Eléments de correction de la rubrique "Pour en savoir plus" Amphi 5 - E. Gobet

On suppose que les variables aléatoires $(X_i)_{i\geq 1}$ sont positives, i.i.d. et on cherche à comprendre le comportement de $\frac{X_1+\cdots+X_n}{n}$ lorsque X_1 n'est pas intégrable ($\mathbb{E}(X_1)=+\infty$). C'est précisement le cas où les hypothèses de la loi des grands nombres ne sont pas satisfaites. Exemples :

– la valeur absolue d'une v.a. de loi de Cauchy, de densité $p(x)=\frac{2}{\pi(1+x^2)}\mathbf{1}_{x\geq 0}$;

– une variable de loi de Pareto de densité $p(x)=\alpha\, x^{-(1+\alpha)}\mathbf{1}_{x\geq 1}$ (avec $\alpha\in]0,1[$).

Posons $S_n=X_1+\cdots+X_n$.

Question 1. Montrer que

$$\frac{S_n}{n}\overset{p.s.}{\to}+\infty.$$

SOLUTION. On pose

$$X_i^L:=\min(X_i,L)\leq X_i$$

avec $L\in\mathbb{N}^+$. Les v.a. $(X_i^L)_i$ sont i.i.d., bornées, donc intégrables. La loi forte des grands nombres assure que

$$\frac{S_n}{n}\geq\frac{X_1^L+\cdots+X_n^L}{n}\overset{p.s.}{\to}\mathbb{E}(X_1^L).$$

L'idée est de faire tendre L vers l'infini et montrer $\mathbb{E}(X_1^L)\uparrow+\infty$, puis de conclure ; mais il faut faire attention car la convergence *p.s.* ci-dessus dépend de L, alors qu'on veut ensuite prendre la limite en L. Précisons cela : la LGN donne l'existence d'un évènement Ω^L de probabilité 1 ($\mathbb{P}(\Omega^L)=1$) tel que

$$\forall\omega\in\Omega^L:\frac{X_1^L+\cdots+X_n^L}{n}(\omega)\to\mathbb{E}(X_1^L).$$

Remarquons que l'évènement $\cap_{L\geq 1}\Omega^L$ est de probabilité 1, car

$$\mathbb{P}([\cap_{L\geq 1}\Omega^L]^c)=\mathbb{P}(\cup_{L\geq 1}[\Omega^L]^c)\leq\sum_{L\geq 1}\mathbb{P}([\Omega^L]^c)=0.$$

Ainsi, pour tout $\omega\in\cap_{L\geq 1}\Omega^L$,

$$\liminf_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}(\omega)\geq\liminf_{n\to+\infty}\frac{X_1^L+\cdots+X_n^L}{n}(\omega)=\mathbb{E}(X_1^L),\quad\forall L\in\mathbb{N}^+.$$

Si $\mathbb{E}(X_1^L)\uparrow+\infty$, alors nous obtenons bien qu'avec probabilité 1, $\liminf_{n\to+\infty}\frac{S_n}{n}=+\infty$.

Preuve de $\mathbb{E}(X_1^L)\uparrow+\infty$. Supposons que la loi de X_1 est à densité $p(.)$: on a $\mathbb{E}(X_1^L)=\int_0^\infty\min(L,x)p(x)\mathrm{d}x$. Le théorème de convergence monotone montre que $\min(L,x)p(x)\uparrow xp(x)$ qui est non intégrable ($\int_0^\infty xp(x)\mathrm{d}x=+\infty$), ce qui démontre notre assertion. Si la loi de X_1 n'est pas à densité, on peut utiliser une version plus générale du théorème de convergence monotone. □

Question 2. On cherche maintenant à exhiber des vitesses d'explosion de S_n/n, c'est-à-dire à trouver une suite $b_n \to +\infty$ telle que

$$\frac{1}{b_n}\frac{S_n}{n} \overset{p.s.}{\to} 0.$$

Pour cela, on suppose que X_1 a un peu d'intégrabilité au sens suivant : pour un réel $0 < p < 1$, on a

$$\mathbb{E}(X_1^p) < +\infty.$$

L'exemple précédent de v.a. de loi de Pareto satisfait cette condition avec $p < \alpha$.

SOLUTION. Soit $(a_n)_n$ une suite croissante non nulle telle que $\sum_{n\geq 1} a_n^{-p} < +\infty$: un choix possible est par exemple $a_n = (n \log^\beta(n))^{1/p}$ pour $\beta > 1$ (série de Bertrand).
Par le théorème de Tonelli (inversion de $\mathbb{E}$ et $\sum$ pour des v.a. positives), on a

$$\mathbb{E}\Big(\sum_{n\geq 1}\frac{X_n^p}{a_n^p}\Big) = \sum_{n\geq 1}\mathbb{E}\Big(\frac{X_n^p}{a_n^p}\Big) = \mathbb{E}(X_1^p)\sum_{n\geq 1} a_n^{-p} < +\infty.$$

Ainsi, la série aléatoire $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{X_n^p}{a_n^p}$ est convergente avec probabilité 1 (car d'espérance finie), donc le terme général de la série $\dfrac{X_n^p}{a_n^p}$ converge *p.s.* vers 0, impliquant que pour n assez grand, $\dfrac{X_n}{a_n} \leq \dfrac{X_n^p}{a_n^p}$ (en utilisant $0 < p < 1$) : par conséquence, la série $\displaystyle\sum_{n\geq 1}\frac{X_n}{a_n}$ est aussi convergente avec probabilité 1.
On rappelle maintenant le résultat déterministe :
– LEMME DE KRONECKER : si $\sum_{n\geq 1} y_n$ converge et b_n croissante avec $b_n \uparrow +\infty$, alors $\frac{1}{b_n}\sum_{k=1}^n b_k y_k \to 0$.
On l'applique à $y_n = \frac{X_n}{a_n}$ et $b_n = a_n$ pour avoir

$$\frac{1}{a_n}\sum_{k=1}^n a_k \frac{X_k}{a_k} = \frac{S_n}{a_n} \overset{p.s.}{\to} 0.$$

Dans le cas $a_n = (n \log^\beta(n))^{1/p}$ ($\beta > 1$), on trouve que S_n/n explose vers l'infini moins vite que $b_n = n^{\frac{1}{p}-1}\log^{\beta/p}(n)$. Plus p est proche de 1 (cas proche des conditions d'application de la LGN), plus faible est la vitesse, ce qui est intuitivement satisfaisant.

RÉFÉRENCE : V. Petrov, *Limit theorems of probability theory - Sequences of independent random variables*, Oxford studies in probability, 1995.