

Aléatoire

MAP 311 - X2013

Leçon 9

Mots clés : Modèles dynamiques aléatoires

1. Marche aléatoire
2. Processus de branchement
3. Fractales et transformations aléatoires dans le plan

MODÈLES DYNAMIQUES ALÉATOIRES

- Objectif : décrire l'**évolution d'un système aléatoire au cours du temps**.
- L'indice n désigne maintenant le temps *discret* : $n = 0, 1, 2, \dots$
- $(X_n)_{n \geq 0}$ n'est plus une suite de variables aléatoires indépendantes
- **Une structure générale importante : suite récurrente aléatoire.**

X_0 donné, puis

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{f}(\mathbf{X}_n, \mathbf{U}_{n+1})$$

pour une fonction f et une suite $(U_n)_{n \geq 1}$ de v.a.i.i.d.

Propriété de Markov :

La loi du futur de la suite X_{n+1}, X_{n+2}, \dots conditionnellement au passé $X_n = x_n, X_{n-1} = x_{n-1}, \dots$ ne dépend que de la valeur présente x_n .



Markov (1856-1922)

Voir MAP 432 "Chaines de Markov".

- Innombrables applications en biologie, finance/assurance, informatique, physique, réseau de télécommunications...

EXEMPLE 1. MARCHE ALÉATOIRE

Modélisation du déplacement d'une particule, cours de bourse, file d'attente...

Définition. Soit $(X_n)_n$ une suite de v.a. indépendantes de même loi et posons

$$S_n := s_0 + \sum_{i=1}^n X_i.$$

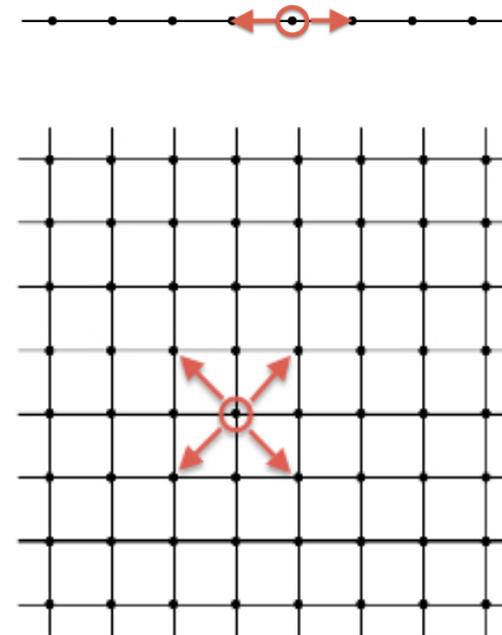
Alors $(S_n)_{n \geq 0}$ définit une **marche aléatoire** partant d'un point s_0 donné.

Exemples.

Marche aléatoire sur \mathbb{Z} : $X_i = \pm 1$

Marche aléatoire sur \mathbb{Z}^d : $X_i = \begin{pmatrix} \pm 1 \\ \vdots \\ \pm 1 \end{pmatrix}$

Si X_i de loi uniforme sur les 2^d voisins, marche symétrique.

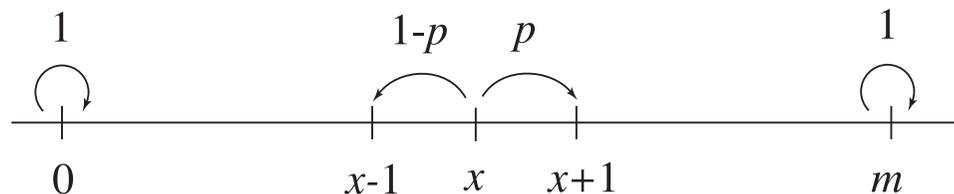


Etude de la ruine du joueur ($d = 1$)

- Deux joueurs : $(S_n)_{n \geq 0}$ représente la fortune d'un joueur au cours du temps.
- Fortune initiale du joueur : $s_0 = k$.
- Fortune initiale de son adversaire : $m - k$.
- Jeu répété à Pile ou Face : avec probabilité p (Pile), le joueur reçoit 1€ de son adversaire et perd 1€ sinon (Face).
- Parties indépendantes et de même loi
 $\Rightarrow (X_i)_i$ sont des v.a.i.i.d. $\mathbb{P}(X_i = +1) = p = 1 - \mathbb{P}(X_i = -1)$:

$$S_n := k + \sum_{i=1}^n X_i \quad (\text{avant ruine}).$$

- Fin du jeu dès qu'un joueur est ruiné : barrières absorbantes aux points 0 et m



- QUESTIONS : **quelle est la probabilité d'être ruiné ? loi du temps de ruine ?...**

Quelques résultats qualitatifs immédiats

- **Cas $p > \frac{1}{2}$.**

LGN \implies

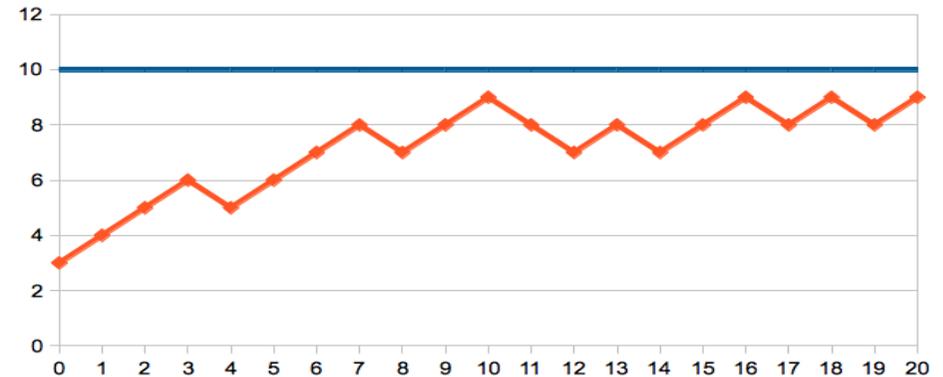
$$\begin{aligned} \frac{1}{n} \sum_{i=1}^n X_i &\xrightarrow{p.s.} \mathbb{E}(X_1) = p - (1 - p) \\ &= 2p - 1 > 0. \end{aligned}$$

Avec probabilité 1, le jeu s'arrête en temps fini.

- **Cas $p < \frac{1}{2}$.** Similaire.
- **Cas symétrique $p = \frac{1}{2}$.**

$$\begin{aligned} \text{TLC } \implies \mathbb{P}(\text{instant de fin du jeu} > n) &\leq \mathbb{P}\left(k + \sum_{i=1}^n X_i \in]0, m[\right) \\ &= \mathbb{P}\left(\frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i=1}^n X_i \in \left] -\frac{k}{\sqrt{n}}, \frac{m-k}{\sqrt{n}} \right[\right) \rightarrow 0. \end{aligned}$$

Avec probabilité 1, le jeu s'arrête en temps fini.



Une réalisation de la fortune du joueur dans le cas $m = 10$, $k = 3$, $p = 70\%$.

Résultats quantitatifs précis

On note

- τ le temps de ruine (1er instant où $S_n = 0$),
- $\mathbb{P}(\tau < +\infty) = \mu_k$.
- $\mu_0 = 1$ et $\mu_m = 0$.

Equation récursive pour $(\mu_k)_k$: pour $k \in \{1, \dots, m-1\}$:

$$\begin{aligned}\mu_k &= \mathbb{P}(\tau < +\infty, X_1 = 1) + \mathbb{P}(\tau < +\infty, X_1 = -1) \\ &= \mu_{k+1} p + \mu_{k-1} (1-p),\end{aligned}$$

soit $p(\mu_k - \mu_{k+1}) = (1-p)(\mu_{k-1} - \mu_k)$.

Proposition.

- Marche symétrique $p = \frac{1}{2}$ (jeu équitable) : $\mu_k = 1 - \frac{k}{m}$.
- Marche non symétrique $p \neq \frac{1}{2}$ (jeu non équitable) : $\mu_k = \frac{\left(\frac{1-p}{p}\right)^m - \left(\frac{1-p}{p}\right)^k}{\left(\frac{1-p}{p}\right)^m - 1}$.

Remarque. On peut aussi calculer $\mathbb{E}(\tau)$ de manière explicite (voir *Aléatoire*, p.184-185).

Comportement en temps long des marches aléatoires

- OBJECTIF : mieux comprendre le système à une échelle macroscopique
- Questions délicates (parfois ouvertes) si prise en compte d'autres phénomènes : MA avec renforcement, MA avec excitation, MA avec évitement, MA en environnement aléatoire...
- APPLICATIONS : chimie (polymères), informatique (web)...

Effet de la dimension (sur la MA standard)

$S_0 = 0$ et on considère l'évènement de retour en 0 : $A = \{\exists n \geq 1 : S_n = 0\}$.

Définition.

- L'état 0 est récurrent si $\mathbb{P}(A) = 1$: *p.s.*, la marche repasse infiniment par 0.
- L'état 0 est transient si $\mathbb{P}(A) < 1$: *p.s.*, la marche repasse un nombre fini (aléatoire) de fois par 0.

Remarque. Si $\mathbb{E}(X_1) \neq 0$, $|S_n| \xrightarrow{p.s.} +\infty \implies 0$ est transient.

Que se passe-t-il dans le cas symétrique ? cela dépend de $d...$

UN PREMIER CALCUL : $\mathbb{P}(S_n = 0) = ?$

- $\mathbb{P}(S_n = (0, \dots, 0)) = [\mathbb{P}(S_{1,n} = 0)]^d$.
- $S_{1,n} = \sum_{i=1}^n (2 \mathcal{B}ern.(\frac{1}{2}) - 1)$ indépendantes
 - ▶ Si n est impair, $\mathbb{P}(S_n = (0, \dots, 0)) = 0$.
 - ▶ Si $n = 2k$ est pair,

$$\mathbb{P}(S_n = (\mathbf{0}, \dots, \mathbf{0})) = \left[\binom{2k}{k} 2^{-2k} \right]^d \sim \frac{C}{n^{d/2}}$$

(preuve via Stirling, cf amphi 6 avec *planche de Galton*).

▣► **pour $d \geq 3$:**

- ▶ $\sum_{n \geq 1} \mathbb{P}(S_n = (0, \dots, 0)) < +\infty$.
- ▶ lemme de Borel-Cantelli : $\mathbb{P}\left(\limsup_n \{S_n = (0, \dots, 0)\}\right) = 0$, c-à-d.
 $(0, \dots, 0)$ n'est visité qu'un nombre fini de fois.

UN CALCUL PLUS PRÉCIS EN DIMENSION 1 ET 2 : LOI DE $T_0 = \inf\{n \geq 1 : S_n = 0\}$

- Convention : $T_0 = +\infty$ si $\{\forall n \geq 1 : S_n \neq 0\}$.
- **Fonction génératrice de T_0** donnée par $\Phi(z) = \mathbb{E}(z^{T_0})$:
 - ▶ Bien définie pour $|z| < 1$ (si $T_0 = +\infty$, $z^{T_0} = 0$).
 - ▶ Lorsque $z \uparrow 1$, **$\Phi(z) \uparrow \mathbb{P}(T_0 < +\infty)$** .

Proposition (représentation explicite de Φ).

Soit $Q(z) = \sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(S_n = 0)z^n$. Alors

$$\mathbf{Q(z) = 1 + \Phi(z)Q(z).}$$

Corollaire. Si $d = 1$ ou 2 , *p.s.* la marche aléatoire visite infiniment souvent 0 .

PREUVE. $\sum_{n \geq 0} \mathbb{P}(S_n = 0) = +\infty \iff \lim_{z \uparrow 1} Q(z) = +\infty \iff \lim_{z \uparrow 1} \Phi(z) = 1 = \mathbb{P}(T_0 < +\infty)$. □

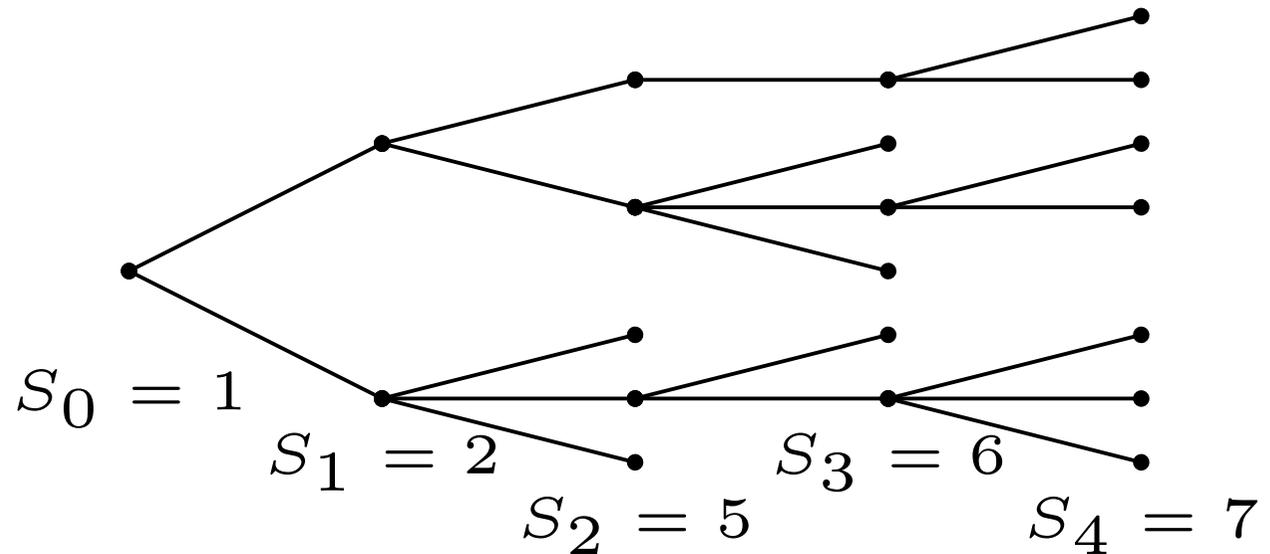
EXEMPLE 2. PROCESSUS DE BRANCHEMENT

- Dynamique de population : mécanismes d'auto-régulation, extinction...
- Phénomènes d'épidémie/contagion et cascades d'évènements
- Nombre de neutrons dans un réacteur
- Pertes/dommages en assurance analysés en intensité/fréquence

Taille de la population
à la génération $n + 1$:

$$S_{n+1} = \sum_{k=1}^{S_n} X_{n,k}$$

Connu sous le nom de
**modèle de Bienaymé-
Galton-Watson.**



Hypothèse : les nombres $(X_{n,k})_{n,k}$ d'enfants par individu sont des v.a. i.i.d.

Objectifs : quantifier la probabilité d'extinction de la population, vitesse de croissance si non extinction...

Somme aléatoire de variables aléatoires indépendantes et de même loi

Etude de la loi de $\mathbf{S} = \sum_{k=1}^{\nu} \mathbf{X}_k$ avec

- $(X_k)_k$ suite de v.a.i.i.d., à valeurs dans \mathbb{N} :

$$\mathbf{g}(\mathbf{z}) = \mathbb{E}(\mathbf{z}^{\mathbf{X}_1}) \quad (\text{fonction génératrice des moments}).$$

- ν une v.a. à valeurs dans \mathbb{N} :

$$\mathbf{G}(\mathbf{z}) = \mathbb{E}(\mathbf{z}^{\nu}).$$

- ν et $(X_k)_k$ sont indépendantes.

Proposition. La fonction génératrice des moments de S est la composée de g par G :

$$\mathbb{E}(\mathbf{x}^{\mathbf{S}}) = \mathbf{G}(\mathbf{g}(\mathbf{x})) = \mathbf{G} \circ \mathbf{g}(\mathbf{x}), \quad \forall \mathbf{x} \in [0, 1].$$

De plus si ν et X_1 sont intégrables, alors $\mathbb{E}(\mathbf{S}) = \mathbb{E}(\nu)\mathbb{E}(\mathbf{X}_1)$.

Application à la dynamique des populations

Corollaire. Supposons que $S_0 = 1$. Si la loi (commune) du nombre $X_{n,k}$ d'enfants (v.a. à valeurs dans \mathbb{N}) a pour fonction génératrice $g(x) = \mathbb{E}(x^{X_1})$, alors la fonction génératrice de la taille S_n de la population à la génération n vaut

$$\mathbf{G}_n(\mathbf{x}) = \mathbb{E}(\mathbf{x}^{\mathbf{S}_n}) = \underbrace{g \circ \cdots \circ g}_{n \text{ fois}}(\mathbf{x}).$$

De plus, si la loi du nombre d'enfants est intégrable, alors $\mathbb{E}(\mathbf{S}_n) = [\mathbb{E}(\mathbf{X}_1)]^n$.

PREUVE.

- $G_n(x) = G_{n-1} \circ g(x) = (G_{n-2} \circ g) \circ g(x) \dots$ et $G_1(x) = g(x)$.
- $\mathbb{E}(S_n) = \mathbb{E}(S_{n-1})\mathbb{E}(X_1) = \dots$

□

Conséquences faciles

- $\mathbb{P}(\text{survie}) = \mathbb{P}(\forall n : S_n > 0) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \downarrow \mathbb{P}(S_n > 0)$
- $\mathbb{P}(S_n > 0) \leq \mathbb{E}(S_n) = [\mathbb{E}(X_1)]^n$:
 ■ Si $\mathbb{E}(X_1) < 1$, alors la probabilité de survie est nulle.

Autres cas et raffinements

Analyse plus fine basée sur l'étude de

$$\mathbf{G}_n(\mathbf{x}) = \mathbb{E}(\mathbf{x}^{\mathbf{S}_n}) = \underbrace{g \circ \cdots \circ g}_{n \text{ fois}}(\mathbf{x}).$$

Propriétés.

a) Extinction de la population à la génération n :

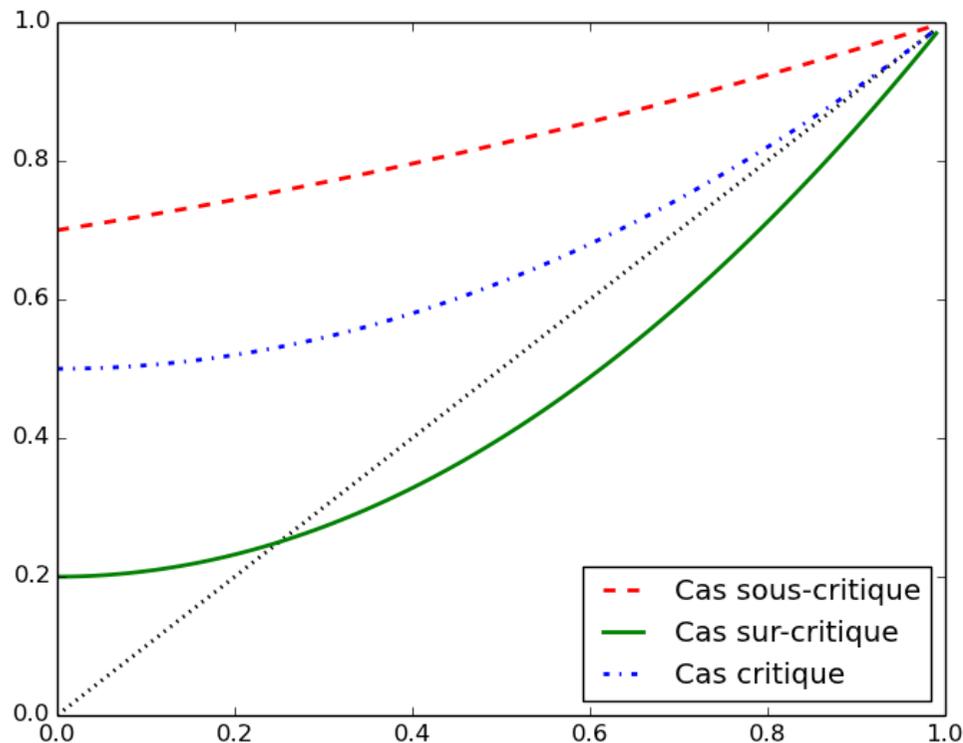
$$\mathbb{P}(\mathbf{S}_n = \mathbf{0}) = G_n(0) = g(G_{n-1}(0)) = \mathbf{g}(\mathbb{P}(\mathbf{S}_{n-1} = \mathbf{0})).$$

b) $p := \mathbb{P}(\text{extinction}) = \lim_{n \rightarrow +\infty} \uparrow \mathbb{P}(S_n = 0)$.

Corollaire. La probabilité d'extinction p satisfait $p = g(p)$.

Etude de $p = \mathbb{P}(\text{extinction})$

Propriété. La fonction $g(x) = \mathbb{E}(x^{X_1})$ est croissante convexe avec $g(1) = 1$, $g(0) = \mathbb{P}(X_1 = 0)$, $g'(1) = \mathbb{E}(X_1)$.



⇒ Trois cas :

- ▷ $\mathbb{E}(X_1) < 1$: cas sous-critique
- ▷ $\mathbb{E}(X_1) = 1$: cas critique
- ▷ $\mathbb{E}(X_1) > 1$: cas sur-critique

Caractérisation de l'extinction de population

Théorème. Supposons que X_1 est intégrable.

- Si $\mathbb{E}(X_1) \leq 1$ (moyenne du nombre d'enfants inférieure à 1), **la population s'éteint avec probabilité 1.**
- Si $\mathbb{E}(X_1) > 1$, la **population s'éteint avec probabilité $p \in]0, 1[$** , unique solution de $p = g(p)$.

Remarques. Longue liste de résultats complémentaires sur

- $\mathbb{E}(X_1) < 1$ (branchement sous-critique) :
 - ▶ vitesse de convergence vers 0 de la probabilité de survie ;
 - ▶ loi de S_n conditionnellement à la non-extinction $\{S_n > 0\}$;
- $\mathbb{E}(X_1) > 1$ (branchement sur-critique) :
 - ▶ vitesse de croissance (exponentielle) de la population ;
 - ▶ ...

Voir *Aléatoire*, p.192.

EXEMPLE 3. FRACTALES ET

TRANSFORMATIONS AFFINES ALÉATOIRES DANS LE PLAN

MODÈLE :

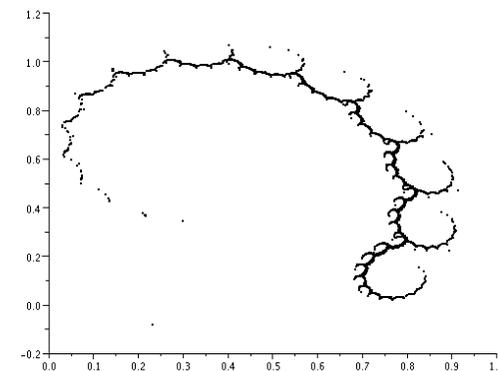
- Suite $(\theta_n)_{n \geq 1}$ de **v.a.i.i.d. discrètes** à valeurs dans $\{1, \dots, L\}$ ($L \in \mathbb{N}$).
- **Matrices** $(M(\theta))_{1 \leq \theta \leq L}$ de taille 2×2 et **vecteurs** $(V(\theta))_{1 \leq \theta \leq L}$ de taille 2.
- Suite récurrente aléatoire :

$$\mathbf{X}_{n+1} = \mathbf{M}(\theta_{n+1})\mathbf{X}_n + \mathbf{V}(\theta_{n+1}) = \mathbf{A}_{\theta_{n+1}}(\mathbf{X}_n), \quad \mathbf{n} \geq \mathbf{0}, \quad X_0 = x_0 \in \mathbb{R}^2 \text{ donnée.}$$

Exemple. $\mathbb{P}(\theta_n = 1) = \mathbb{P}(\theta_n = 2) = \frac{1}{2}$ avec

$$M(1) = \begin{bmatrix} 0.839 & -0.303 \\ 0.383 & 0.924 \end{bmatrix}, V(1) = \begin{bmatrix} 0.232 \\ -0.080 \end{bmatrix},$$

$$M(2) = \begin{bmatrix} -0.161 & -0.136 \\ 0.138 & -0.182 \end{bmatrix}, V(2) = \begin{bmatrix} 0.921 \\ 0.178 \end{bmatrix}.$$



? convergence (*p.s.*, en loi) de X_n quand $n \rightarrow +\infty$?

Trajectoire $(X_n)_{1 \leq n \leq 100000}$:
spirale ? structure fractale ?

Analyse de convergence en temps long de $X_{n+1} = A_{\theta_{n+1}}(X_n)$

Lemme (retournement du temps - "coupling from the past" algorithm, Propp-Wilson '98).

$$\mathbf{X}_n = \mathbf{A}_{\theta_n} \circ \mathbf{A}_{\theta_{n-1}} \circ \mathbf{A}_{\theta_{n-2}} \circ \cdots \circ \mathbf{A}_{\theta_1}(\mathbf{x}_0)$$

a même loi que

$$\mathbf{R}_n = \mathbf{A}_{\theta_1} \circ \cdots \circ \mathbf{A}_{\theta_{n-2}} \circ \mathbf{A}_{\theta_{n-1}} \circ \mathbf{A}_{\theta_n}(\mathbf{x}_0).$$

Corollaire. Si $\mathbf{R}_n \xrightarrow{\text{p.s.}}$ vers une certaine v.a. R_∞ , alors $\mathbf{X}_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbf{R}_\infty$.

PREUVE. Pour toute fonction f continue bornée

$$\mathbb{E}(f(\mathbf{X}_n)) = \mathbb{E}(f(\mathbf{R}_n)) \rightarrow \mathbb{E}(f(R_\infty))$$

(par théorème de convergence dominée). □

Etude de convergence de R_n :

$$\begin{aligned}
 R_n &= A_{\theta_1} \circ \cdots \circ A_{\theta_{n-2}} \circ A_{\theta_{n-1}} (\mathbf{M}(\theta_n)x_0 + \mathbf{V}(\theta_n)) \\
 &= A_{\theta_1} \circ \cdots \circ A_{\theta_{n-2}} (\mathbf{M}(\theta_{n-1})M(\theta_n)x_0 + \mathbf{M}(\theta_{n-1})V(\theta_n) + \mathbf{V}(\theta_{n-1})) \\
 &= M(\theta_1) \dots M(\theta_n)x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} M(\theta_1) \dots M(\theta_k)V(\theta_{k+1}), \\
 \mathbf{R}_\infty &\stackrel{?}{=} \sum_{k=0}^{+\infty} M(\theta_1) \dots M(\theta_k)V(\theta_{k+1}).
 \end{aligned}$$

Théorème. Supposons

- $\inf_{1 \leq l \leq L} \|M(l)\| \neq 0$ et $\mathbb{E}(\log \|M(\theta_1)\|) = \sum_{l=1}^L \mathbb{P}(\theta_1 = l) \log \|M(l)\| < 0$;
- $\sup_{1 \leq l \leq L} \|V(l)\| < +\infty$.

Alors $\mathbf{R}_n \xrightarrow{\text{p.s.}} \mathbf{R}_\infty$ et $\mathbf{X}_n \xrightarrow{\mathcal{L}} \mathbf{R}_\infty$.

Convergence *p.s.* de $R_n = M(\theta_1) \dots M(\theta_n)x_0 + \sum_{k=0}^{n-1} M(\theta_1) \dots M(\theta_k)V(\theta_{k+1})$.

PREUVE. Il suffit de montrer que $\limsup_{n \rightarrow +\infty} \|M(\theta_1) \dots M(\theta_n)\|^{1/n} < 1$ *p.s.*

Par la loi des Grands Nombres :

$$\begin{aligned} \|M(\theta_1) \dots M(\theta_n)\|^{1/n} &= \exp\left(\frac{1}{n} \log(\|M(\theta_1) \dots M(\theta_n)\|)\right) \\ &\leq \exp\left(\frac{1}{n} \sum_{k=1}^n \log \|M(\theta_k)\|\right) \xrightarrow{p.s.} \exp(\mathbb{E}(\log \|M(\theta_1)\|)) < 1. \end{aligned}$$

□

En résumé

- La v.a. X_n converge en loi vers la v.a. R_∞ .
- R_∞ ne dépend pas de l'initialisation X_0 : oubli de la condition initiale.
- Une trajectoire $(X_n)_{n \geq 1}$ = des réalisations (pour n grand) de la v.a. R_∞ .
- Pourquoi des images fractales ?
 - ▶ les points visités sont (asymptotiquement) dans le support^a de la loi de R_∞ ,
 - ▶ support invariant par transformation affine $x \mapsto M(\theta)x + V(\theta)$
 - ↳ objet fractal (Mandelbrot 1924-2010, X1944).

Réf : Barnsley, *Fractals everywhere*, 1993.

a. support de R_∞ = plus petit fermé $F \subset \mathbb{R}^2$ tel que $\mathbb{P}(R_\infty \in F) = 1$.

Quelques exemples et simulations

Spirale : voir p. 16. $L = 2$, $\mathbb{P}(\theta = 1) = \mathbb{P}(\theta = 2) = \frac{1}{2}$.

$$A(1) = \begin{bmatrix} 0.839 & -0.303 \\ 0.383 & 0.924 \end{bmatrix}, B(1) = \begin{bmatrix} 0.232 \\ -0.080 \end{bmatrix}, A(2) = \begin{bmatrix} -0.161 & -0.136 \\ 0.138 & -0.182 \end{bmatrix}, B(2) = \begin{bmatrix} 0.921 \\ 0.178 \end{bmatrix}.$$

Dragon de Heighway.

Triangle de Sierpinski.

Fougère : $L = 4$, $\mathbb{P}(\theta = 1) = 0.01$, $\mathbb{P}(\theta = 2) = \mathbb{P}(\theta = 3) = 0.07$, $\mathbb{P}(\theta = 4) = 0.85$.

$$M(1) = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0.16 \end{bmatrix}, \quad V(1) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad M(2) = \begin{bmatrix} 0.2 & -0.26 \\ 0.23 & 0.22 \end{bmatrix}, \quad V(2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.6 \end{bmatrix},$$

$$M(3) = \begin{bmatrix} -0.15 & 0.28 \\ 0.26 & 0.24 \end{bmatrix}, \quad V(3) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0.44 \end{bmatrix}, \quad M(4) = \begin{bmatrix} 0.85 & 0.04 \\ -0.04 & 0.85 \end{bmatrix}, \quad V(4) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1.6 \end{bmatrix}.$$

