}}$$

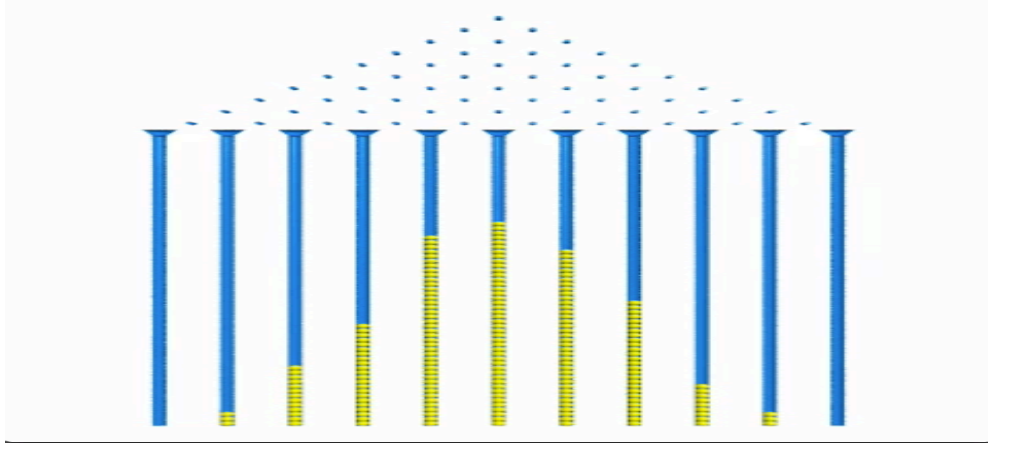
$$\approx \frac{\sqrt{2\pi n} n^{n+\frac{1}{2}} e^{-n} \, 2^{-n}}{\sqrt{2\pi} k^{k+\frac{1}{2}} e^{-k} \sqrt{2\pi} (n-k)^{n-k+\frac{1}{2}} e^{-(n-k)}}$$

$$\approx \sum_{a < \frac{j}{\sqrt{n}} \leq b} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\Big(-\frac{j^2}{2n}\Big)$$

$$\approx \int_a^b \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{x^2}{2}) dx.$$

Planche de Galton (1889)

Source : http://images.math.cnrs.fr/La-courbe-en-cloche.html



Les fonctions caractéristiques :

nouvel outil pour étudier loi et convergence en loi

Pour deux vecteurs u et x de $\mathbb{R}^d$, leur produit scalaire est noté $\langle u, x\rangle = \sum_{j=1}^{d} u_j x_j$.

Définition. Soit $X = (X_1, \dots, X_d)$ un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$. **Sa fonction caractéristique est la fonction de $\mathbb{R}^d$ dans $\mathbb{C}$** définie par

$$\mathbf{u} = (\mathbf{u_1}, \dots, \mathbf{u_d}) \mapsto \phi_{\mathbf{X}}(\mathbf{u}) = \mathbb{E}(\mathbf{e}^{\mathbf{i<u,X>}}).$$

Remarques.

- Espérance bien définie, en séparant parties réelle et imaginaire :

$$e^{i<u,X>} = \cos(< u, X >) + i \sin(< u, X >),$$

  et parce que $|e^{i<u,X>}| \leq 1$.
- $\Phi_X(0) = 1$.
- **Φ_X ne dépend que de la loi de X.**

- Si X est une v.a. réelle, $\phi_X(u) = \mathbb{E}(e^{iuX})$.
- Mathématiquement, **transformée de Fourier**.
  Ex : si X est réelle et à densité p_X, alors $\phi_X(u) = \int_{\mathbb{R}} e^{iux} p_X(x) dx$.
- Lien avec la fonction génératrice des moments : **si X est à valeurs entières**

$$\Phi_X(u) = \sum_{k=0}^{+\infty} e^{iuk} \mathbb{P}(X = k) = G_X(e^{iu}).$$

Quelques propriétés simples

Proposition. Soit X un vecteur aléatoire de $\mathbb{R}^d$. Alors la fonction caractéristique $u \in \mathbb{R}^d \mapsto \Phi_X(u)$ **est continue** et $\overline{\boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{X}}(\mathbf{u})} = \boldsymbol{\Phi}_{\mathbf{X}}(-\mathbf{u}) = \boldsymbol{\Phi}_{-\mathbf{X}}(\mathbf{u})$.

Corollaire. Si $-X$ a même loi que X (loi symétrique), alors $\Phi_X(u)$ est réelle.
(remarque : le théorème d'unicité vu plus loin montre la réciproque)

Le cas important de variable aléatoire de loi normale

Exemple. Si X est une v.a. réelle de loi $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$, alors

$$\Phi_X(u) := \mathbb{E}(e^{iuX}) = e^{ium - \frac{1}{2}\sigma^2 u^2}.$$

Preuve. On montre le cas X de loi $\mathcal{N}(0,1)$. Loi symétrique ➠

$$\boldsymbol{\Phi_X(u) = \mathbb{E}(\cos(uX)) = \int_{\mathbb{R}} \frac{\cos(ux)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx.}$$

Par différentiation en u (Théorème de Lebesgue) puis intégration par parties,

$$\boldsymbol{\Phi'_X(u) = -\int_{\mathbb{R}} \frac{\sin(ux)}{\sqrt{2\pi}} x e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -\int_{\mathbb{R}} \frac{u\cos(ux)}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}} dx = -u\Phi_X(u).}$$

Donc $\Phi_X(u) = c\, e^{-\frac{1}{2}u^2}$: $\Phi_X(0) = 1$ ➠ $c = 1$.

Le cas général s'en déduit en utilisant la transformation affine $m + \sigma X$ de loi normale $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ et

$$\Phi_{m+\sigma X}(u) = \mathbb{E}(e^{iu(m+\sigma X)}) = e^{ium}\Phi_X(\sigma u) = e^{ium} e^{-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2}. \qquad \square$$

Un lien (très utile) avec les moments

Proposition. Soit X **une v.a. réelle ayant des moments finis jusqu'à l'ordre** p : $\mathbb{E}(|X|^k) < +\infty$ pour $k = 1, \dots, p$.
Alors $u \in \mathbb{R} \mapsto \Phi_X(u)$ **est de classe** C^p et

$$\mathbf{\Phi_X^{(k)}(u) = i^k \mathbb{E}(X^k e^{iuX}), \quad k = 1, \dots, p.}$$

En particulier, si X de carré intégrable, alors

$$\mathbf{\Phi'_X(0) = i\mathbb{E}(X), \quad \Phi''_X(0) = -\mathbb{E}(X^2).}$$

Corollaire. Si X a la loi $\mathcal{N}(0,1)$, alors pour $n \in \mathbb{N}$,

$$\mathbf{\mathbb{E}(X^{2n+1}) = 0 \quad \text{et} \quad \mathbb{E}(X^{2n}) = \frac{(2n)!}{2^n n!}.}$$

Deux résultats fondamentaux

Théorème (unicité). **La fonction caractéristique caractérise la loi de manière unique** : si deux vecteurs aléatoires X et Y ont même fonction caractéristique, ils ont même loi.

Théorème (indépendance de v.a.). Soit $X = (X_1, \ldots, X_n)$ un vecteur aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^n$. **Les composantes X_i sont indépendantes si et seulement si**

$$\Phi_X(u) = \mathbb{E}(e^{i(u_1 X_1 + \cdots + u_n X_n)}) = \prod_{j=1}^{n} \mathbb{E}(e^{iu_j X_j}) = \prod_{j=1}^{n} \Phi_{X_j}(u_j)$$

pour tout $u = (u_1, \ldots, u_n)$**.**

Application importante : analyse simple de la somme de v.a. indépendantes.

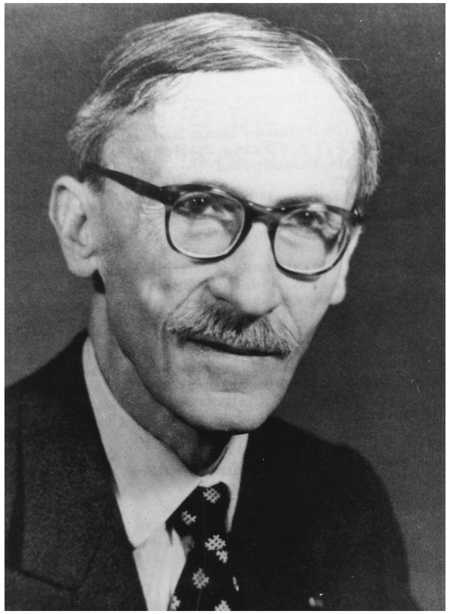
Exemples de fonction caractéristique pour des v.a. réelles

Loi	$\Phi_X(u)$	Remarques complémentaires
Normale $\mathcal{N}(m,\sigma^2)$	$\mathbf{e^{ium-\frac{1}{2}\sigma^2 u^2}}$	Si Y de loi normale $\mathcal{N}(\mu,\tau^2)$ indépendante de X, alors $X+Y$ a la loi normale $\mathcal{N}(m+\mu,\sigma^2+\tau^2)$.
Binomiale $\mathcal{B}(n,p)$	$\mathbf{(e^{iu}p+1-p)^n}$	Si Y de loi binomiale $\mathcal{B}(m,p)$ indépendant de X, alors $X+Y$ de loi $\mathcal{B}(n+m,p)$.
Poisson $\mathcal{P}(\theta)$	$\mathbf{e^{\theta(e^{iu}-1)}}$	Si Y de loi Poisson $\mathcal{P}(\theta')$ indépendante de X, alors $X+X'$ de loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta+\theta')$.
Uniforme sur $[a,b]$	$\mathbf{\frac{e^{iub}-e^{iua}}{iu(b-a)}}$	
Cauchy $p_X(x)=\frac{1}{\pi(1+x^2)}$	$\mathbf{e^{-\lvert u\rvert}}$	Si Y de loi de Cauchy indépendante de X, alors $\frac{X+Y}{2}$ de loi Cauchy.
Exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$	$\mathbf{\frac{\lambda}{\lambda-iu}}$	
Gamma $\Gamma(\alpha,\lambda)$ $p_X(x)=\frac{\lambda^\alpha x^{\alpha-1}e^{-\alpha x}}{\Gamma(\alpha)}\mathbf{1}_{x\geq 0}$	$\mathbf{\left(\frac{\lambda}{\lambda-iu}\right)^\alpha}$	Si α est entier, X peut s'écrire comme la somme de α v.a.r. indépendantes de loi $\mathcal{E}(\lambda)$.

Pour s'entrainer et aller plus loin

1. Que dire sur la v.a. X si $\Phi_X(u) = e^{i\langle m,u\rangle}$ pour un certain vecteur $m \in \mathbb{R}^d$?
   - Réponse : $\mathbb{P}(X = m) = 1$.
2. Si X a pour fonction caractéristique $\Phi_X(.)$, quelle variable aléatoire a pour fonction caractéristique $u \mapsto |\Phi_X(u)|^2$?
   - Réponse : $X - \tilde{X}$ avec X et $\tilde{X}$ indépendants de même loi.
3. Si $|\Phi_X(u)| = 1$ pour tout $|u| \leq \varepsilon$ (pour un certain $\varepsilon > 0$), que dire de X ?
   - Réponse : X est presque-sûrement constante.
   - Indication : appliquer 2) pour montrer $X - \tilde{X} = 0$ p.s., puis conclure.
4. Que dire sur la v.a. X si X et Y sont indépendants et si $X + Y$ a même loi que Y ?
   - Réponse : $X = 0$ p.s.
   - Indication : le montrer directement si X et Y sont de carré intégrable. Puis sans cette hypothèse, avec les fonctions caractéristiques.
5. Que dire sur $X - Y$ si $X - Y$ est indépendant de X et de Y ?
   - Réponse : $X - Y$ est presque-sûrement constante.

Un critère efficace de convergence en loi à l'aide des fonctions caractéristiques : le théorème de Lévy



Paul Lévy (1886-1971), X1904, professeur à l'Ecole Polytechnique à partir de 1920

Théorème (admis). Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. à valeurs dans $\mathbb{R}^d$.

a) Si $X_n \stackrel{\mathcal{L}}{\to} X$, alors Φ_{X_n} converge simplement vers Φ_X.

b) **Si Φ_{X_n} converge simplement** vers une fonction $\Phi : u \in \mathbb{R}^d \mapsto \mathbb{C}$ et si **Φ est continue en 0**, alors **Φ est la fonction caractéristique d'une v.a. X et $X_n \stackrel{\mathcal{L}}{\to} X$.**

Exemples.

- Reprendre les convergences des diapositives 9-10.
- X_n de loi Gamma $\Gamma(\alpha_n, \lambda_n)$: $\Phi_{X_n}(u) = \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_n - iu}\right)^{\alpha_n}$.

  Si $(\lambda_n, \alpha_n) \to (\lambda, \alpha) \in [\mathbb{R}^+\backslash\{0\}]^2$, alors $X_n \stackrel{\mathcal{L}}{\to} X$ de loi $\Gamma(\alpha, \lambda)$.

Application fondamentale : le théorème de la limite centrale

Théorème. Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. réelles indépendantes, de même loi, de carré intégrable : $m = \mathbb{E}(X_1)$ et $\sigma^2 = \mathbb{V}\mathrm{ar}(X_1) > 0$. Alors

$$\frac{\sqrt{n}}{\sigma}\left(\frac{S_n}{n} - m\right)$$

converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,1)$.

Remarques.

- $\sqrt{n}(\frac{S_n}{n} - m)$ converge en loi vers une variable aléatoire de loi normale $\mathcal{N}(0,\sigma^2)$.
- **Limite universelle :** la moyenne de n v.a.r. indépendantes de même loi et de carré intégrable a une loi qui ressemble à la loi normale (lorsque $n \to \infty$).
- **Historique :** résultat énoncé par Laplace (1749-1827), démontré par Lyapunov (1901). Ici, preuve par le théorème de Lévy.

Une application concrète du TCL

Une maternité procède chaque jour à un nombre X_i d'accouchements : on suppose que les $(X_i)_i$ sont des variables indépendantes, de même loi, de loi de Poisson $\mathcal{P}(\theta)$, avec $\theta = 20$.
Quelle est la probabilité que sur un an, il y ait plus de 7400 accouchements ?

Solution. On pose $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ pour le nombre d'accouchement annuel. Ici, $n = 365$, $\mathbb{E}(X_i) = \theta$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(X_i) = \theta$. Alors

$$\mathbb{P}(S_n \geq 7400) = \mathbb{P}\left(\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\theta}}\left(\frac{S_n}{n} - \theta\right) \geq \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\theta}}\left(\frac{7400}{n} - \theta\right)\right) \approx \int_{\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\theta}}\left(\frac{7400}{n} - \theta\right)}^{+\infty} \frac{e^{-x^2/2}}{\sqrt{2\pi}} dx.$$

Comme $\frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\theta}}\left(\frac{7400}{n} - \theta\right) \approx 1.17$,
$\mathbb{P}(S_n \geq 7400) \approx \mathbb{P}(\mathcal{N}(0,1) \geq 1.17) =$ **12.10%**.
Un calcul exact donne 11.99%.

De même, $\mathbb{P}(S_n \geq 7500) \approx 0.962\%$ (valeur exacte : 0.969%).

z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5159	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7704	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7854
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8804	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.9015
1.3	0.9032	0.9049	0.9066	0.9082	0.9099	0.9115	0.9131	0.9147	0.9162	0.9177
1.4	0.9192	0.9207	0.9222	0.9236	0.9251	0.9265	0.9279	0.9292	0.9306	0.9319

FdR de la loi normale $\mathcal{N}(0,1)$ (voir p.107)

Applications du théorème de la limite centrale

- Permet de contrôler la **précision de la loi des grands nombres** (exemple précédent).
  - **Applications en méthode de Monte Carlo.**
    Vitesse de convergence de la méthode numérique : $\sqrt{n}$ (indépendamment de la dimension, de la régularité de la fonction moyennée).
    Contrôle a posteriori de l'erreur (aléatoire) par intervalles de confiance (voir leçon 7).
  - **Applications en statistique.**
    A partir de données, identifier les paramètres du modèle avec des intervalles de confiance.
- Plus généralement, justifie que les **perturbations aléatoires soient modélisées par des variables de loi normale**.

Preuve - Simulation de loi conditionelle

Pour tout borélien B,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Z_\nu \in B) &= \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(Z_n \in B; A_1^c; \cdots; A_{n-1}^c; A_n) \\
&= \sum_{n\geq 1} (1-\mathbb{P}(A))^{n-1}\, \mathbb{P}(Z_n \in B; A_n) \\
&= \frac{\mathbb{P}(Z \in B; A)}{\mathbb{P}(A)} \\
&= \mathbb{P}(Z \in B | A).
\end{aligned}
$$

□

page 5

Preuve - Algorithme de rejet

Soit $A = \{c\, U\, g(Y) < f(Y)\}$. Pour tout borélien $B \subset \mathbb{R}^d$,

$$
\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y \in B \mid A) &= \frac{\mathbb{P}(Y \in B; A)}{\mathbb{P}(A)} \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \int\int_{\{(y,u): y \in B, c\ u\ g(y) < f(y)\}} g(y)\, \mathbf{1}_{[0,1]}(u)\, dy\, du \\
&= \frac{1}{\mathbb{P}(A)} \int_B g(y)\, \frac{f(y)}{c\, g(y)}\, dy = \frac{1}{c\, \mathbb{P}(A)} \int_B f(y)\, dy.
\end{aligned}
$$

Le choix $B = \mathbb{R}^d$ conduit à $c\, \mathbb{P}(A) = 1$, et donc

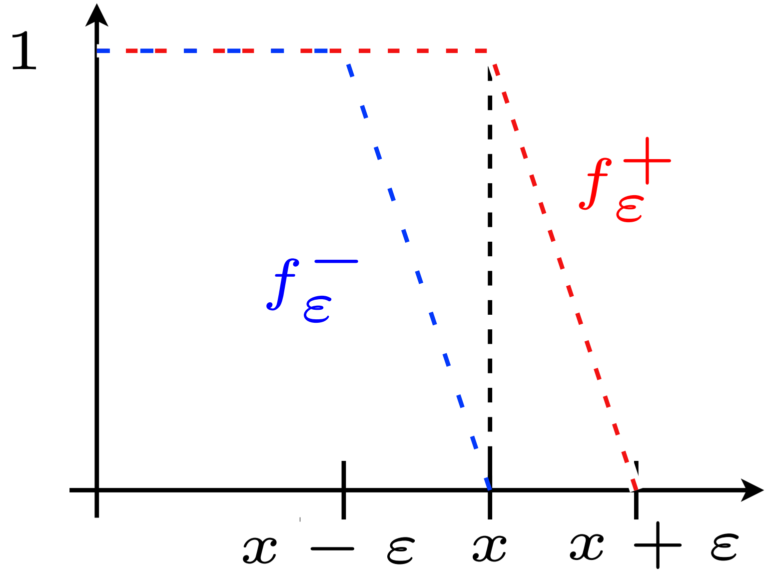
$$
\mathbb{P}(Y \in B \mid A) = \int_B f(y)\, dy
$$

pour tout B. Cela montre que la loi conditionnelle a pour densité f. $\square$

page 6

Preuve - Convergence des fonctions de répartition

$\Longrightarrow$) (sens le plus souvent utilisé).
Considérons deux fonctions continues f_ε^+ et f_ε^- encadrant la fonction indicatrice $\mathbf{1}_{]-\infty,x]}$: ainsi



$$\mathbb{E}(\mathbf{f}_\varepsilon^-(\mathbf{X_n})) \leq \mathbb{P}(\mathbf{X_n} \leq \mathbf{x}) \leq \mathbb{E}(\mathbf{f}_\varepsilon^+(\mathbf{X_n}))$$

pour tout ε et tout n.

$$\lim_{\mathbf{n}\to\infty} \mathbb{E}(\mathbf{f}_\varepsilon^-(\mathbf{X_n})) = \mathbb{E}(f_\varepsilon^-(X)) \geq \mathbb{P}(X \leq x-\varepsilon) \uparrow \mathbb{P}(\mathbf{X} < \mathbf{x}) \text{ quand } \varepsilon \downarrow 0.$$

$$\lim_{\mathbf{n}\to\infty} \mathbb{E}(\mathbf{f}_\varepsilon^+(\mathbf{X_n})) = \mathbb{E}(f_\varepsilon^+(X)) \leq \mathbb{P}(X \leq x+\varepsilon) \downarrow \mathbb{P}(\mathbf{X} \leq \mathbf{x}) \text{ quand } \varepsilon \downarrow 0.$$

Si x point de continuité de F, alors $\mathbb{P}(\mathbf{X} < \mathbf{x}) = \mathbb{P}(\mathbf{X} \leq \mathbf{x})$. $\square$

page 11