Eléments de correction de la proposition "Représentation explicite de Φ" p.9 Amphi 9 - E. Gobet

Soit $(S_n)_n$ la marche aléatoire symétrique dans $\mathbb{Z}^d$: $S_n = \sum_{i=1}^n X_i$ avec $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = 2^{-d}$. Pour démontrer que la marche aléatoire repasse *p.s.* infiniment souvent par 0 en dimension $d = 1$ et 2, et un nombre fini (aléatoire) de fois en dimension plus grande, nous avons utilisé le résultat suivant.

Proposition. Pour $z \in [0, 1[$, posons $Q(z) = \sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(S_n = 0)z^n$ et $\Phi(z) = \mathbb{E}(z^{T_0})$ avec $T_0 = \inf\{n \geq 1 : S_n = 0\}$ (avec la convention $T_0 = +\infty$ si $\{\forall n \geq 1 : S_n \neq 0\}$). Alors

$$Q(z) = 1 + \Phi(z)Q(z).$$

PREUVE. Soit $n \geq 1$: en décomposant les trajectoires sur leur 1er temps de retour en 0, on a

$$\bigcup_{k=1,\ldots,n} \{S_1 \neq 0, \ldots, S_{k-1} \neq 0, S_k = 0, S_n = 0\} = \{S_n = 0\}$$

d'où

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{k-1} \neq 0, S_k = 0, S_n = 0).$$

Ainsi, en utilisant que les variables $(S_1, \ldots, S_k)$ sont indépendantes de $(X_{k+1}, \ldots, X_n)$, on déduit pour $k \in \{1, \ldots, n\}$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{k-1} \neq 0, S_k = 0, S_n = 0) \\
&= \mathbb{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{k-1} \neq 0, S_k = 0, X_{k+1} + \cdots + X_n = 0) \\
&= \mathbb{P}(S_1 \neq 0, \ldots, S_{k-1} \neq 0, S_k = 0)\mathbb{P}(X_{k+1} + \cdots + X_n = 0).
\end{aligned}$$

Le premier facteur n'est autre que $\mathbb{P}(T_0 = k)$ alors que le second est $\mathbb{P}(S_{n-k} = 0)$, soit

$$\mathbb{P}(S_n = 0) = \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(T_0 = k)\mathbb{P}(S_{n-k} = 0).$$

Par un calcul standard de produit de séries, il découle :

$$\begin{aligned}
Q(z) &= 1 + \sum_{n\geq 1} \mathbb{P}(S_n = 0)z^n \\
&= 1 + \sum_{n\geq 1} \sum_{k=1}^n \mathbb{P}(T_0 = k)\mathbb{P}(S_{n-k} = 0)z^k z^{n-k} \\
&= 1 + \big(\sum_{k\geq 1} \mathbb{P}(T_0 = k)z^k\big)\big(\sum_{l\geq 0} \mathbb{P}(S_l = 0)z^l\big) \\
&= 1 + \Phi(z)Q(z).
\end{aligned}$$

$\square$

Conséquence. Si $d = 1$ ou 2, on a $\sum_{n\geq 0} \mathbb{P}(S_n = 0) = +\infty$ (car les termes pairs sont équivalents à $cn^{-d/2}$). Ainsi, $\lim_{z\uparrow 1} Q(z) = +\infty$ et par conséquent $\lim_{z\uparrow 1} \Phi(z) = \lim_{z\uparrow 1} \frac{Q(z)-1}{Q(z)} = 1$. Les propriétés des fonctions génératrices donnent $\lim_{z\uparrow 1} \Phi(z) = \mathbb{P}(T_0 < +\infty)$. On a donc prouvé qu'en partant de 0, la marche aléatoire repasse *p.s.* en 0. Puis une fois revenu en 0, le phénomène recommence et la marche aléatoire repasse *p.s.* une seconde fois en 0 etc... donc une infinité de fois.