Eléments de correction de la rubrique "Pour en savoir plus" Amphi 6 - E. Gobet

L'objectif est d'approfondir quelques propriétés des fonctions caractéristiques et d'en montrer quelques applications.

Question 1. Que dire sur la v.a. X si $\Phi_X(u) = e^{i\langle m,u\rangle}$ pour un certain vecteur $m \in \mathbb{R}^d$?

SOLUTION. Si $\mathbb{P}(X = m) = 1$ (c'est-à-dire X est presque-sûrement constant et égal à m), sa fonction caractéristique est bien $e^{i\langle m,u\rangle}$. Par le théorème de caractérisation unique de la loi par la fonction caractéristique, on a donc $X = m$ *p.s.* . □

Question 2. Si X a pour fonction caractéristique $\Phi_X(.)$, quelle variable aléatoire a pour fonction caractéristique $u \mapsto |\Phi_X(u)|^2$?

SOLUTION. Soit $\widetilde{X}$ une variable aléatoire de même loi que X et indépendante de X : on a que $\Phi_{-\widetilde{X}}(u) = \mathbb{E}(e^{i\langle u,-\widetilde{X}\rangle}) = \mathbb{E}(e^{-i\langle u,X\rangle}) = \overline{\Phi_X(u)}$. Ainsi, par indépendance de X et $\widetilde{X}$,

$$\Phi_{X-\widetilde{X}}(u) = \Phi_X(u)\Phi_{-\widetilde{X}}(u) = \Phi_X(u)\overline{\Phi_X(u)} = |\Phi_X(u)|^2.$$

La v.a. $X - \widetilde{X}$ a donc pour fonction caractéristique $u \mapsto |\Phi_X(u)|^2$. □

Question 3. Si $|\Phi_X(u)| = 1$ pour tout $|u| \le \varepsilon$ (pour un certain $\varepsilon > 0$), que dire de X ?

SOLUTION. Nous allons montrer que la v.a. X est presque-sûrement constante : si $\varepsilon = +\infty$, cela découle directement du théorème de caractérisation unique des lois. Le cas ε fini est plus technique.
En fait, il suffit de montrer le cas X de dimension 1, car si $X = (X_1, \dots, X_d)$ la propriété s'écrit "$|\Phi_{X_i}(u_i)| = 1$ pour tout $|u_i| \le \varepsilon$" en prenant $u = (0, \dots, 0, u_i, 0, \dots, 0)$.
En appliquant la question 2 et en prenant la même notation pour $\widetilde{X}$, on déduit que $Z = X - \widetilde{X}$ est tel que $\Phi_Z(u) = |\Phi_X(u)|^2 = 1$ pour tout $|u| \le \varepsilon$. La loi de Z étant symétrique, sa fonction caractéristique est réelle et ainsi $\Phi_Z(u) = \mathbb{E}(\cos(uZ))$, tout en valant 1 pour $|u| \le \varepsilon$. Pour de tels u, sur un ensemble Ω_u de probabilité 1 on a $\cos(uZ) = 1$, c'est-à-dire $uZ \in 2\pi\mathbb{Z}$. En prenant $u = n^{-1}$ avec n assez grand, sur l'intersection $\cap_{n\ge1}\Omega_{n^{-1}}$ (encore de probabilité 1), $Z \in 2n\pi\mathbb{Z}$ pour tout n assez grand. Cela prouve que $Z = 0$ *p.s.* , ou encore $X = \widetilde{X}$ *p.s.* . S'il existait un réel x tel que $p = \mathbb{P}(X \le x) \in]0, 1[$ alors $\mathbb{P}(X \le x < \widetilde{X}) = \mathbb{P}(X \le x)\mathbb{P}(x < \widetilde{X}) = p(1 - p) > 0$ contredisant que $X = \widetilde{X}$ *p.s.* .

Cela prouve ainsi que pour tout x, $\mathbb{P}(X \leq x) = 0$ ou 1, c'est-à-dire que la v.a. X est presque-sûrement constante. $\square$

Question 4. Que dire sur la v.a. X si X et Y sont indépendants et si $X + Y$ a même loi que Y ?

Solution. Nous allons montrer que $X = 0$ *p.s.* .
Si X et Y sont de carré intégrable, leur indépendance donne $\mathrm{Var}(X+Y) = \mathrm{Var}(X)+\mathrm{Var}(Y)$ et c'est aussi égal à $\mathrm{Var}(Y)$ par hypothèse. Ainsi $\mathrm{Var}(X) = 0$, ce qui prouve que la v.a. X est presque-sûrement constante, disons égale à m. Un calcul d'espérance donne $m+\mathbb{E}(Y) = \mathbb{E}(X + Y) = \mathbb{E}(Y)$, donc $m = 0$.
Maintenant, ne supposons plus que X et Y sont de carré intégrable. Le calcul sur les fonctions caractéristiques donne

$$\Phi_Y(u) = \Phi_{X+Y}(u) = \Phi_X(u)\Phi_Y(u).$$

$\Phi_Y(u)$ est continue en $u = 0$ donc non nulle dans un voisinage $|u| \leq \varepsilon$ de 0 ($\varepsilon > 0$) : dans un tel voisinage, on déduit $\Phi_X(u) = 1$. La question 3 montre alors que $X = m$ *p.s.* pour une certaine constante m. Cela implique de plus que $\Phi_X(u) = e^{i\langle m,u\rangle}$ pour tout u petit. On conclut que $m = 0$. $\square$

Question 5. Que dire sur $X - Y$ si $X - Y$ est indépendant de X et de Y ?

Solution. En écrivant $X = (X - Y) + Y$ et $Y = (Y - X) + X$, par indépendance on a

$$\Phi_X(u) = \Phi_{X-Y}(u)\Phi_Y(u), \quad \Phi_Y(u) = \Phi_{Y-X}(u)\Phi_X(u).$$

En multipliant les deux égalités entre elles et en simplifiant par $\Phi_X(u)$ et $\Phi_Y(u)$ non nuls au voisinage de $u = 0$, on déduit $1 = \Phi_{X-Y}(u)\Phi_{Y-X}(u) = |\Phi_{X-Y}(u)|^2$. Par la question 3, on conclut que la v.a. $X - Y$ est presque-sûrement constante. $\square$