

# Les outils stochastiques des marchés financiers

Une visite guidée de Einstein à Black-Scholes

Nicole El Karoui et Emmanuel Gobet

*Editions de l'Ecole Polytechnique, 2011*

Version WEB sans figure, exercice, preuve, appendice

A USAGE STRICTEMENT PERSONNEL



ECOLE POLYTECHNIQUE

ECOLE POLYTECHNIQUE

ECOLE POLYTECHNIQUE

LES OUTILS STOCHASTIQUES DES MARCHÉS FINANCIERS

# INTRODUCTION

Depuis 40 ans, les outils mathématiques probabilistes ont montré leur rôle central dans l'analyse et la gestion des risques financiers de tout ordre. Le cœur des outils probabilistes réside dans le calcul stochastique, qui n'est autre qu'un calcul différentiel, mais adapté aux trajectoires des processus stochastiques qui sont non différentiables (car très erratiques comme le sont les cours boursiers). Il existe de nombreux ouvrages d'introduction à ces mathématiques probabilistes, et de leurs applications à la gestion des risques. Néanmoins, la théorie mathématique sous-jacente est difficile et rentrer dans ce domaine nécessite un investissement important, qui peut décourager de nombreux étudiants.

Dans ce livre, nous proposons une approche différente concernant les outils stochastiques, en privilégiant *les arguments les plus élémentaires*, sans pour autant sacrifier à la rigueur. Alors que bien souvent dans les autres ouvrages, en préambule aux applications financières, il est nécessaire de digérer un arsenal de résultats probabilistes avancés (qui demandent eux-mêmes des pré-requis importants), nous proposons une approche plus directe du calcul stochastique, avec une technicité bien moindre, suivant les idées de Föllmer [10]. Certes, cet angle d'attaque ne permet pas de pousser aussi loin l'analyse qu'avec les outils puissants du calcul stochastique *traditionnel*, mais c'est suffisant pour résoudre complètement les problématiques de valorisation et couverture de produits financiers, dans les modèles stochastiques de base utilisés dans les salles de marché. Nous espérons ainsi qu'un lecteur non initié pourra plus facilement rentrer dans ce sujet complexe, avant de s'orienter vers des lectures plus spécialisées.

La première partie de ce cours (chapitres 1 à 5) est davantage mathématique. Nous définissons le mouvement brownien et démontrons quelques-unes de ses propriétés remarquables, en remontant à ses origines avec Brown, Einstein, Bachelier, Wiener, Lévy... Le calcul stochastique associé y est ensuite développé, suivant l'approche de Föllmer, ainsi que les liens avec les équations aux dérivées partielles (représentations de Feynman-Kac), notamment l'équation de la chaleur. Des extensions des modèles browniens (brownien géométrique, processus d'Ornstein-Uhlenbeck) sont détaillées. Nous incorporons ensuite des sauts dans les modèles (de type Poisson composé) et

---

revisitons les résultats précédents. Mentionnons aussi l'excellent livre de Breiman [3], où les propriétés sur le mouvement brownien et le processus de Poisson sont exposées avec une pédagogie remarquable. Nous terminons la partie mathématique avec les changements de probabilité, couramment utilisés pour l'analyse mathématique des produits dérivés : les résultats sont exposés pour les deux classes de processus (avec ou sans sauts).

La seconde partie (chapitres 6 à 10) traite des premières applications en finance de marché. Nous présentons d'abord quelques facettes des produits dérivés (typologie, utilisation, utilité . . .). La détention de ces produits dérivés comporte des risques inhérents à cette activité et les outils stochastiques permettent de donner un cadre robuste d'analyse et de gestion de ceux-ci. Nous suivons l'approche fondamentale de Black-Scholes : un portefeuille de couverture permet de s'immuniser parfaitement contre les risques de fluctuations des cours, et gérer sans risque les options. Des applications aux options d'achat/vente sur action sont développées, avec des extensions aux options exotiques (options barrière et lookback) et aux différents marchés (taux d'intérêt, crédit). Enfin, nous prenons en compte les modèles à sauts dans la couverture des produits dérivés. Tout au long de cette partie, nous privilégions les *calculs explicites* (de type formule de Black-Scholes, et ses variantes) : ce type de formule explicite joue un rôle crucial dans les salles de marchés car leur évaluation sur un ordinateur est instantanée et c'est bien ce délai de réponse qui est demandé en pratique quand il s'agit de réagir aux mouvements financiers...

Dans notre présentation des problématiques, nous ne restons pas indifférents à la crise financière actuelle, bien au contraire. Ce contexte difficile nous permet de mieux illustrer que la méthodologie de gestion des risques à la Black-Scholes, bien que robuste en *situation normale*, a aussi des limites et qu'elle a été bâtie à partir d'hypothèses spécifiques d'efficience des marchés (pas de risque de liquidité, de contrepartie, pas de risque systémique...). Nous en parlons plus en détail au chapitre 6.

Ce livre trouve ses origines dans un cours donné à l'École Polytechnique entre 2000 et 2008, et à l'Ensimag entre 2005 et 2010. Cette version a pu profiter des remarques/questions des étudiants de chaque école et des collègues (notamment Hervé Guiol) : qu'ils en soient tous remerciés.

Chaque chapitre contient une rubrique POUR EN SAVOIR PLUS, qui approfondit ou généralise certaines notions. Cette rubrique peut être sautée en première lecture. Enfin, à la fin de chaque chapitre, sont regroupés quelques exercices, qui permettent de manipuler les notions du chapitre. Les exercices indiqués avec une ★ sont en général plus longs : ils sont rédigés comme un problème de synthèse et proviennent d'anciens contrôles de connaissances posés aux étudiants. Ces exercices ★ sont corrigés en fin d'ouvrage. Tout cela constitue un bon entraînement pour le lecteur soucieux de bien assimiler le cours.

Paris, décembre 2010.

---

*A Façal,  
Meriem, Hakim, Nouredine,  
Khalil et Imen.*

*A Sophie,  
Alexandre, Marion,  
Maxime et Antoine.*

LES OUTILS STOCHASTIQUES DES MARCHÉS FINANCIERS

ECOLE POLYTECHNIQUE

ECOLE POLYTECHNIQUE

ECOLE POLYTECHNIQUE

LES OUTILS STOCHASTIQUES DES MARCHÉS FINANCIERS

# Table des matières

<b>1</b>	<b>Le mouvement brownien</b>	<b>1</b>
1.1	Bref historique du mouvement brownien . . . . .	1
1.2	Le mouvement brownien et ses trajectoires . . . . .	4
1.2.1	Définition . . . . .	5
1.2.2	Propriétés de la courbe brownienne . . . . .	7
1.3	Invariance par translation et propriétés de Markov . . . . .	8
1.3.1	Mouvement brownien avec dérive . . . . .	8
1.3.2	Un premier résultat d'invariance par translation . . . . .	9
1.3.3	Le principe de symétrie : une version simplifiée . . . . .	10
1.3.4	Temps d'arrêt . . . . .	12
1.3.5	Le résultat général d'invariance par translation . . . . .	14
1.3.6	Application . . . . .	15
1.4	Propriétés de la courbe brownienne . . . . .	16
1.4.1	Comportement à l'infini . . . . .	17
1.4.2	Irrégularité des trajectoires . . . . .	18
1.4.3	Les zéros du mouvement brownien . . . . .	21
1.5	Construction du mouvement brownien . . . . .	22
1.5.1	L'approximation par marche aléatoire . . . . .	23
1.5.2	Pont brownien . . . . .	24
1.5.3	Convergence de l'approximation par pont brownien $[0,1]$ : construction de Lévy . . . . .	26
1.5.4	Décomposition du mouvement brownien en séries de Fourier . . . . .	28
1.6	Exercices . . . . .	29
<b>2</b>	<b>Équation de la chaleur et formule d'Itô</b>	<b>35</b>
2.1	Introduction . . . . .	35
2.2	L'équation de la chaleur . . . . .	36
2.2.1	Le cas simple de fonction $f(x)$ . . . . .	37
2.2.2	Le cas général de fonction $f(t, x)$ . . . . .	38

2.2.3	Application à l'équation de la chaleur dans un intervalle . . . .	40
2.2.4	Équation aux dérivées partielles pour le mouvement brownien avec dérive . . . . .	41
2.2.5	Commentaires . . . . .	42
2.3	Variation quadratique . . . . .	43
2.3.1	Notations et définitions . . . . .	43
2.3.2	Convergence . . . . .	43
2.4	La formule d'Itô . . . . .	46
2.5	Intégrale de Wiener . . . . .	49
2.6	Formule d'Itô pour d'autres processus . . . . .	51
2.6.1	Le cas unidimensionnel . . . . .	51
2.6.2	Le cas multidimensionnel . . . . .	54
2.7	Mouvement brownien vectoriel . . . . .	57
2.7.1	Mouvement brownien vectoriel standard . . . . .	57
2.7.2	Mouvement brownien vectoriel corrélé . . . . .	59
2.8	Exercices . . . . .	62
<b>3</b>	<b>Quelques processus continus essentiels</b>	<b>69</b>
3.1	Mouvement brownien géométrique . . . . .	69
3.1.1	Définition et propriétés . . . . .	69
3.1.2	Équation aux dérivées partielles pour le mouvement brownien géométrique . . . . .	71
3.1.3	Formule d'Itô pour le mouvement brownien géométrique . . . .	71
3.2	Processus d'Ornstein-Uhlenbeck . . . . .	72
3.2.1	Le mouvement brownien physique ou processus d'Ornstein- Uhlenbeck . . . . .	72
3.2.2	Propriétés du processus d'Ornstein-Uhlenbeck . . . . .	73
3.2.3	EDP associée au processus d'Ornstein-Uhlenbeck . . . . .	76
3.3	Equations différentielles stochastiques . . . . .	77
3.3.1	Définition . . . . .	77
3.3.2	La transformation de Lamperti (1964) . . . . .	78
3.3.3	La représentation de Doss (1977) . . . . .	80
3.4	Exercices . . . . .	81
<b>4</b>	<b>Processus à sauts</b>	<b>85</b>
4.1	Processus de Poisson composé . . . . .	85
4.2	Modèle mixte brownien-Poisson . . . . .	87
4.2.1	Définitions . . . . .	87
4.2.2	Propriétés . . . . .	88
4.3	Équation de la chaleur intégro-différentielle . . . . .	90



4.3.1	Modèle mixte brownien-Poisson arithmétique . . . . .	90
4.3.2	Modèle mixte brownien-Poisson géométrique . . . . .	93
4.4	Formule d'Itô . . . . .	94
4.4.1	Notations sur les sauts . . . . .	94
4.4.2	Formule d'Itô . . . . .	94
4.4.3	Applications au processus mixte brownien-Poisson géométrique	96
4.5	Exercices . . . . .	97
<b>5</b>	<b>Changements de probabilité</b>	<b>99</b>
5.1	Généralités . . . . .	99
5.1.1	Notions élémentaires et exemples . . . . .	99
5.1.2	Changement de probabilité et changement de tribus . . . . .	101
5.2	Modèles gaussiens . . . . .	102
5.2.1	Le cas des gaussiennes réelles . . . . .	102
5.2.2	Le cas vectoriel . . . . .	104
5.2.3	La formule de Cameron-Martin . . . . .	105
5.2.4	Un exemple d'application statistique . . . . .	107
5.3	Modèles poissonniens . . . . .	109
5.4	Modèles mixtes browniens-Poisson . . . . .	110
5.5	Exercices . . . . .	111
<b>6</b>	<b>Marchés financiers et produits dérivés</b>	<b>113</b>
6.1	Un peu d'histoire . . . . .	114
6.1.1	De l'Antiquité au XIX <sup>e</sup> siècle . . . . .	114
6.1.2	Le bouleversement des années 70 . . . . .	114
6.2	Produits dérivés . . . . .	116
6.2.1	Un peu de typologie . . . . .	116
6.2.2	Mais encore... . . . .	117
6.2.3	Les dérivés de crédit . . . . .	119
6.2.4	Utilisation et utilité des produits dérivés . . . . .	119
6.3	Le vendeur d'options : quelle gestion du risque? . . . . .	120
6.4	Hypothèses de la gestion dynamique efficace . . . . .	121
<b>7</b>	<b>Couverture à la Black-Scholes-Merton</b>	<b>125</b>
7.1	Marché sans friction et absence d'arbitrage . . . . .	125
7.2	Modélisation probabiliste du marché . . . . .	130
7.2.1	Espace de probabilité et mouvement brownien . . . . .	130
7.2.2	Modélisation du titre sous-jacent . . . . .	130
7.3	Portefeuille dynamique . . . . .	131
7.3.1	Portefeuille de couverture . . . . .	132

7.3.2	Traduction du problème de couverture parfaite de l'option . . .	134
7.3.3	Résolution par équation aux dérivées partielles . . . . .	134
7.4	La formule de Black et Scholes . . . . .	135
7.4.1	Résolution de l'EDP par la formule de Feynman-Kac . . . . .	135
7.4.2	Une ré-interprétation avec un point de vue risque-neutre . . . .	137
7.4.3	Les formules fermées . . . . .	138
7.4.4	Les grecques . . . . .	139
7.4.5	Résultats numériques . . . . .	140
7.5	Le cas de titres versant des dividendes . . . . .	141
7.5.1	Le cas de titres versant un taux de dividende continu . . . . .	142
7.5.2	Le cas de titres versant des dividendes discrets . . . . .	144
7.6	Exercices . . . . .	147
<b>8</b>	<b>Mise en pratique</b>	<b>155</b>
8.1	Estimation de la volatilité . . . . .	155
8.1.1	Volatilité historique . . . . .	155
8.1.2	Volatilité implicite . . . . .	156
8.1.3	Conclusion . . . . .	158
8.2	Couverture dynamique . . . . .	158
8.3	Volatilité implicite et Risk-Management . . . . .	159
<b>9</b>	<b>Au delà des options d'achat et de vente</b>	<b>163</b>
9.1	Options barrières . . . . .	163
9.1.1	Introduction . . . . .	163
9.1.2	EDP et espérance risque-neutre . . . . .	164
9.1.3	Prix des DIC regular ( $D \leq K$ ) dans le cas $\gamma = 1$ ( $r = q$ ) . . . .	166
9.1.4	Prix des DIC regular ( $D \leq K$ ) dans le cas général . . . . .	167
9.1.5	Prix des DIC reverse ( $D > K$ ) . . . . .	168
9.2	Taux d'intérêt : modèle de Vasicek . . . . .	169
9.2.1	Obligation zéro-coupon . . . . .	170
9.2.2	Le modèle de Vasicek [32] pour le taux court . . . . .	170
9.2.3	Propriétés de $(r_t)_t$ . . . . .	171
9.2.4	Prix des zéro-coupons . . . . .	172
9.2.5	Courbe des taux . . . . .	173
9.2.6	Modèle de Hull-White à 1 facteur . . . . .	174
9.3	Risque de crédit : modèles structurels . . . . .	175
9.3.1	Modèle de la firme de Merton . . . . .	175
9.3.2	Extensions du modèle de la firme . . . . .	179
9.4	Options lookback . . . . .	180
9.5	Call sur zéro-coupon dans un modèle de Vasicek . . . . .	181

9.6 Exercices . . . . .	183
<b>10 Modèles financiers avec sauts</b>	<b>187</b>
10.1 Modèle mixte brownien-Poisson géométrique . . . . .	187
10.1.1 Modèle de Merton [23] . . . . .	188
10.1.2 Modèle de Kou et Wang [18] . . . . .	189
10.2 Couverture d'option . . . . .	190
10.2.1 Les sauts comme nouvelles sources de risque . . . . .	190
10.2.2 Couverture parfaite dans le cas d'un nombre fini de sauts possibles	190
10.2.3 Couverture imparfaite en moyenne quadratique . . . . .	193
10.3 Formule de Merton pour les Calls . . . . .	195
10.4 Exercices . . . . .	197
<b>A Appendices</b>	<b>203</b>
A.1 A propos des gaussiennes . . . . .	203
A.1.1 Variables gaussiennes . . . . .	203
A.1.2 Vecteurs gaussiens . . . . .	204
A.1.3 Processus gaussien . . . . .	204
A.2 Quelques rappels de théorie de l'intégration . . . . .	205
A.2.1 Tribus et variables aléatoires . . . . .	205
A.2.2 Mesures et distributions de probabilité . . . . .	205
A.2.3 Indépendance et conditionnement . . . . .	206
A.2.4 Fonctions aléatoires et loi temporelle . . . . .	207
A.3 Formule de Lévy-Khintchine . . . . .	208
A.4 Simulation . . . . .	208
A.4.1 Simulation de variables aléatoires . . . . .	208
A.4.2 Calcul d'espérance par méthode de Monte Carlo . . . . .	210
<b>B Correction des exercices</b>	<b>213</b>

ECOLE POLYTECHNIQUE  
ECOLE POLYTECHNIQUE  
ECOLE POLYTECHNIQUE

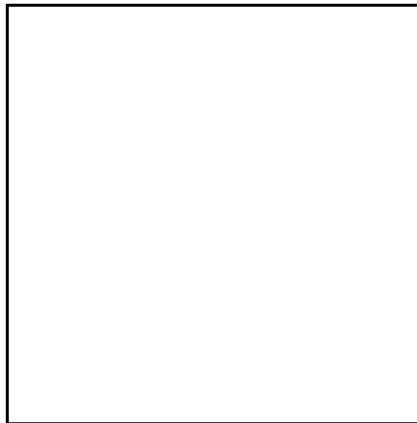
LES OUTILS STOCHASTIQUES DES MARCHÉS FINANCIERS

# Chapitre 1

## Le mouvement brownien

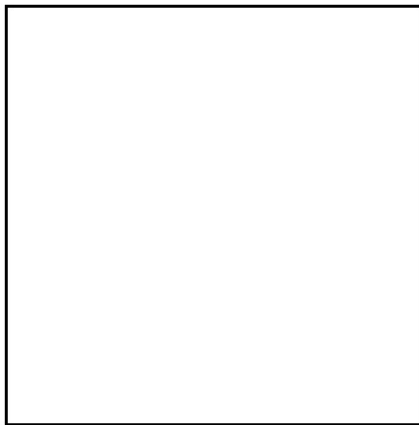
### 1.1 Bref historique du mouvement brownien

Historiquement, le mouvement brownien est associé à l'analyse de mouvements qui évoluent au cours du temps de manière si désordonnée qu'il semble difficile de prévoir leur évolution, même dans un intervalle de temps très court. Il joue un rôle central dans la théorie des processus aléatoires, parce que dans de nombreux problèmes théoriques ou appliqués, le mouvement brownien ou les diffusions que l'on en déduit fournissent des modèles limites simples sur lesquels de nombreux calculs peuvent être faits.



Robert Brown (1773-1858)

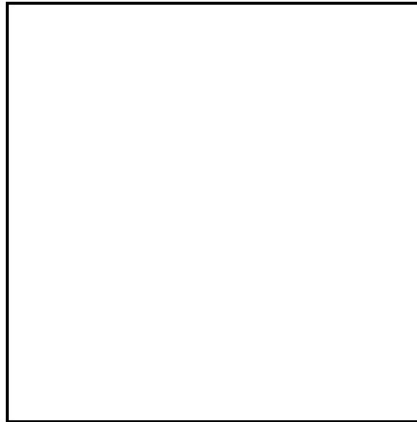
C'est le botaniste anglais Robert Brown (1773-1858) qui le premier décrit en 1827 le mouvement erratique de fines particules organiques en suspension dans un gaz ou un fluide. Au XIX<sup>e</sup> siècle, après lui, plusieurs physiciens reconnaissent que ce mouvement est très irrégulier et ne semble pas admettre de tangente; on ne pourrait donc pas parler de sa vitesse, ni a fortiori lui appliquer les lois de la mécanique!



Louis Bachelier (1870-1946)

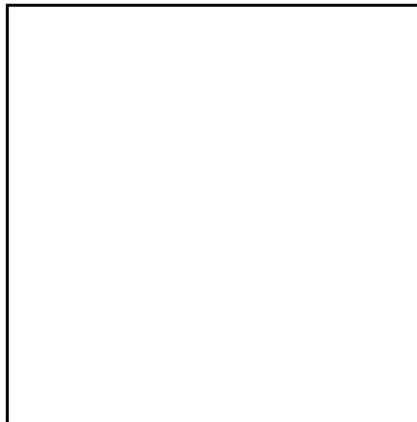
En 1900 [1], Louis Bachelier (1870-1946) introduit le mouvement brownien pour modéliser la dynamique des prix des actions à la Bourse, mais sa démarche est ensuite oubliée jusque vers les années 1960... Sa thèse, “Théorie de la spéculation” est le point de départ de la finance moderne.

Mais c'est la physique du début du siècle qui est à l'origine du grand intérêt porté à ce processus. En 1905, Albert Einstein (1879-1955) construit un modèle probabiliste pour décrire le mouvement d'une particule qui diffuse : il trouve que la loi de la position à l'instant  $t$  de la particule, sachant que l'état initial est  $x$  admet une densité qui vérifie l'équation de la chaleur et de ce fait est gaussienne. Sa théorie sera rapidement confortée par des mesures expérimentales de constantes de diffusion satisfaisantes. La même année qu'Einstein, une version discrète du mouvement brownien est proposée par le physicien polonais Smoluchowski à l'aide de promenades aléatoires.



Norbert Wiener<sup>1</sup> (1894-1964).

En 1923, Norbert Wiener (1894-1964) construit rigoureusement “la fonction aléatoire” du mouvement brownien ; il établit en particulier que les trajectoires sont continues. Dès 1930, en suivant une idée de Paul Langevin, Ornstein et Uhlenbeck étudient la fonction aléatoire gaussienne qui porte leur nom et qui apparaît comme la situation d’équilibre naturelle à associer au mouvement brownien.



Paul Lévy<sup>2</sup> (1886-1971)

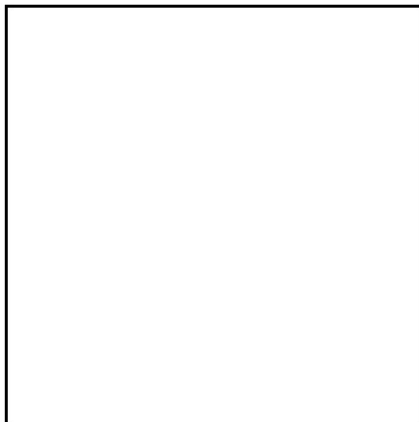
C’est le début d’une recherche mathématique théorique très active. Paul Lévy (1886-1971) découvre ensuite, avec d’autres mathématiciens, de nombreuses propriétés du mouvement brownien [20] et introduit une première forme des équations diffé-

---

1. Source : archives du "Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach"

2. Source : archives du "Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach"

rentielles stochastiques, dont l'étude sera ensuite systématisée par K. Itô (1915-2008) ; ses travaux sont rassemblés dans un traité paru en 1948 devenu très célèbre [16].



Kiyosi Itô<sup>3</sup> (1915-2008)

Mais l'Histoire connaît parfois des rebondissements incroyables. En effet en 2000, l'Académie des Sciences a ouvert un pli resté scellé depuis 1940 appartenant au jeune mathématicien Doebelin (1915-2008), télégraphiste français mort pendant l'offensive allemande. Ce pli regroupait en fait ses recherches récentes, rédigées sur un simple cahier d'écolier depuis son camp de cantonnement entre novembre 1939 et février 1940. A l'ouverture de ce pli, il a été réalisé que Doebelin, qui avait déjà marqué la théorie des probabilités par ses travaux remarquables sur les lois stables et les processus de Markov, avait découvert avant Itô les équations différentielles stochastiques et leurs liens avec les équations aux dérivées partielles de Kolmogorov. Le calcul d'Itô aurait pu peut-être s'appeler calcul de Doebelin...

Dans ce chapitre, nous étudions les propriétés de base du mouvement brownien et de ses trajectoires.

## 1.2 Le mouvement brownien et ses trajectoires

La première observation qui conduit à la modélisation par un mouvement brownien est celle de la trajectoire du phénomène étudié, c'est à dire de la fonction réelle ou vectorielle qui décrit l'évolution au cours du temps de l'observation. Le caractère continu mais très erratique est caractéristique de la trajectoire brownienne.

---

3. Source : archives du "Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach"



**Quelques précisions :**

Par définition, une **fonction aléatoire** (réelle ou vectorielle) (f.a. en abrégé) modélise un phénomène dépendant du hasard, qui évolue au cours du temps. Par conséquent, si  $\mathbf{T}$  est l'espace des temps,  $\Omega$  l'espace des épreuves et  $E$  l'espace d'états du phénomène, en général  $\mathbb{R}$  ou  $\mathbb{R}^d$ ), une fonction aléatoire est une application de  $\mathbf{T} \times \Omega$  dans  $E$ ,

$$(t, \omega) \rightarrow X_t(\omega) \quad t \in \mathbf{T}, \omega \in \Omega$$

Processus aléatoire, signal aléatoire en sont synonymes.

L'**état du système** à la date  $t$  est décrit par la v.a.  $X_t$ .

On appelle **trajectoire** la fonction de  $\mathbf{T}$  dans  $E$ , obtenue en fixant  $\omega$ ,

$$t \rightarrow X_t(\omega) \quad t \in \mathbf{T} \quad (1.2.1)$$

En général, les phénomènes que nous modéliserons auront des trajectoires continues, ou à variations finies.

**Exemple**

Si  $A_1, \dots, A_n, \varphi_1, \dots, \varphi_n$  sont  $n$  variables aléatoires réelles (v.a.r.) positives et  $n$  angles aléatoires définis sur un espace  $(\Omega, \mathcal{A})$ , la formule

$$S_t(\omega) = \sum_1^n A_m(\omega) \sin[2\pi f_m t + \varphi_m(\omega)]$$

définit un signal aléatoire réel, dépendant du temps  $t \in \mathbb{R}$ , dont les trajectoires sont une superposition de sinusoides de fréquences  $f_m$  fixes ( $f_m \in \mathbb{R}$ ); les phases et les amplitudes sont aléatoires. Les signaux aléatoires de ce type, servent à étudier les phénomènes de bruit dans la transmission d'ondes radar, ou des phénomènes oscillatoires de consommation en économie.

**1.2.1 Définition**

Le caractère très erratique des trajectoires qui est propre au mouvement brownien est en général associé à l'observation que le phénomène, bien que très désordonné, présente une certaine homogénéité dans le temps, au sens où la date d'origine des observations n'a pas d'importance. Ces propriétés sont reprises dans la définition.

**Définition 1.2.1 (du mouvement brownien standard)** *Un mouvement brownien (standard) réel (sur  $\mathbf{T} = \mathbb{R}^+$  ou  $[0, T]$ ) est une f.a.r.  $\{W_t; t \in \mathbf{T}\}$  à trajectoires continues, telle que*

- $W_0 = 0$ ;
- Tout accroissement  $W_t - W_s$  où  $(0 \leq s < t)$  suit une loi gaussienne centrée, de variance  $(t - s)$ .

– Pour tous  $0 = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_n$ , les accroissements  $\{W_{t_{i+1}} - W_{t_i}; 0 \leq i \leq n - 1\}$  sont indépendants.

**Remarques** Il y a beaucoup d'informations dans cette définition qui demandent à être détaillées.

1. **L'état du système** à la date  $t$ ,  $W_t$ , est une v.a. gaussienne, de moyenne 0, ( $\mathbb{E}(W_t) = 0$ ), et de variance  $\mathbb{E}(W_t^2) = t$  d'autant plus grande que le système a évolué longtemps.
2. La probabilité pour que  $W_t$  appartienne à un petit intervalle  $[x, x + dx]$  est donnée par la **densité gaussienne**

$$\mathbb{P}(W_t \in [x, x + dx]) = g(t, x)dx = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-x^2/2t)dx \quad (1.2.2)$$

En particulier, avec une probabilité d'au moins 95%,  $|W_t| \leq 2\sqrt{t}$  (voir Figure 1.1). Cela n'exclut pas qu'au bout d'un temps très court on ait un grand mouvement, mais cela est peu probable. Ce genre d'encadrement joue un très grand rôle en finance.

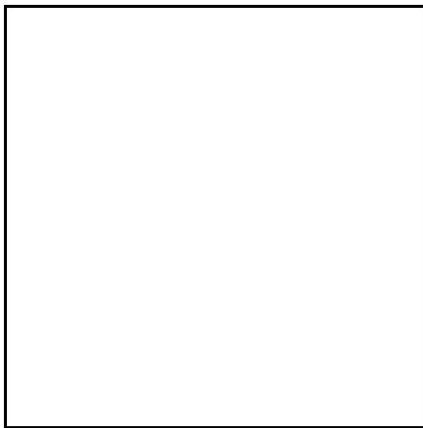


FIGURE 1.1 – Simulation brownienne et les deux courbes  $f_1(t) = 2\sqrt{t}$  et  $f_2(t) = -2\sqrt{t}$ .

---

4. Cette propriété est la conséquence d'un résultat classique sur les gaussiennes, de loi  $N(m, \sigma^2)$

$$\mathbb{P}(-2\sigma \leq X - m \leq 2\sigma) \geq 0,95.$$

3. La v.a.  $W_t$  est la somme de ses accroissements, c'est à dire la somme de v.a. indépendantes et de même loi gaussienne. Cette décomposition infinitésimale est à la base du calcul différentiel stochastique.

## 1.2.2 Propriétés de la courbe brownienne

Nous commençons par quelques propriétés qualitatives de la courbe brownienne, que nous justifions à la fin du chapitre.

1. La trajectoire brownienne entre  $[0, T]$  est comprise entre les deux courbes  $f_1(t) = 2\sqrt{t}$  et  $f_2(t) = -2\sqrt{t}$  avec une probabilité de 90%<sup>5</sup> : la figure 1.1 montre un exemple typique.
2. La trajectoire brownienne oscille entre  $+\infty$  et  $-\infty$ , mais moins vite que  $t$ .
3. Les trajectoires sont très irrégulières, p.s. non différentiables.

Suivent quelques propriétés d'invariance, classiques et très utiles (l'invariance par translation sera développée au prochain paragraphe).

### Proposition 1.2.2

i) PROPRIÉTÉS DE SYMÉTRIE

Si  $\{W_t; t \in \mathbb{R}^+\}$  est un mouvement brownien standard, il en est de même de  $\{-W_t; t \in \mathbb{R}^+\}$ .

ii) PROPRIÉTÉS D'ÉCHELLE

Si  $\{W_t; t \in \mathbb{R}^+\}$  est un mouvement brownien, pour tout  $c > 0$ , il en est de même du processus  $\{W_t^c; t \in \mathbb{R}^+\}$

$$W_t^c = c^{-1}W_{c^2t}. \quad (1.2.3)$$

iii) RETOURNEMENT DU TEMPS

Le processus retourné à l'instant  $T$ ,  $\widehat{W}_t^T = W_T - W_{T-t}$  est un mouvement brownien sur  $[0, T]$ .

iv) INVERSION DU TEMPS

Le processus  $\{\widehat{W}_t = tW_{1/t}, t > 0, \widehat{W}_0 = 0\}$  est un mouvement brownien.

La propriété d'échelle est particulièrement importante. Elle montre que  $\varepsilon$  fois  $W_t$  se comporte comme un mouvement brownien lu en  $\varepsilon^2t$ . Elle montre aussi la dimension fractale des trajectoires. Cet effet est visible sur les simulations.

**Preuve :**

5. En fait, on a le résultat beaucoup plus fort,

$$\mathbb{P}[\sup_{t \leq T} |W_t| \geq c] \leq 2 \mathbb{P}(|W_T| \geq c).$$

que nous montrerons dans la Proposition 1.3.8.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

## 1.3 Invariance par translation et propriétés de Markov

### 1.3.1 Mouvement brownien avec dérive

Pour commencer, il sera intéressant de pouvoir considérer des mouvements browniens ayant une valeur initiale différente de 0, éventuellement aléatoire.

**Définition 1.3.1 (du mouvement brownien issu de  $X_0$ )** *Un mouvement brownien issu de  $X_0$  est un processus de la forme  $X_t = X_0 + W_t$ , avec une condition initiale  $X_0$  indépendante du brownien  $W$ .*

Dans beaucoup de situations, la valeur initiale  $X_0 = x$  sera déterministe. Plus généralement, les phénomènes observés ne sont pas aussi normalisés que ceux décrits par un mouvement brownien standard.

**Définition 1.3.2 (du mouvement brownien avec dérive)** *Un mouvement brownien, issu de  $X_0$ , de dérive (ou tendance)  $b$  et de coefficient de diffusion  $\sigma$  est un processus de la forme  $X_t = X_0 + \sigma W_t + bt$ , avec une condition initiale  $X_0$  indépendante du brownien  $W$  (voir Figure 1.2, avec  $X_0 = 0$  et  $\sigma = 1$ ).*

$X$  est aussi appelé mouvement brownien arithmétique (dénomination à mettre en rapport avec celle du mouvement brownien géométrique, voir chapitre 3). C'est encore un processus à accroissements indépendants, stationnaires et gaussiens, mais non centrés.

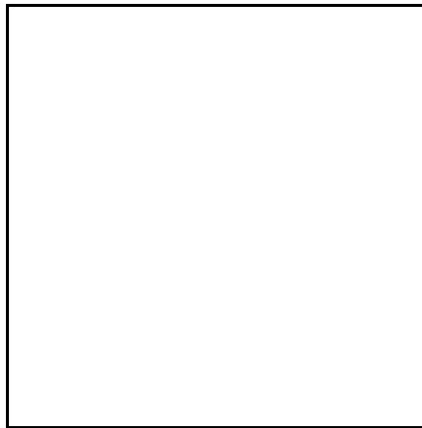


FIGURE 1.2 – Simulation brownienne avec dérive.

Toutefois, sauf mention contraire explicite,  $W_t$  désignera dans la suite un mouvement brownien standard.

### 1.3.2 Un premier résultat d'invariance par translation

Après avoir considéré dans le paragraphe précédent des transformations spatiales du mouvement brownien, nous étudions maintenant des translations en temps.

**Proposition 1.3.3 (Invariance par translation)** *Le mouvement brownien translaté de  $h \geq 0$ ,  $\{\bar{W}_t^h = W_{t+h} - W_h; t \in \mathbb{R}^+\}$  est un mouvement brownien, indépendant du mouvement brownien arrêté en  $h$ ,  $\{W_s; s \leq h\}$ .*

*Autrement dit,  $\{W_{t+h} = W_h + \bar{W}_t^h; t \in \mathbb{R}^+\}$  est un mouvement brownien issu de  $W_h$ .*

**Remarque :** ce résultat est associé à la **propriété de Markov faible**<sup>6</sup> puisqu'il est établi que la loi du futur de  $W$  après  $h$  ne dépend du passé que par la valeur présente  $W_h$ .

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

### 1.3.3 Le principe de symétrie : une version simplifiée

Le premier résultat donne une majoration de la distribution du maximum du mouvement brownien constaté à un nombre fini de dates  $t_0 = 0 < t_1 < \dots < t_N = T$ , majoration qui ne dépend pas de la subdivision mais uniquement du temps final  $T$ .

**Proposition 1.3.4** *Pour tout  $y \geq 0$ , on a :*

$$\mathbb{P}[\sup_{i \leq N} W_{t_i} \geq y] \leq 2\mathbb{P}[W_T \geq y] = \mathbb{P}[|W_T| \geq y]. \quad (1.3.1)$$

---

6. l'adjectif faible est là pour indiquer que l'instant  $h$  est déterministe, en contraste avec la propriété de Markov forte (montrée dans la suite) valable si  $h$  est un temps d'arrêt.

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

Passons maintenant à un ensemble de constatations égal à  $[0, T]$ . Dans ce cas, la majoration de la proposition 1.3.4 devient une égalité. En d'autres termes, nous déterminons complètement la loi du maximum du mouvement brownien sur un intervalle de type  $[0, T]$ . L'argumentation de la preuve tourne encore autour d'un argument d'invariance par translation du type précédent, mais le lecteur attentif pourra déceler une faille dans sa justification, à laquelle nous remédierons juste après.

**Proposition 1.3.5 (Principe de symétrie)** *Pour tout  $y \geq 0$ , on a :*

$$\mathbb{P}[\sup_{t \leq T} W_t \geq y] = \mathbb{P}[|W_T| \geq y]. \quad (1.3.2)$$

*En d'autres termes, pour chaque  $T$ , les variables aléatoires  $\sup_{t \leq T} W_t$  et  $|W_T|$  ont même loi.*

---

7. Il convient de noter qu'on ne peut pas avoir égalité en loi des f.a.  $\{\sup_{t \leq T} W_t; T \in \mathbb{R}^+\}$  et  $\{|W_T|; T \in \mathbb{R}^+\}$  puisque la première est croissante mais pas la seconde.

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

En réalité, ce qui demande à être justifié plus précisément dans la preuve précédente, est le fait que  $(\bar{W}_t^{T_y} : t \in \mathbb{R}^+)$  soit encore un mouvement brownien. En effet, l'invariance par translation et la propriété de Markov ont été jusqu'à maintenant démontrées pour des temps  $h$  déterministes.

Il s'agit maintenant de les généraliser au cas où le temps  $h$  est aléatoire. Il est facile de se convaincre que cette propriété  $\{\bar{W}_t^U = W_{t+U} - W_U; t \in \mathbb{R}^+\}$  est encore un mouvement brownien ne peut pas être satisfaite pour n'importe quel temps  $U$  aléatoire. Néanmoins, cette propriété d'invariance par translation reste vraie pour une vaste classe de temps aléatoires  $U$  : les *temps d'arrêt*.

#### 1.3.4 Temps d'arrêt

Nous nous intéressons maintenant aux temps d'arrêt : ils joueront dans toute la suite un rôle essentiel. Nous les définissons sans formalisme (pour une présentation



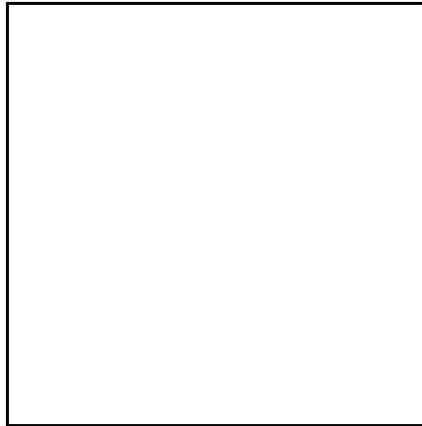


FIGURE 1.3 – Mouvement brownien ( $W_{T_y+t} = \bar{W}_t^{T_y} + y : t \in \mathbb{R}^+$ ) partant de  $y$  et son symétrique.

rigoureuse à l'aide des filtrations, voir [27] par exemple).

### Définition 1.3.6 (Temps d'arrêt)

Un temps d'arrêt (t.a.) est une v.a.  $U \geq 0$ , à valeurs éventuellement infinies, telle que pour tout  $t \geq 0$ , l'évènement  $\{U \leq t\}$  ne dépend que des valeurs du mouvement brownien  $\{W_s; s \leq t\}$  avant la date  $t$ .

Un temps d'arrêt  $U$  est discret lorsqu'il ne prend qu'un nombre dénombrable de valeurs  $(u_1, \dots, u_n, \dots)$ .

En d'autres termes, pour savoir si l'évènement  $\{U \leq t\}$  s'est produit, il suffit d'observer le mouvement brownien jusqu'en  $t$ .

#### Exemple.

- L'exemple le plus classique de t.a. est le premier temps de passage du brownien au dessus d'un niveau donné :

$$T_y = \inf\{t > 0; W_t \geq y\}$$

où on fait la convention habituelle que l'inf du vide est infini.

La continuité des trajectoires browniennes assure que l'évènement  $\{T_y \leq t\} = \{\exists s \leq t, W_s = y\}$  ne dépend que des valeurs de  $W$  antérieures à  $t$  :  $T_y$  est donc un t.a..

- En revanche, si  $U = \sup\{t \leq 1 : W_t = 0\}$  est défini comme le dernier instant avant 1 où le mouvement brownien s'annule, ce n'est pas un t.a. car l'évènement  $\{U \leq t\}$  fait appel non seulement à de l'information entre 0 et  $t$ , mais aussi entre  $t$  et 1.

### 1.3.5 Le résultat général d'invariance par translation

**Proposition 1.3.7** *Soit  $U$  un temps d'arrêt. Sur l'évènement  $\{U < +\infty\}$ , le mouvement brownien translaté de  $U \geq 0$ ,  $\{\bar{W}_t^U = W_{t+U} - W_U; t \in \mathbb{R}^+\}$  est un mouvement brownien, indépendant de  $\{W_t; t \leq U\}$ .*

*En d'autres termes,  $\{W_{t+U}; t \in \mathbb{R}^+\}$  est un mouvement brownien issu de  $W_U$ .*

**Remarque :** ce résultat s'énonce sous le nom de **propriété de Markov forte**. Comme on l'a vu précédemment pour la version simplifiée du principe de symétrie (Proposition 1.3.5), cette propriété est facile à comprendre intuitivement lorsque  $U = T_y$  est le temps d'atteinte du niveau  $y$  : dans ce cas,  $W_{T_y} = y$  et la f.a.  $\{W_{t+T_y}; t \in \mathbb{R}^+\}$  est un mouvement brownien issu de  $y$  (voir Figure 1.3).

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

### 1.3.6 Application

Nous sommes maintenant en mesure de montrer plus rigoureusement le principe de symétrie sous une forme plus générale.

**Proposition 1.3.8 (Principe de symétrie)**

a) Pour tout  $y \geq 0$  et tout  $x \leq y$ , on a :

$$\mathbb{P}[\sup_{t \leq T} W_t \geq y; W_T \leq x] = \mathbb{P}[W_T \geq 2y - x], \quad (1.3.3)$$

$$\mathbb{P}[\sup_{t \leq T} W_t \geq y] = \mathbb{P}[|W_T| \geq y]. \quad (1.3.4)$$

b) La loi conditionnelle de  $\sup_{t \leq T} W_t$  sachant  $W_T$  est donnée pour  $y \geq \max(x, 0)$  par

$$\mathbb{P}(\sup_{t \leq T} W_t \geq y | W_T = x) = \exp\left(-2\frac{y(y-x)}{T}\right). \quad (1.3.5)$$

La simplicité de la loi conditionnelle du supremum est particulièrement utile pour sa simulation.

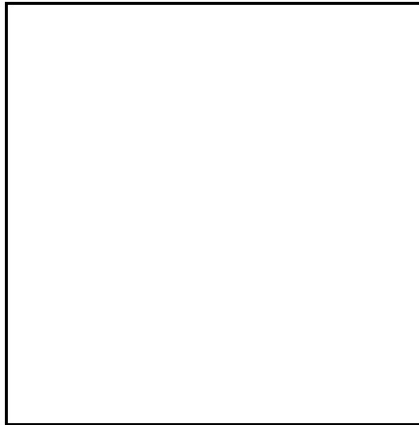


FIGURE 1.4 – Mouvement brownien ( $W_{T_y+t} = \bar{W}_t^{T_y} + y; t \in \mathbb{R}^+$ ) partant de  $y$  et son symétrie.

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

◆ ◆  
**POUR EN SAVOIR PLUS**  
◆

## 1.4 Propriétés de la courbe brownienne

Les résultats de ce paragraphe fournissent les preuves des propriétés de la courbe brownienne que nous avons énoncées au paragraphe 1.2.2. Beaucoup d'entre elles se déduisent de la décomposition infinitésimale.

Le premier point est évidemment le comportement à l'infini. Pour les points à distance finie, puisque la continuité est acquise, il s'agit d'estimer le module de continuité.

### 1.4.1 Comportement à l'infini

**Proposition 1.4.1** *Le mouvement brownien oscille entre  $+\infty$  et  $-\infty$  lorsque le temps augmente indéfiniment, c'est à dire que*<sup>8</sup>

$$p.s. \quad \limsup_{t \rightarrow +\infty} W_t = +\infty, \quad \liminf_{t \rightarrow +\infty} W_t = -\infty.$$

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

La loi des grands nombres nous donne une information sur la vitesse de convergence le long des suites entières. En effet, puisqu'on peut toujours décrire la v.a.  $W_n$  comme somme des accroissements  $W_i - W_{i-1}$ , qui sont des v.a. indépendantes et de même loi (intégrables), la loi des grands nombres montre que  $\frac{W_n}{n}$  converge presque sûrement

---

8. Rappelons que

$$\limsup_{t \rightarrow +\infty} f(t) = \lim_{t \rightarrow +\infty} \sup_{u \geq t} f(u).$$

(p.s.) vers 0. Cette propriété reste vraie même si on ne se restreint pas aux suites entières.

**Proposition 1.4.2** *La vitesse de divergence est moins grande que celle de  $t$ ,*

$$\frac{W_t}{t} \rightarrow 0, \quad p.s. \ t \rightarrow +\infty$$

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

### 1.4.2 Irrégularité des trajectoires

Le premier point est que p.s. les trajectoires ne sont pas différentiables. Comme un changement d'échelle permet d'établir une correspondance entre le comportement à l'infini et le comportement en 0 des courbes browniennes, ce point est en rapport avec le comportement à l'infini du mouvement brownien.

**Proposition 1.4.3** *Le processus  $\{\widehat{W}_t = tW_{1/t}, t > 0, \widehat{W}_0 = 0\}$  est un mouvement brownien.*

*En particulier, le mouvement brownien n'est pas dérivable en zéro, et donc par stationnarité en aucun point. Plus précisément,*

$$\limsup_{h \downarrow 0} \left| \frac{W_{t+h} - W_t}{h} \right| = +\infty \quad p.s.$$

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

Le résultat précédent dit seulement que pour un temps  $t$  donné, p.s.  $W$  n'est pas dérivable en ce temps là. Mais l'ensemble de probabilité nulle dépend de  $t$ , ce qui ne permet pas d'affirmer que

$$\mathbb{P}(\omega : \exists t_0 \text{ tel que } t \mapsto W_t(\omega) \text{ est différentiable en } t_0) = 0,$$

c'est à dire que p.s.  $W$  n'est nulle part différentiable. Toutefois, ce résultat est vrai et est du initialement à Paley-Wiener-Zygmund (1933). Le résultat suivant est de même nature : il affirme que p.s., il n'existe pas d'intervalle sur lequel  $W$  est monotone.

**Proposition 1.4.4 (absence de monotonie)** *On a*

$$\mathbb{P}(\omega : t \mapsto W_t(\omega) \text{ est monotone sur un intervalle}) = 0.$$

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

Il est possible d'obtenir une description très précise du comportement du mouvement brownien au voisinage de l'origine. Pour un  $t$  fixé, nous savons bien que  $W_t$  est dans l'intervalle  $[-1.96\sqrt{t}, 1.96\sqrt{t}]$  avec probabilité 95%, mais cela ne décrit pas comment toute la trajectoire au voisinage de 0 est encadrée. En réalité, avec probabilité 1, elle s'approche infiniment souvent de la courbe  $h(t) = \sqrt{2t \log \log t^{-1}}$  et  $-h(t)$ . C'est le résultat suivant.

**Proposition 1.4.5 (loi dite du logarithme itéré)** *Pour un brownien standard, nous avons*

$$\limsup_{t \downarrow 0} \frac{W_t}{h(t)} = 1 \quad p.s. \quad \text{et} \quad \liminf_{t \downarrow 0} \frac{W_t}{h(t)} = -1 \quad p.s.$$



Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

### 1.4.3 Les zéros du mouvement brownien

L'étude précédente du comportement de  $W$  à l'origine montre qu'en particulier, il passe infiniment souvent par 0 au voisinage de l'origine. Cela suggère que les zéros du mouvement brownien ont une structure assez complexe.

**Proposition 1.4.6 (zéros du mouvement brownien)** *Notons  $\chi = \{t \geq 0 : W_t = 0\}$  l'ensemble aléatoire des zéros de  $W$ . Alors avec probabilité 1 :*

- a) *la mesure de Lebesgue de  $\chi$  est nulle ;*
- b)  *$\chi$  est un ensemble fermé non borné ;*
- c)  *$t = 0$  est un point d'accumulation de  $\chi$  ;*
- d)  *$\chi$  n'a pas de point isolé (en particulier il est non dénombrable), donc est dense dans lui-même.*

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

## 1.5 Construction du mouvement brownien

Nous finissons ce chapitre par donner des constructions et approximations de la courbe brownienne. Ce paragraphe peut-être omis en première lecture. Nous commençons par voir le brownien comme la limite d'une marche aléatoire (utilisée dans les méthodes numériques de valorisation sous le nom de *méthodes d'arbre binomiale*), puis nous donnons la construction de Paul Lévy basée sur la notion de *pont brownien* (par ailleurs très utile en méthodes de Monte Carlo pour valoriser des contrats financiers complexes dépendant de toute la trajectoire). Nous terminerons par un point de vue *traitement du signal* avec une décomposition en série de Fourier.

### 1.5.1 L'approximation par marche aléatoire

Un des modèles les plus élémentaires de processus à temps discret est probablement la marche aléatoire symétrique définie par

$$S_n = \sum_{i=1}^n X_i$$

avec des v.a.i.i.d.  $(X_i)_i$  de Bernoulli  $\mathbb{P}(X_i = \pm 1) = \frac{1}{2}$ . Comme le mouvement brownien, c'est un processus à accroissements indépendants stationnaires, mais pas gaussiens. Quand on renormalise la marche et qu'on fait tendre  $n$  vers l'infini, on observe toutefois que  $\frac{S_n}{\sqrt{n}}$  converge en loi vers une gaussienne centrée de variance  $\text{Var}(X_1) = 1$ . Le fait que cela soit égal à la loi de  $W_1$  n'est pas une coïncidence, puisque nous allons justifier que la trajectoire de la marche aléatoire convenablement renormalisée converge vers celle d'un mouvement brownien (résultat connu sous théorème de Donsker, voir Breiman [3]), voir figure 1.5.

**Proposition 1.5.1** *Définissons  $(Y_t^n)_t$  le processus constant par morceaux*

$$Y_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i \leq [nt]} X_i. \quad (1.5.1)$$

*Le processus  $(Y_t^n)_t$  converge en loi vers un mouvement brownien  $(W_t)_t$  quand  $n$  tend vers l'infini. En particulier, pour toute fonctionnelle continue  $\Phi$ , on a*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E}(\Phi(Y_t^n : t \leq 1)) = \mathbb{E}(\Phi(W_t : t \leq 1)).$$

Le dernier résultat donne un moyen simple d'évaluer numériquement des espérances de fonctionnelles du mouvement brownien. C'est le principe des méthodes d'arbre binomiale (la terminologie binomiale provenant du fait que pour  $t$  fixé,  $Y_t^n$  a une distribution binomiale décalée).

**Preuve :**

Texte supprimé de la version électronique.

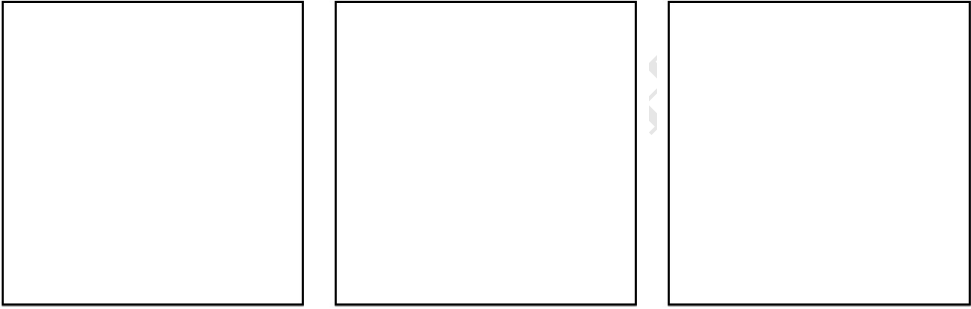


FIGURE 1.5 – La marche aléatoire renormalisée en temps et espace. De gauche à droite : le processus  $Y^n$  pour  $n = 50, 100, 200$ . Les parties de même type/couleur sur les graphes sont construites avec les mêmes  $X_i$ .

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

## 1.5.2 Pont brownien

Le pont brownien est un processus gaussien qui joue un très grand rôle dans les applications et les simulations numériques.

**Définition 1.5.2** Soit  $W$  un mouvement brownien standard. Le pont brownien entre 0 et 1 est le processus gaussien défini sur  $[0, 1]$  par

$$B_t^{0,1} = W_t - tW_1. \quad (1.5.2)$$

C'est un processus à trajectoires continues, qui vaut 0 aux temps 0 et 1. Sa fonction

de covariance est donnée, pour  $0 < s < t \leq 1$ ,

$$\text{Cov}(B_s^{0,1}, B_t^{0,1}) = s(1-t).$$

Plus généralement,  $B_t^{u,v}$  désigne le pont brownien entre  $u$  et  $v$ , c'est à dire un processus gaussien construit à partir de  $W$ , et contraint à valoir 0 en  $u$  et  $v$ , soit pour  $u < t < v$

$$B_t^{u,v} = (W_t - W_u) - \frac{t-u}{v-u}(W_v - W_u). \quad (1.5.3)$$

Sa fonction de covariance est alors égale pour  $u < s < t < v$  à

$$K(s, t) = \text{Cov}(B_s^{u,v}, B_t^{u,v}) = \frac{(s-u)(v-t)}{(v-u)}.$$

Pour comprendre l'importance du pont brownien, remarquons que le mouvement brownien conditionné à valoir 0 en 1 est un pont brownien.

### Proposition 1.5.3

1) Soit  $W$  un mouvement brownien standard. Le pont brownien  $B_t^{0,1} = W_t - tW_1$  est indépendant de  $W_1$ .

2) La loi conditionnelle de  $\{W_t; 0 < t < 1\}$  sachant que  $W_1 = y$  est la loi d'un pont brownien translaté de  $ty$ , c'est à dire la loi de  $B_t^{0,1} + ty$ . En particulier, la loi de  $\{W_t; 0 < t < 1\}$  sachant que  $W_1 = 0$  est celle du pont brownien.

3) Plus généralement,  $B_t^{u,v}$  est indépendant de  $(W_z; z \geq v)$ , et de  $(W_z; z \leq u)$  et pour  $u < t < v$

$$W_t = \frac{t-u}{v-u}W_v + \frac{v-t}{v-u}W_u + B_t^{u,v} \quad (1.5.4)$$

En particulier, si les intervalles  $([u_i, v_i])_{i \in I}$  sont disjoints, les ponts browniens  $(B^{u_i, v_i})_{i \in I}$  sont indépendants.

Preuve:

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

### 1.5.3 Convergence de l'approximation par pont brownien [0,1] : construction de Lévy

Dans cette section, nous détaillons la construction de Lévy du mouvement brownien, par pont brownien. Basée sur la décomposition (1.5.4), elle consiste à construire le mouvement brownien sur les dyadiques, en raffinant à chaque étape la représentation. Nous suivons de très près la présentation et les notations de S. Perez [25].

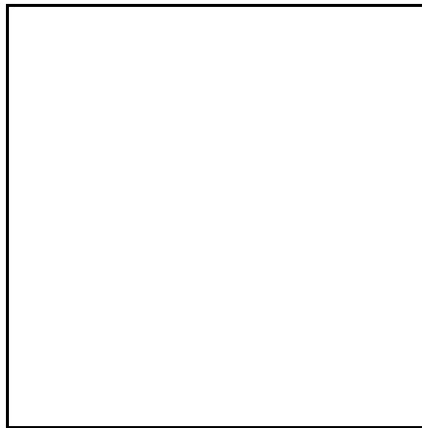


FIGURE 1.6 – Construction récursive du brownien par utilisation de ponts, pour  $n = 1, 2, 3, 4$ .

**Étude du mouvement brownien discrétisé sur les dyadiques.** Désignons par  $\mathbb{D}_n = \{k/2^n : 0 \leq k \leq 2^n\}$  l'ensemble des nombres dyadiques d'ordre  $n$ . Cet ensemble peut être vu comme un raffinement de l'ensemble des dyadiques d'ordre  $n-1$ , puisque un dyadique  $d$  d'ordre  $n$ , qui n'est pas d'ordre  $n-1$  est compris entre les deux dyadiques d'ordre  $n-1$ ,  $d^+ = d + 2^{-n}$  et  $d^- = d - 2^{-n}$  (voir la figure 1.6). D'après l'équation (1.5.4), il est nécessaire que

$$W_d = \frac{1}{2}(W_{d^+} + W_{d^-}) + B_d^{(d^+, d^-)}$$

où la v.a.  $B_d^{(d^+, d^-)}$  est gaussienne, de variance  $2^{-(n+1)}$ , indépendante de tout ce qui se passe en dehors de l'intervalle  $[d^-, d^+]$ .

**Construction par raffinement du mouvement brownien sur les nombres dyadiques.** Pour la construction, nous nous donnons donc une «base» de v.a. gaussiennes  $\mathcal{N}(0, 1)$  ( $Z_d; d \in \mathbb{D}$ ) indépendantes, qui jouent le rôle des v.a.  $B_d^{(d^+, d^-)}$  normalisées.

Soit  $W_0 = 0$  et  $W_1 = Z_1$ . Dans le procédé inductif, pour chaque  $n$  nous cherchons à construire  $W_d$  pour  $d \in \mathbb{D}_n$ , tel que

- Pour tout  $r < s < t$  dans  $\mathbb{D}_n$ , les accroissements gaussiens  $W_t - W_s$  sont indépendants de  $W_s - W_r$ ;
- $W_d$  pour  $d \in \mathbb{D}_n$  sont globalement indépendants de  $Z_d$  pour  $\mathbb{D} \setminus \mathbb{D}_n$ .

Supposons la construction faite jusqu'en  $n-1$ . Nous définissons pour tous les  $d \in \mathbb{D}_n \setminus \mathbb{D}_{n-1}$  la v.a.  $W_d$  par

$$W_d = \frac{1}{2}(W_{d^+} + W_{d^-}) + 2^{-\frac{(n+1)}{2}} Z_d. \quad (1.5.5)$$

Par construction  $\frac{1}{2}(W_{d^+} - W_{d^-})$  et  $2^{-\frac{(n+1)}{2}} Z_d$  sont des gaussiennes indépendantes de variance  $2^{-(n+1)}$ . Leur somme et leur différence  $W_d - W_{d^-}$  et  $W_{d^+} - W_d$  sont donc aussi des gaussiennes indépendantes mais de variance  $2^{-n}$ .

**Construction des courbes approximantes.** Nous donnons une représentation de la courbe approchée en interpolant entre les valeurs ( $W_d; d \in \mathbb{D}_n$ ) uniquement en termes de ( $Z_d; d \in \mathbb{D}_n$ ).

Formellement, cela revient à introduire les f.a.  $F_0(x) = xZ_1$  et pour  $n \geq 1$

$$F_n(x) = \begin{cases} 2^{-\frac{(n+1)}{2}} Z_d & \text{pour } x \in \mathbb{D}_n \setminus \mathbb{D}_{n-1}, \\ 0 & \text{pour } x \in \mathbb{D}_{n-1}, \\ \text{linéaire} & \text{pour deux points consécutifs de } \mathbb{D}_n. \end{cases}$$

Ces fonctions sont continues sur  $[0, 1]$  et pour tout  $n$  et  $d \in \mathbb{D}_n$

$$W_d = \sum_{i=0}^n F_i(d) = \sum_{i=0}^{\infty} F_i(d) \quad (1.5.6)$$

car par récurrence, comme pour  $0 \leq i \leq n-1$ ,  $F_i$  est linéaire sur  $[d^-, d^+]$ ,  $F_i(d) = \frac{1}{2}(F_i(d^-) + F_i(d^+))$  et

$$\sum_{i=0}^{n-1} F_i(d) = \frac{1}{2} \left( \sum_{i=0}^{n-1} F_i(d^-) + \sum_{i=0}^{n-1} F_i(d^+) \right) = \frac{1}{2} (W_{d^-} + W_{d^+}).$$

Comme  $F_n(d) = 2^{-\frac{(n+1)}{2}} Z_d$ , nous avons exactement la formule (1.5.5)

**Convergence uniforme.** Il reste à montrer que la série (1.5.6) est uniformément convergente. Utilisant la majoration exponentielle pour les queues des v.a. gaussiennes

$$\mathbb{P}[|Z_d| \geq c\sqrt{n}] \leq \exp\left(-\frac{c^2 n}{2}\right) \quad (1.5.7)$$

nous voyons que la série  $\sum_n \sum_{d \in D_n} \mathbb{P}[|Z_d| \geq c\sqrt{n}]$  converge si  $c > \sqrt{2 \log 2}$ . D'après le lemme de Borel-Cantelli, il existe un nombre aléatoire  $N$ , fini p.s., tel que pour tout  $n > N$  et  $d \in \mathbb{D}_n$  et donc  $\|F_n\|_\infty < c\sqrt{n}2^{-n/2}$ . La série  $\sum_{i=0}^\infty F_i(t)$  est uniformément convergente sur  $[0, 1]$ , et a une limite continue pour tout réel le long des dyadiques que nous notons  $W_t$ .

**Propriétés du processus limite.** Pour montrer que le processus ainsi défini est à accroissements indépendants et stationnaires, on utilise que les propriétés des distributions gaussiennes montrées sur les dyadiques passent à la limite p.s. Nous avons donc construit un mouvement brownien sur  $[0, 1]$ .  $\square$

#### 1.5.4 Décomposition du mouvement brownien en séries de Fourier

Nous terminons par une autre représentation du mouvement brownien comme une superposition de signaux gaussiens.

**Proposition 1.5.4** *Considérons  $(G_m)_{m \geq 0}$  une suite de variables gaussiennes centrées réduites indépendantes. Alors*

$$W_t = \frac{t}{\sqrt{\pi}} G_0 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m \geq 1} \frac{\sin(mt)}{m} G_m$$

*est un mouvement brownien standard sur l'intervalle  $[0, \pi]$ .*

**Preuve :**

Texte supprimé de la version électronique.



Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

## 1.6 Exercices

**Exercice 1.1** Quelques identités remarquables sur les variables gaussiennes.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**Exercice 1.2 Variables aléatoires log-normales.**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**Exercice 1.3 Une autre définition du mouvement brownien.**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**Exercice 1.4 Superposition de mouvements browniens.**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**Exercice 1.5 Invariance par translation.**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**Exercice 1.6 Invariance par changement d'échelle.**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**Exercice 1.7**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**Exercice 1.8** Les trajectoires browniennes sont höldériennes d'exposant  $\frac{1}{2}$ .

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**Exercice 1.9** Comportement du brownien en 0 : loi du logarithme itéré (Khintchine, 1924).

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**Exercice 1.10** Convergence des gaussiennes.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**Exercice 1.11 ★** A propos du maximum du mouvement brownien et de ses temps d'atteinte.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

## Chapitre 2

# Équation de la chaleur et formule d'Itô

### 2.1 Introduction

Les premières propriétés du mouvement brownien mises en évidence par Bachelier et Einstein concernent le lien entre la distribution du mouvement brownien issu de  $x$ , et l'équation de la chaleur.

En fait, ces auteurs déduisent de la propriété d'accroissements indépendants et de la stationnarité du phénomène modélisé que la densité  $p_t(x, y)$  de la loi de  $x + W_t$ , qui n'est pas supposée gaussienne a priori, ne dépend que de  $y - x$  et vérifie l'équation de convolution,

$$\int_{\mathbb{R}} p_t(x, y) p_h(y, z) dy = p_{t+h}(x, z) \quad (2.1.1)$$

Citons les arguments de Bachelier, dans "Théorie de la spéculation" pour justifier cette relation.

« Désignons par  $p_t(x)dx$  la probabilité pour qu'à l'époque  $t$  le cours se trouve au niveau  $x$ , c'est à dire plus exactement soit compris dans l'intervalle élémentaire  $[x, x + dx]$ .

Cherchons la probabilité pour que le cours  $z$  soit coté à l'époque  $t + h$ , le cours  $x$  ayant été coté à l'époque  $t$ . En vertu du principe de la probabilité composée, la probabilité cherchée sera égale au produit de la probabilité pour que le cours  $x$  soit coté à l'instant  $t$  multipliée par la probabilité pour que le cours  $x$  étant coté à l'instant  $t$ , le cours  $z$  soit coté à l'instant  $t + h$ , c'est à dire multipliée par  $p_h(z - x)dz$ . La probabilité cherchée est donc

$$p_t(x)p_h(z - x)dx dz.$$

*Le cours pouvant se trouver à l'époque  $t$  dans tous les niveaux  $x$  possibles, la probabilité pour que le cours  $z$  soit coté à l'instant  $t + h$  sera*

$$p_{t+h}(z) = \int_{-\infty}^{+\infty} p_t(x)p_h(z-x)dx.$$

»

Bachelier conclut en montrant que cette équation est vérifiée par les fonctions de la forme  $A_t e^{-\pi A_t^2 x^2}$  pour lesquelles la fonction  $A_t^2$  est inversement proportionnelle au temps. Il n'envisage pas a priori d'autres types de fonctions.

L'argument heuristique de Bachelier ne serait plus accepté comme une démonstration à notre époque. Les hypothèses exactes qui garantissent qu'un phénomène à accroissements indépendants homogènes et centrés soit un mouvement brownien demande d'introduire une hypothèse supplémentaire<sup>1</sup>, à savoir que

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{1}{t} \mathbb{P}(|W_t| > \varepsilon) = 0$$

(hypothèse qui n'est pas vérifiée pour le processus de Poisson, qui est bien pourtant à accroissements indépendants et stationnaires). Ce résultat montre néanmoins la grande généralité des situations qui peuvent être modélisées par un mouvement brownien.

## 2.2 L'équation de la chaleur

Revenons à la loi de  $x + W_t$  de densité gaussienne  $g(t, x, y) := g(t, y - x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-(y - x)^2/2t)$ , souvent appelée dans ce contexte noyau de la chaleur. L'une des propriétés fondamentales de ce noyau est **la propriété de convolution** exploitée par Bachelier,

$$g(t + s, x, y) = \int_{\mathbb{R}} g(t, x, z)g(s, z, y)dz \quad (2.2.1)$$

qui traduit que  $x + W_{t+h}$  est la somme des variables gaussiennes indépendantes  $x + W_t$  et  $W_{t+h} - W_t$ .

Un calcul direct sur la densité montre que le noyau gaussien est solution de **l'équation de la chaleur**, c'est à dire de l'équation aux dérivées partielles (EDP)

$$\begin{aligned} g'_t(t, x, y) &= \frac{1}{2} g''_{yy}(t, x, y), \\ g'_t(t, x, y) &= \frac{1}{2} g''_{xx}(t, x, y). \end{aligned} \quad (2.2.2)$$

La densité gaussienne satisfait à l'équation de la chaleur (2.2.2), par rapport aux deux variables  $x$  et  $y$ . Cette propriété est étendue à une vaste classe de fonctions construites à partir du mouvement brownien.

1. La preuve peut être trouvée dans le livre de Breiman [3].



### 2.2.1 Le cas simple de fonction $f(x)$

**Théorème 2.2.1** *Considérons la fonction  $u(t, x, f) = \mathbb{E}[f(x + W_t)] = \int_{\mathbb{R}} g(t, x, y) f(y) dy$ , où  $f$  est une fonction borélienne et bornée<sup>2</sup>. La fonction  $u$  est indéfiniment dérivable en espace et en temps pour  $t > 0$  et vérifie l'équation de la chaleur,*

$$u'_t(t, x, f) = \frac{1}{2} u''_{xx}(t, x, f), \quad u(0, x, f) = f(x). \quad (2.2.3)$$

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

Lorsque la fonction considérée est régulière, une autre formulation peut être donnée à cette relation, qui jouera un rôle important dans toute la suite.

**Proposition 2.2.2** *Si  $f$  est une fonction bornée de classe  $C_b^2$  (2 fois dérivable à dérivées bornées<sup>3</sup>), on a*

$$u'_t(t, x, f) = u(t, x, \frac{1}{2} f''_{xx}),$$

---

2. Cette condition peut être relaxée en  $|f(x)| \leq C \exp\left(\frac{|x|^2}{2\alpha}\right)$  pour tout  $x$ , avec des constantes positives  $C$  et  $\alpha$  : dans ce cas-là, la régularité de la fonction  $u$  est assurée pour  $t < \alpha$  seulement.

3. Comme pour le théorème 2.2.3, l'hypothèse de bornitude peut être relâchée en la condition  $|f(x)| + |f'_x(x)| + |f''_{xx}(x)| \leq C \exp\left(\frac{|x|^2}{2\alpha}\right)$  pour tout  $x$ , avec des constantes positives  $C$  et  $\alpha > t$ .

soit sous une forme plus probabiliste

$$\mathbb{E}[f(x + W_t)] = f(x) + \int_0^t \mathbb{E}\left[\frac{1}{2}f''_{xx}(x + W_s)\right] ds. \quad (2.2.4)$$

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

### 2.2.2 Le cas général de fonction $f(t, x)$

La Proposition 2.2.2 se généralise facilement au cas où  $f$  dépend aussi du temps. Nous laissons la preuve au lecteur.

**Proposition 2.2.3** *Si  $f$  est une fonction bornée de classe  $\mathcal{C}_b^{1,2}$  (1 fois dérivable en temps et 2 fois dérivables en espace, avec des dérivées bornées<sup>4</sup>), on a*

$$\mathbb{E}[f(t, x + W_t)] = f(0, x) + \int_0^t \mathbb{E}[f'_t(s, x + W_s) + \frac{1}{2}f''_{xx}(s, x + W_s)] ds.$$

---

4. l'hypothèse de bornitude peut être affaiblie en la condition  $|f(s, x)| + |f'_t(s, x)| + |f'_x(s, x)| + |f''_{xx}(s, x)| \leq C \exp\left(\frac{|x|^2}{2\alpha}\right)$  pour tout  $(s, x) \in [0, t] \times \mathbb{R}$ , avec des constantes positives  $C$  et  $\alpha > t$ .

Si l'on permute intégrale et espérance, l'égalité précédente se ré-écrit

$$\mathbb{E}[f(t, x + W_t)] = f(0, x) + \mathbb{E} \left[ \int_0^t (f'_t(s, x + W_s) + \frac{1}{2} f''_{xx}(s, x + W_s)) ds \right]. \quad (2.2.5)$$

Il sera particulièrement intéressant de pouvoir utiliser ce résultat même si  $t$  est aléatoire. En toute généralité, ce ne sera vrai que si  $t$  est un temps d'arrêt borné.

**Théorème 2.2.4** *Si  $f$  est une fonction bornée de classe  $\mathcal{C}_b^{1,2}$ , on a*

$$\mathbb{E}[f(U, x + W_U)] = f(0, x) + \mathbb{E} \left[ \int_0^U (f'_t(s, x + W_s) + \frac{1}{2} f''_{xx}(s, x + W_s)) ds \right] \quad (2.2.6)$$

pour tout temps d'arrêt borné  $U$ .

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

Des exemples d'application du résultat précédent sont donnés en exercice, notamment pour déterminer la loi de certains temps d'atteinte ou étudier la récurrence et la transience du mouvement brownien multidimensionnel.

### 2.2.3 Application à l'équation de la chaleur dans un intervalle

Nous explicitons maintenant les solutions de l'équation de la chaleur dans un intervalle : c'est une généralisation partielle<sup>5</sup> du Théorème 2.2.1, qui les caractérisait lorsqu'elles étaient définies dans tout l'espace. L'introduction de donnée frontière de type Dirichlet est reliée au temps de passage du mouvement brownien par cette frontière.

**Proposition 2.2.5 (Équation de la chaleur avec condition de Dirichlet)**

*Considérons l'équation aux dérivées partielles*

$$\begin{cases} u'_t(t, x) = \frac{1}{2}u''_{xx}(t, x), & \text{pour } t > 0 \text{ et } x \in ]a, b[ \\ u(0, x) = f(0, x) & \text{pour } t = 0 \text{ et } x \in [a, b]. \\ u(t, x) = f(t, x) & \text{pour } x = a \text{ ou } b, \text{ avec } t \geq 0. \end{cases}$$

*Si il existe une solution  $u$  de classe  $C_b^{1,2}([0, T] \times [a, b])$ , alors elle est donnée par*

$$u(t, x) = \mathbb{E}[f(t - U, x + W_U)]$$

*avec  $U = T_a \wedge T_b \wedge t$  (selon les notations précédentes,  $T_y$  est le premier temps d'atteinte de  $y$  par la f.a.  $(x + W_t)_{t \geq 0}$ ).*

Preuve:

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

---

5. en effet, le résultat donne l'unicité et non l'existence.

□

### 2.2.4 Équation aux dérivées partielles pour le mouvement brownien avec dérive

L'EDP obtenue pour le mouvement brownien standard (voir l'équation de la chaleur du Théorème 2.2.3) s'étend sans difficulté au mouvement brownien avec dérive  $\{X_t^x = x + bt + \sigma W_t, t \geq 0\}$  introduit au paragraphe 1.3.1.

Pour cela, il convient de déterminer l'EDP satisfaite par la densité de la loi de  $X_t$ , qui est une loi gaussienne de moyenne  $x + bt$  et de variance  $\sigma^2 t$  :

$$\begin{aligned} g_{b,\sigma^2}(t, x, y) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2 t}} \exp - \frac{(y - x - bt)^2}{2\sigma^2 t} \\ &= g(\sigma^2 t, x + bt, y) = g(\sigma^2 t, x, y - bt). \end{aligned}$$

Nous introduisons le **générateur** associé à ce processus, c'est-à-dire l'opérateur du second ordre défini par

$$L_{b,\sigma^2}\phi(x) = \frac{1}{2}\sigma^2\phi''_{xx}(x) + b\phi'_x(x). \tag{2.2.7}$$

Puisque  $g(t, x, y)$  satisfait l'équation de la chaleur, la fonction  $x \rightarrow g_{b,\sigma^2}(t, x, y)$  vérifie

$$\partial_t g_{b,\sigma^2}(t, x, y) = \frac{1}{2}\sigma^2 g''_{xx}(\sigma^2 t, x + bt, y) + b g'_x(\sigma^2 t, x + bt, y) = L_{b,\sigma^2} g_{b,\sigma^2}(t, x, y).$$

**Proposition 2.2.6** *Considérons une fonction  $f$  borélienne bornée. La fonction*

$$u_{b,\sigma^2}(t, x, f) = \mathbb{E}[f(x + bt + \sigma W_t)] = \int_{\mathbb{R}} g_{b,\sigma^2}(t, x, y) f(y) dy \tag{2.2.8}$$

*satisfait l'équation aux dérivées partielles*

$$\begin{cases} u'_t(t, x, f) &= L_{b,\sigma^2} u(t, x, f) = \frac{1}{2}\sigma^2 u''_{xx}(t, x, f) + b u'_x(t, x, f), \\ u(0, x, f) &= f(x). \end{cases} \tag{2.2.9}$$

*De plus, si  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}_b^{1,2}$  et  $U$  un temps d'arrêt borné, alors*

$$\mathbb{E}[f(t, X_t^x)] = f(0, x) + \int_0^t \mathbb{E}[L_{b,\sigma^2} f(s, X_s^x) + f'_t(s, X_s^x)] ds, \tag{2.2.10}$$

$$\mathbb{E}[f(U, X_U^x)] = f(0, x) + \mathbb{E}\left[\int_0^U L_{b,\sigma^2} f(s, X_s^x) + f'_t(s, X_s^x) ds\right]. \tag{2.2.11}$$

**Preuve :**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

### 2.2.5 Commentaires

La représentation de la solution de l'équation de la chaleur (2.2.3) comme  $\mathbb{E}[f(x + W_t)]$  montre que la trajectoire brownienne joue pour cette équation le même rôle que les caractéristiques, solutions d'équations différentielles du premier ordre, pour la résolution des EDP du premier ordre.

Mais l'étape la plus importante est de passer de ce calcul, vrai en espérance, à un calcul trajectorien.

Cette étape amorcée par Paul Lévy dans les années 30 a été complétée par K. Itô dans les années 50. Plus précisément, Itô interprète la quantité

$$\mathcal{I}_t(f) = f(x + W_t) - f(x) - \int_0^t \frac{1}{2} f''_{xx}(x + W_s) ds \quad (2.2.12)$$

qui mesure la différence trajectorielle entre les deux membres de l'équation (2.2.4), comme une intégrale stochastique. Ce faisant, il introduit un calcul différentiel stochastique, le calcul d'Itô, vrai sur les trajectoires et non plus seulement en moyenne.

Si nous considérons une fonction  $\{x(t); t \in [0, T]\}$ , dérivable en temps et  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^1$ , par la règle de différentiation composée, nous savons que

$$f(x_t) = f(x_s) + \int_s^t f'_x(x_u) x'_u du. \quad (2.2.13)$$

Dans le cas déterministe ou stochastique, la justification de cette décomposition repose sur l'étude des variations infinitésimales des fonctions aléatoires. Pour justifier le terme en dérivée seconde qui apparaît dans le formule avec le mouvement brownien, nous étudions d'abord les propriétés de la variation quadratique du mouvement brownien.

## 2.3 Variation quadratique

### 2.3.1 Notations et définitions

Les accroissements du mouvement brownien dans un petit intervalle  $(t, t+h)$  sont des v.a. gaussiennes centrées de variance  $h$ , qui se comportent donc comme  $\sqrt{h}$ . La variation totale n'existe pas, car les trajectoires ne sont pas différentiables, mais la variation quadratique a des propriétés intéressantes.

Pour la définir et pour la bonne suite du chapitre, nous allons considérer des subdivisions particulières du temps.

**Définition 2.3.1 (Subdivision dyadique d'ordre  $n$ )** Pour  $n$  entier, posons  $t_i = i2^{-n}$ . La subdivision de  $\mathbb{R}^+$  définie par  $\mathbb{D}_n = \{t_0 < \dots < t_i < \dots\}$  est appelée subdivision dyadique d'ordre  $n$ . Le pas  $\delta_n$  de la subdivision est donné par  $\delta_n = 2^{-n}$ .

**Définition 2.3.2 (Variation quadratique)** La variation quadratique d'un mouvement brownien  $W$  associée à la subdivision dyadique d'ordre  $n$  est définie, pour  $t \geq 0$ , par

$$V_t^n = \sum_{t_i \leq t} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2. \quad (2.3.1)$$

### 2.3.2 Convergence

On a alors le résultat remarquable suivant.

**Proposition 2.3.3 (Convergence ponctuelle)** Avec probabilité 1, on a

$$\lim_{n \rightarrow \infty} V_t^n = t$$

pour tout  $t \in \mathbb{R}^+$ .

**Remarque :** Lorsque  $x$  est une fonction continûment différentiable de  $\mathbb{R}^+$  dans  $\mathbb{R}$ , la variation quadratique  $V_t^n = \sum_{t_i \leq t} [x(t_{i+1}) - x(t_i)]^2$  tend vers 0 avec le pas de la subdivision. En effet, d'après le théorème des accroissements finis,  $V_t^n = \sum_{t_i \leq t} [x'(t_i^*)(t_{i+1} - t_i)]^2 \leq K^2 \delta_n (T+1)$ , où  $K$  est un majorant de  $|x'(t)|$  sur  $[0, T+1]$  et tend donc vers 0 si  $\delta_n$  tend vers 0.

**Preuve :**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

Comme conséquence de cette propriété, nous avons la formule qui donne la décomposition de  $W_t^2$ .

**Proposition 2.3.4 (Une première formule d'Itô)** *Soit  $W$  un mouvement brownien standard. Avec probabilité 1, on a pour tout  $t \geq 0$*

$$W_t^2 = 2 \int_0^t W_s dW_s + t \quad (2.3.2)$$

où l'intégrale stochastique  $\int_0^t W_s dW_s$  est la limite p.s. de  $\sum_{t_i \leq t} W_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$ , le long des subdivisions dyadiques.

Preuve:

Texte supprimé de la version électronique.



Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

La f.a.  $V_t^n$  considérée comme fonction de sa borne supérieure  $t$  est croissante et peut s'identifier comme la fonction de répartition de la mesure positive ponctuelle

$$\sum_{i \geq 0} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 \delta_{t_i}(\cdot) = \mu^n(\cdot)$$

vérifiant  $\mu_n(f) = \sum_{i \geq 0} f(t_i)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2$ .

La convergence des fonctions de répartition de  $\mu^n(\cdot)$  (montrée à la Proposition 2.3.3) peut alors être étendue à celle d'intégrales impliquant des fonctions continues (pouvant être aléatoires). C'est l'objet du résultat suivant qui est de nature déterministe.

**Proposition 2.3.5 (Convergence en tant que mesure positive)** *Pour toute fonction continue  $f$ , on a avec probabilité 1*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_i \leq t} f(t_i)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 = \int_0^t f(s) ds$$

pour tout  $t \geq 0$ , la limite étant calculée le long des subdivisions dyadiques.

Preuve:

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

## 2.4 La formule d'Itô

Le calcul différentiel s'étend à d'autres fonctions que la fonction  $x \rightarrow x^2$ . Ce calcul est nécessaire pour représenter trajectoriellement les variations infinitésimales de  $f(x + W_t)$ , mais à la formule classique du cas déterministe il faut ajouter un terme supplémentaire, dû au fait que la variation quadratique limite n'est pas nulle.

**Théorème 2.4.1 (Formule d'Itô)** *Soit  $f \in \mathcal{C}^2(\mathbb{R})$ , une fonction deux fois dérivable. Alors avec probabilité 1, on a pour tout  $t \geq 0$*

$$f(x + W_t) = f(x) + \int_0^t f'_x(x + W_s) dW_s + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(x + W_s) ds. \quad (2.4.1)$$

*Pour des fonctions  $f$  dépendant aussi du temps de manière régulière, la formule se généralise sous la forme*

$$\begin{aligned} f(t, x + W_t) = & f(0, x) + \int_0^t f'_x(s, x + W_s) dW_s + \int_0^t f'_t(s, x + W_s) ds \\ & + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, x + W_s) ds. \end{aligned} \quad (2.4.2)$$

*Le terme  $\mathcal{I}_t(f) = \int_0^t f'_x(s, x + W_s) dW_s$  s'appelle l'intégrale stochastique de  $f'_x(s, x + W_s)$  par rapport au mouvement brownien : c'est la limite p.s. de*

$$\mathcal{I}_t^n(f, W) = \sum_{t_i \leq t} f'_x(t_i, x + W_{t_i})(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

*le long de la subdivision dyadique d'ordre  $n$ .*

*Lorsque  $f$  a des dérivées bornées, l'intégrale stochastique  $\mathcal{I}_t(f)$  est centrée :  $\mathbb{E}(\mathcal{I}_t(f)) = 0$  (comparer avec (2.2.5) et voir les commentaires autour de l'égalité (2.2.12)).*

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

Il est maintenant facile d'en déduire une formule d'Itô pour le mouvement brownien avec dérive  $\{X_t^x = x + bt + \sigma W_t, t \geq 0\}$ .

**Corollaire 2.4.2** *Soit  $f$  une fonction de classe  $\mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R})$ . Alors avec probabilité 1, on a pour tout  $t \geq 0$*

$$\begin{aligned} f(t, X_t^x) &= f(0, x) + \int_0^t f'_x(s, X_s^x) \sigma dW_s + \int_0^t f'_x(s, X_s^x) b ds \\ &\quad + \int_0^t f'_t(s, X_s^x) ds + \frac{1}{2} \int_0^t \sigma^2 f''_{xx}(s, X_s^x) ds. \end{aligned}$$

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

Les fonctions  $u(t, x, f) = \mathbb{E}[f(x + W_t)]$  introduites dans ce chapitre jouent un rôle très important.

**Corollaire 2.4.3** *Soit  $f$  une fonction continue, satisfaisant les hypothèses de croissance du Théorème 2.2.1 et  $u(t, x, f) = \mathbb{E}[f(x + W_t)]$  la fonction de classe  $C^{1,2}$  pour  $t > 0$  étudiée dans le théorème précité.*

*La v.a.  $f(x + W_T)$  admet une représentation comme intégrale stochastique*

$$f(x + W_T) = \mathbb{E}[f(x + W_T)] + \int_0^T u'_x(T - s, x + W_s, f) dW_s. \quad (2.4.3)$$

Il s'agit de ce qu'on appelle un théorème de représentation d'une v.a. comme intégrale stochastique. Il convient de bien noter que dans cette représentation la fonction intégrée dans l'intégrale stochastique n'est pas la dérivée de la fonction  $f$  mais celle de la solution de l'EDP  $u(t, x, f)$ .

Ce théorème est particulièrement important en finance, car il permettra de construire des stratégies de couverture de produits dérivés.

**Preuve :**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

## 2.5 Intégrale de Wiener

En général, il n'est pas possible de décrire explicitement la loi de l'intégrale stochastique  $\int_0^t f'_x(s, x + W_s) dW_s$ . Le Théorème 2.4.1 nous assure seulement que si  $f$  est à dérivées bornées, c'est une variable aléatoire d'espérance nulle. Il existe pourtant une situation très importante (au moins en finance) où l'intégrale stochastique à l'instant  $t$  a une loi gaussienne centrée : c'est le cas de  $f'_x(s, x) = h(s)$  indépendant de  $x$ . Dans ce cas,  $\int_0^t h(s) dW_s$  est appelée intégrale de Wiener. Ses propriétés sont résumées dans le résultat suivant.

**Proposition 2.5.1 (Intégrale de Wiener et intégration par parties)** *Soit  $f$  une fonction dérivable, à dérivée bornée sur  $[0, T]$ .*

1. Avec probabilité 1, on a pour tout  $t \in [0, T]$

$$\int_0^t W_s f'(s) ds + \int_0^t f(s) dW_s = f(t) W_t. \quad (2.5.1)$$

Le terme d'intégrale stochastique  $\int_0^t f(s) dW_s$  est la limite p.s. de  $\mathcal{I}_t^n(f, W) = \sum_{t_i \leq t} f(t_i)(W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$  le long de la subdivision dyadique d'ordre  $n$ .

2. La f.a.  $\{\int_0^t f(s) dW_s ; t \in [0, T]\}$  est un processus gaussien (voir Appendice A.1), à trajectoires continues, centrée, de carré intégrable et de fonction de covariance

$$\text{Cov}\left(\int_0^t f(u) dW_u, \int_0^s f(u) dW_u\right) = \int_0^{s \wedge t} f^2(u) du. \quad (2.5.2)$$

3. Pour une autre fonction  $g$  analogue, on a

$$\text{Cov}\left(\int_0^t f(u)dW_u, \int_0^s g(u)dW_u\right) = \int_0^{s \wedge t} f(u)g(u)du. \quad (2.5.3)$$

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

REMARQUES :

- Dans le cas déterministe, il suffit que la fonction  $f$  à intégrer soit continue, pour que les sommes de Riemann convergent vers l'intégrale (voir la preuve ci-dessus). Dans le cas stochastique, nous supposons que la fonction  $f$  est dérivable pour avoir la convergence p.s. des sommes de Riemann vers l'intégrale stochastique.
- L'intégrale stochastique  $\int_0^t f(s, W_s)dW_s$  s'appelle intégrale de Wiener pour  $f(s, W_s) = f(s)$  déterministe et s'appelle intégrale d'Itô dans le cas général  $f(s, W_s)$  aléatoire.
- La relation  $\mathbb{E}(\int_0^t f(s)dW_s)^2 = \int_0^t f^2(s)ds$  définit une isométrie entre les variables gaussiennes centrées et les fonctions  $f$  de carré intégrable. Notre construction de l'intégrale de Wiener pour les fonctions  $f$  dérivables peut donc s'étendre à toute fonction  $f$  de carré intégrable, en gardant les propriétés énoncées. En effet, pour  $f$  de carré intégrable, prenons une suite  $(f_n)_n$  de fonctions régulières convergeant quadratiquement vers  $f : \int_0^t (f - f_n)^2(s)ds \rightarrow 0$ . Cette suite de fonctions est de Cauchy dans  $L_2([0, t], ds)$  et par l'isométrie, la suite de variables aléatoires  $(\int_0^t f_n(s)dW_s)_n$  est de Cauchy dans  $L_2(\Omega, \mathbb{P})$ . Notons sa limite de  $\int_0^t f(s)dW_s$ . Chaque variable aléatoire  $\int_0^t f_n(s)dW_s$  est

une intégrale de Wiener, donc de loi gaussienne centrée et de variance  $\int_0^t f_n^2(s)ds$  : cette propriété gaussienne se préserve à la limite (voir Proposition ?? en Appendice A.1), ce qui montre que  $\int_0^t f(s)dW_s$  est de loi gaussienne centrée et de variance  $\int_0^t f^2(s)ds$ .

## ◆ ◆ POUR EN SAVOIR PLUS ◆

## 2.6 Formule d'Itô pour d'autres processus que le mouvement brownien

On aura remarqué que la propriété centrale pour la preuve du Théorème 2.4.1 est que le mouvement brownien est à variation quadratique finie. En fait, cette propriété est satisfaite par de nombreux processus stochastiques bâtis autour du mouvement brownien, ce qui sous-entend qu'une formule d'Itô est également valable pour ces processus.

### 2.6.1 Le cas unidimensionnel

Dans ce paragraphe, nous considérons seulement des processus qui prennent des valeurs réelles. L'extension multidimensionnelle est faite après.

**Définition 2.6.1 (Variation quadratique d'un processus)** *Un processus continu  $X$  est dit à variation quadratique finie si pour  $t \geq 0$ , la limite*

$$V_t^n = \sum_{t_i \leq t} (X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 \quad (2.6.1)$$

*le long des subdivisions dyadiques d'ordre  $n$ , existe presque sûrement et est finie<sup>6</sup>. Cette limite est notée  $\langle X \rangle_t$  et est appelée le crochet<sup>7</sup> de  $X$  au temps  $t$ .*

Dans le cas brownien  $X = W$ , nous avons  $\langle X \rangle_t = t$ . De manière plus générale, il n'est pas difficile de voir que le crochet  $\langle X \rangle$  est un processus continu et croissant. On peut lui associer une mesure positive  $d\langle X \rangle_t$  de sorte à étendre immédiatement la Proposition 2.3.5 à  $X$ .

**Proposition 2.6.2 (Convergence en tant que mesure positive)** *Pour toute fonction continue  $f$ , on a avec probabilité 1*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_i \leq t} f(t_i)(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})^2 = \int_0^t f(s)d\langle X \rangle_s$$

*pour tout  $t \geq 0$ , la limite étant calculée le long des subdivisions dyadiques d'ordre  $n$ .*

6. notre définition n'est pas standard par rapport à la littérature sur le sujet, où en général la subdivision n'a pas besoin d'être dyadique et la convergence peut avoir lieu en probabilité seulement. Nous privilégions ici les idées, au détriment du cadre général.

7. cette quantité joue un rôle important dans la théorie des martingales.

En reprenant la preuve du Théorème 2.4.1, on montre alors

**Théorème 2.6.3 (Formule d'Itô pour  $X$ )** Soit  $f \in C^{1,2}(\mathbb{R})$  et  $X$  un processus à variation quadratique finie. Alors avec probabilité 1, on a pour tout  $t \geq 0$

$$f(t, X_t) = f(0, X_0) + \int_0^t f'_x(s, X_s) dX_s + \int_0^t f'_t(s, X_s) ds + \frac{1}{2} \int_0^t f''_{xx}(s, X_s) d\langle X \rangle_s. \quad (2.6.2)$$

Le terme  $\int_0^t f'_x(s, X_s) dX_s$  s'appelle l'intégrale stochastique de  $f'_x(s, X_s)$  par rapport à  $X$  : c'est la limite p.s. de

$$\sum_{t_i \leq t} f'_x(t_i, X_{t_i})(X_{t_{i+1}} - X_{t_i})$$

le long de la subdivision dyadique d'ordre  $n$ .

La formule d'Itô (2.6.2) peut aussi s'écrire sous forme différentielle

$$df(t, X_t) = f'_x(t, X_t) dX_t + f'_t(t, X_t) dt + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, X_t) d\langle X \rangle_t.$$

Preuve:

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

La question qui vient maintenant est **comment calcule-t'on pratiquement le crochet d'un processus  $X$**  ? Le résultat suivant regroupe les règles de calcul les plus courantes.



**Proposition 2.6.4 (Calcul de crochet)** *Considérons deux processus continus  $A$  et  $M$  ayant les propriétés suivantes :*

- $A$  est à variation finie<sup>8</sup> ;
- $M$  est à variation quadratique finie.

Alors

1.  $\langle A \rangle_t = 0$ .
2. si  $X_t = x + M_t$ , alors  $\langle X \rangle_t = \langle M \rangle_t$ .
3. si  $X_t = \lambda M_t$ , alors  $\langle X \rangle_t = \lambda^2 \langle M \rangle_t$ .
4. si  $X_t = M_t + A_t$ , alors  $\langle X \rangle_t = \langle M \rangle_t$ .
5. si  $X_t = f(A_t, M_t)$  avec  $f \in C^1$ , alors  $\langle X \rangle_t = \int_0^t [f'_m(A_s, M_s)]^2 d\langle M \rangle_s$ .

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

On peut ainsi déduire les crochets (et donc les formules d'Itô) dans les cas importants suivants :

**Corollaire 2.6.5 (Crochets du mouvement brownien arithmétique et géométrique)**

---

8. c'est à dire la limite de  $\sum_{t_i \leq t} |A_{t_{i+1}} - A_{t_i}|$  existe et est finie. C'est le cas lorsque  $A$  est  $C^1$ .

- Pour le **mouvement brownien arithmétique**  $X_t = x + bt + \sigma W_t$ , on a

$$\langle X \rangle_t = \langle \sigma W \rangle_t = \sigma^2 \langle W \rangle_t = \sigma^2 t.$$

Ainsi

$$df(t, X_t) = (f'_t(t, X_t) + f'_x(t, X_t)b + \frac{1}{2}f''_{xx}(t, X_t)\sigma^2)dt + f'_x(t, X_t)\sigma dW_t.$$

En particulier, pour  $f(x) = \exp(x)$ , on a

$$d[\exp(X_t)] = \exp(X_t)(b + \frac{1}{2}\sigma^2)dt + \exp(X_t)\sigma dW_t. \quad (2.6.3)$$

- Pour le **mouvement brownien géométrique**  $X_t = X_0 \exp(bt + \sigma W_t)$ , on a

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t \sigma^2 X_s^2 ds.$$

Ainsi, d'une part par (2.6.3), on a

$$dX_t = X_t(b + \frac{1}{2}\sigma^2)dt + X_t\sigma dW_t.$$

D'autre part, une nouvelle application de la formule d'Itô générale donne

$$df(t, X_t) = (f'_t(t, X_t) + f'_x(t, X_t)(b + \frac{1}{2}\sigma^2)X_t + \frac{1}{2}f''_{xx}(t, X_t)\sigma^2 X_t^2)dt + f'_x(t, X_t)\sigma X_t dW_t.$$

A noter que dans le cas du mouvement brownien arithmétique, nous retrouvons le Corollaire 2.4.2 via le Théorème 2.6.3 plus général.

## 2.6.2 Le cas multidimensionnel

Maintenant, le passage au cas de processus continu  $X$  prenant des valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  est aisé.

### Définition 2.6.6 (Variation quadratique d'un processus multidimensionnel)

Un processus continu  $X = (X^1, \dots, X^d)$  à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$  est dit à variation quadratique finie si pour  $t \geq 0$ , la limite de

$$\langle X^k, X^l \rangle_t^n = \sum_{t_i \leq t} (X_{t_{i+1}}^k - X_{t_i}^k)(X_{t_{i+1}}^l - X_{t_i}^l) \quad (2.6.4)$$

le long des subdivisions dyadiques d'ordre  $n$ , existe presque sûrement et est finie, pour tout  $1 \leq k, l \leq d$ . La limite est notée  $\langle X^k, X^l \rangle_t$  et est appelée le crochet croisé de  $X^k$  et  $X^l$  au temps  $t$ .

Quelques propriétés faciles :

- Le crochet croisé est symétrique :  $\langle X^k, X^l \rangle_t = \langle X^l, X^k \rangle_t$ .
- Lorsque  $k$  et  $l$  sont égaux,  $\langle X^k, X^k \rangle_t$  coïncide avec la définition unidimensionnelle du crochet  $\langle X^k \rangle_t$ . Dans ce cas, nous utiliserons la notation unidimensionnelle plus courte.

– Le crochet croisé peut aussi être défini par la formule de polarisation :

$$\langle X^k, X^l \rangle_t = \frac{1}{4} \left( \langle X^k + X^l \rangle_t - \langle X^k - X^l \rangle_t \right). \quad (2.6.5)$$

– Le crochet obéit aux règles de bilinéarité :

$$\langle X^i + X^j, X^k + X^l \rangle_t = \langle X^i + X^k \rangle_t + \langle X^i + X^l \rangle_t + \langle X^j + X^k \rangle_t + \langle X^j + X^l \rangle_t.$$

De ces définitions/propriétés et de la Proposition 2.6.2, on déduit naturellement le résultat sur la convergence des variations quadratiques croisées :

**Proposition 2.6.7** *Pour toute fonction continue  $f$ , on a avec probabilité 1*

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sum_{t_i \leq t} f(t_i) (X_{t_{i+1}}^k - X_{t_i}^k) (X_{t_{i+1}}^l - X_{t_i}^l) = \int_0^t f(s) d\langle X^k, X^l \rangle_s$$

pour tout  $t \geq 0$ , la limite étant calculée le long des subdivisions dyadiques d'ordre  $n$ .

Nous pouvons à présent énoncer la formule d'Itô multidimensionnelle.

**Théorème 2.6.8 (Formule d'Itô pour  $X$  multidimensionnel)** *Soit  $f \in \mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$  et  $X$  un processus  $d$ -dimensionnel à variation quadratique finie. Alors avec probabilité 1, on a pour tout  $t \geq 0$*

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \sum_{k=1}^d \int_0^t f'_{x_k}(s, X_s) dX_s^k + \int_0^t f'_t(s, X_s) ds \\ &\quad + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^d \int_0^t f''_{x_k, x_l}(s, X_s) d\langle X^k, X^l \rangle_s. \end{aligned}$$

Sous forme différentielle, cela peut aussi s'écrire

$$df(t, X_t) = \sum_{k=1}^d f'_{x_k}(t, X_t) dX_t^k + f'_t(t, X_t) dt + \frac{1}{2} \sum_{k,l=1}^d f''_{x_k, x_l}(t, X_t) d\langle X^k, X^l \rangle_t.$$

Les termes  $\sum_{k=1}^d \int_0^t f'_{x_k}(s, X_s) dX_s^k$  s'appellent les intégrales stochastiques de  $f'_{x_k}(s, X_s)$  par rapport à  $X^k$  et sont les limite p.s. de

$$\sum_{k=1}^d \sum_{t_i \leq t} f'_{x_k}(t_i, X_{t_i}) (X_{t_{i+1}}^k - X_{t_i}^k)$$

le long de la subdivision dyadique d'ordre  $n$ .

La preuve est très proche de celle du Théorème 2.6.3 : elle s'appuie sur une formule de Taylor à l'ordre 2 et la convergence des variations quadratiques croisées (Proposition 2.6.7). Nous laissons les détails au lecteur.

Nous terminons ce paragraphe en énonçant quelques règles supplémentaires de calcul des crochets croisés.

**Proposition 2.6.9 (Calcul de crochet croisé)** *Considérons des processus continus ayant les propriétés suivantes :*

- $A = (A^1, A^2)$  est à variation finie ;
- $M = (M^1, M^2)$  est à variation quadratique finie.

On a les résultats suivants.

1. si  $X^1 = M^1 + A^1$  et  $X^2 = M^2 + A^2$ ,  $|\langle X^1, X^2 \rangle_t| \leq \sqrt{\langle X^1 \rangle_t} \sqrt{\langle X^2 \rangle_t}$ .
2.  $\langle A^k, A^l \rangle_t = 0$  et  $\langle A^k, M^l \rangle_t = 0$ .
3. si  $X^1 = M^1 + A^1$  et  $X^2 = M^2 + A^2$ , alors

$$\langle X^1, X^2 \rangle_t = \langle M^1, M^2 \rangle_t.$$

4. si  $X_t^1 = f(A_t^1, M_t^1)$  et  $X_t^2 = g(A_t^2, M_t^2)$  avec  $f, g \in C^1$ , alors

$$\langle X^1, X^2 \rangle_t = \int_0^t f'_m(A_s^1, M_s^1) g'_m(A_s^2, M_s^2) d\langle M^1, M^2 \rangle_s.$$

5. si  $M^1$  et  $M^2$  sont deux mouvements browniens indépendants, alors

$$\langle M^1, M^2 \rangle_t = 0.$$

Les second et troisième résultats justifient que les composantes à variation finie ne rentrent pas en ligne de compte dans le calcul des crochets croisés des processus. Le quatrième résultat donne un moyen de calcul de crochets entre deux intégrales stochastiques.

**Preuve :**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

## 2.7 Mouvement brownien vectoriel

Nous précisons les résultats du paragraphe précédent dans le cas du mouvement brownien vectoriel, en commençant par le cas le plus standard. Nous ajoutons également le lien avec l'équation de la chaleur multidimensionnelle. Les principales difficultés sont de notation. Les propriétés des matrices symétriques joueront un rôle important.

### 2.7.1 Mouvement brownien vectoriel standard

**Définition 2.7.1** On appelle mouvement brownien vectoriel standard une f.a. à trajectoires continues, à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $\{W_t = (W_t^1, W_t^2, \dots, W_t^d); t \in \mathbb{R}^+\}$  telle que

- $W_0 = 0$ ;
- tout accroissement  $W_t - W_s$  où  $(0 \leq s < t)$  suit une loi gaussienne sur  $\mathbb{R}^d$ , centrée de matrice de covariance  $(t - s)\mathbf{Id}$ , où  $\mathbf{Id}$  est la matrice identité.
- Pour tout  $0 = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_n$ , les accroissements  $W_{t_{i+1}} - W_{t_i}$  avec  $(0 \leq i < n)$  sont indépendants.

Une conséquence immédiate de la définition est que les f.a. des coordonnées  $(\{W_t^i; t \in \mathbb{R}^+\}, i = 1, \dots, d)$  sont des mouvements browniens réels indépendants, et réciproquement des mouvements browniens réels indépendants engendrent un mouvement brownien vectoriel.

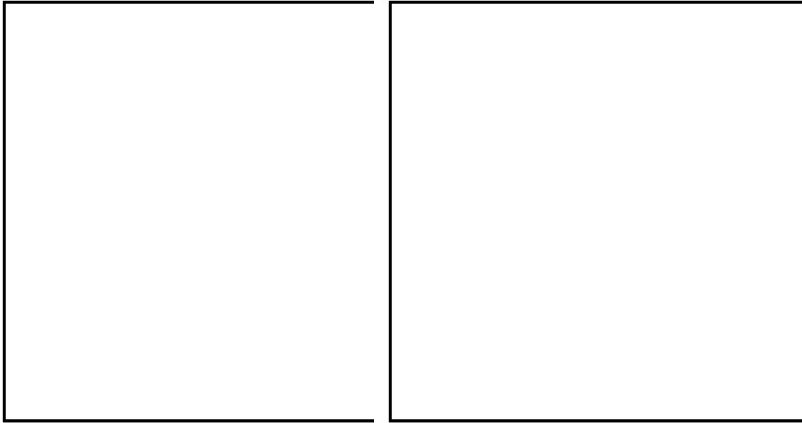


FIGURE 2.1 – Simulations de mouvement brownien standard dans  $\mathbb{R}^2$  et  $\mathbb{R}^3$ .

**Équation de la chaleur.** La densité de la loi du brownien vectoriel est la densité gaussienne sur  $\mathbb{R}^d$ , centrée, de matrice de covariance,  $\mathbf{Id} \times t$ , soit

$$g(t, x_1, x_2, \dots, x_d) = \frac{1}{(2\pi t)^{\frac{d}{2}}} \exp\left(-\frac{1}{2t} \sum_{i=1}^d |x_i|^2\right).$$

Les liens avec l'équation de la chaleur (voir Théorème 2.2.1) sont étendus sans restriction à condition de se référer au Laplacien multidimensionnel, qui est la somme des dérivées secondes unidimensionnelles,  $\Delta_x = \sum_{i=1}^d \partial_{x_i x_i}^2$ . L'équation de la chaleur pour la fonction  $u(t, x, f) = \mathbb{E}[f(t, x + W_t)]$  associée à une fonction  $f$  borélienne bornée définie sur  $\mathbb{R}^d$  devient

$$\begin{cases} u'_t(t, x, f) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d u''_{x_i x_i}(t, x, f) = \frac{1}{2} \Delta_x u(t, x, f), \\ u(0, x) = f(x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_d). \end{cases}$$

Lorsque le mouvement brownien vectoriel est associé à des mouvements browniens décentrés, indépendants, de tendance ( $b_i; i = 1 \dots d$ ) et de coefficient de diffusion ( $\sigma_i; i = 1 \dots d$ ) ( $\{X_t^x = (x_1 + b_1 t + \sigma_1 W_t^1, \dots, x_d + b_d t + \sigma_d W_t^d); t \in \mathbb{R}^+\}$ ), l'EDP devient

$$\begin{cases} u'_t(t, x, f) = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sigma_i^2 u''_{x_i x_i}(t, x, f) + \sum_{i=1}^d b_i u'_{x_i}(t, x, f), \\ u(0, x) = f(x), \quad x = (x_1, x_2, \dots, x_d), \end{cases}$$

soit en introduisant le générateur de ce processus

$$\begin{aligned} Lg(t, x) &= \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \sigma_i^2 g_{x_i x_i}''(t, x) + \sum_{i=1}^d b_i g'_{x_i}(t, x), \\ u'_t(t, x, f) &= Lu(t, x, f). \end{aligned}$$

**La formule d'Itô pour  $\{X_t^x = (x_1 + b_1 t + \sigma_1 W_t^1, \dots, x_d + b_d t + \sigma_d W_t^d); t \in \mathbb{R}^+\}$ .** Il s'agit d'une application directe de la formule d'Itô générale (Théorème 2.6.8). Il suffit de calculer les crochets croisés entre les composantes de  $X^x$ . De la Proposition 2.6.9, pour  $i \neq j$  on déduit  $\langle X^i, X^j \rangle_t = \langle \sigma^i W^i, \sigma^j W^j \rangle_t = \sigma^i \sigma^j \langle W^i, W^j \rangle_t = 0$  car les mouvements browniens  $W^i$  et  $W^j$  sont indépendants. Cela a pour conséquence que les dérivées secondes croisées  $f''_{x_i x_j}$  ( $i \neq j$ ) n'apparaissent pas dans la formule d'Itô. Cela donne, pour des fonctions  $f$  de classe  $\mathcal{C}^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^d, \mathbb{R})$ ,

$$\begin{aligned} f(t, X_t^x) &= f(0, x) + \sum_{i=1}^d \int_0^t f'_{x_i}(s, X_s^x) \sigma_i dW_s^i + \sum_{i=1}^d \int_0^t f'_{x_i}(s, X_s^x) b_i ds \\ &\quad + \int_0^t f'_t(s, X_s^x) ds + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \int_0^t \sigma_i^2 f''_{x_i x_i}(s, X_s^x) ds. \end{aligned} \quad (2.7.1)$$

**Applications.** Le résultat suivant renseigne sur la capacité du mouvement brownien multidimensionnel à visiter un point donné, son voisinage ou bien à partir à l'infini. Comme pour la marche aléatoire simple sur  $\mathbb{Z}^d$ , les comportements possibles dépendent de la dimension  $d$ .

**Théorème 2.7.2 (Récurrence et transience)** *En dimension 2, le mouvement brownien visite infiniment souvent tout ouvert non vide<sup>9</sup> avec probabilité 1 (on dira qu'il y a récurrence sur les ouverts), alors qu'en dimension 3, le nombre de visites est fini avec probabilité 1, c'est-à-dire que le mouvement brownien part à l'infini (on dira qu'il y a transience).*

La preuve est proposée en exercice 2.7.

## 2.7.2 Mouvement brownien vectoriel corrélé

La modélisation des phénomènes physiques conduit souvent à introduire des bruits de perturbation corrélés. En termes de mouvement brownien, cela revient à introduire les processus vectoriels suivants :

**Définition 2.7.3** *On appelle mouvement brownien vectoriel (corrélé) une f.a. à trajectoires continues, à valeurs dans  $\mathbb{R}^d$ ,  $\{B_t = (B_t^1, B_t^2, \dots, B_t^d); t \in \mathbb{R}^+\}$  telle que*

- $B_0 = 0$ ;
- *tout accroissement  $B_t - B_s$  où  $(0 \leq s < t)$  suit une loi gaussienne sur  $\mathbb{R}^d$ , centrée de matrice de covariance  $(t-s)K$ , où  $K$  est la matrice de covariance du vecteur gaussien  $B_1$ .*
- *Pour tout  $0 = t_0 < t_1 < t_2 \dots < t_n$ , les accroissements  $B_{t_{i+1}} - B_{t_i}$  avec  $(0 \leq i \leq n)$  sont indépendants.*

Cette définition est valable que la matrice de covariance  $K$  soit inversible, ou non.

La fonction aléatoire associée à la coordonnée d'indice  $i$ ,  $B^i$  est un mouvement brownien unidimensionnel, de coefficient de diffusion  $\sigma_i^2 = \text{Var}(B_1^i) = K_{ii}$ , où  $K_{ii}$  est le  $i$ -ème terme de la diagonale de la matrice  $K$ . Si de plus, pour tout  $i$ ,  $K_{ii}$  est égal à 1, ces mouvements browniens sont des browniens normalisés. Mais contrairement au cas du brownien vectoriel standard, les coordonnées ne sont plus indépendantes.

**Proposition 2.7.4** *Soit  $B$  un mouvement brownien  $d$ -dimensionnel dont les coordonnées sont des browniens corrélés.*

- *Il existe une matrice orthogonale  $P$  telle que la matrice  $P^*KP = \Delta$  soit diagonale.*
- *Soit  $\sqrt{\Delta}^{-1}$  la matrice diagonale dont les termes sont les inverses des racines carrées des valeurs propres de  $\Delta$  lorsqu'elles sont non nulles, et zéro sinon. La f.a.  $\{W_t = (\sqrt{\Delta})^{-1}P^*B_t; t \in [0, T]\}$  est un mouvement brownien, dont les coordonnées sont des browniens normalisés indépendants, dont certains peuvent être nuls.*
- *Soit  $A = P(\sqrt{\Delta})$ . La matrice  $A$  est une racine carrée de  $K$ , au sens où  $AA^* = K$  et*

$$B_t = AW_t.$$

**Remarque :** le mouvement brownien  $W$  n'est pas unique, car toute transformation orthogonale d'un mouvement brownien est encore un mouvement brownien (voir exercice ??). Par suite, si  $C = P^C\sqrt{\Delta}$  est une racine carrée de  $K$ , c'est à dire vérifie  $CC^* = P^C\sqrt{\Delta}\sqrt{\Delta}^*(P^C)^* = P^C\Delta(P^C)^* = K$ , alors  $B = CW^C$  où  $W^C = (P^C)^{-1}B$ .

9. mais il ne visite pas les points.

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

**Exemple.** Le mouvement brownien à 2 dimensions (voir exercice 1.4).

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.



**L'EDP vectorielle.** Considérons des browniens décentrés corrélées de tendance  $\mu$  et de matrice de covariance  $K : X_t = x + \mu t + B_t = x + \mu t + AW_t$  avec les notations précédentes. Par changement de variable dans l'EDP de la chaleur, nous déduisons que la fonction  $u(t, x, f) = \mathbb{E}[f(x + \mu t + B_t)]$  est solution de l'EDP

$$u'_t = \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d a_{ii} u''_{x_i x_i} + \sum_{1 \leq i < j \leq d} a_{ij} u''_{x_i x_j} + \sum_{i=1}^d \mu_i u'_{x_i}$$

où  $a_{ij}$  est le terme général de la matrice de covariance  $K$ .

**La formule d'Itô pour  $X_t = x + \mu t + B_t = x + \mu t + AW_t$ .** Pour le brownien corrélé décentré, la formule d'Itô se généralise aussi par changement de variables à partir de (2.7.1). On peut aussi la déduire directement de la formule d'Itô générale, en prenant le soin de calculer les crochets croisés. En appliquant les règles de calcul associées (Proposition 2.6.9), on obtient

$$\begin{aligned} \langle X^i, X^j \rangle_t &= \langle B^i, B^j \rangle_t = \left\langle \sum_k A_{i,k} W^k, \sum_l A_{j,l} W^l \right\rangle_t = \sum_{k,l} A_{i,k} A_{j,l} \langle W^k, W^l \rangle_t \\ &= \sum_k A_{i,k} A_{j,k} t = [AA^*]_{i,j} t := K_{i,j} t \\ &= a_{i,j} t. \end{aligned}$$

Cela conduit à

$$\begin{aligned} f(t, X_t^x) &= f(0, x) + \sum_{i=1}^d \int_0^t f'_{x_i}(s, X_s^x) dB_s^i + \sum_{i=1}^d \int_0^t f'_{x_i}(s, X_s^x) \mu_i ds \\ &+ \int_0^t f'_t(s, X_s^x) ds + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \int_0^t a_{i,i} f''_{x_i x_i}(s, X_s^x) ds + \sum_{1 \leq i < j \leq d} \int_0^t a_{i,j} f''_{x_i x_j}(s, X_s^x) ds. \end{aligned}$$

**La formule d'Itô pour le mouvement brownien géométrique corrélé.** Ce processus est défini comme l'exponentielle, composante par composante, du précédent mouvement brownien arithmétique corrélé, à savoir  $X_t = (\exp(x^1 + \mu_1 t + B_t^1), \dots, \exp(x^d + \mu_d t + B_t^d))$ . D'une part,  $dX_t^i = X_t^i (\mu_i + \frac{1}{2} a_{i,i}) dt + X_t^i dB_t^i$ . D'autre part, le crochet croisé se calcule

via l'item 4 de la Proposition 2.6.9 : on a  $\langle X^i, X^j \rangle_t = \int_0^t X_s^i X_s^j a_{i,j} ds$ . Il en découle

$$\begin{aligned} f(t, X_t) &= f(0, X_0) + \sum_{i=1}^d \int_0^t f'_{x_i}(s, X_s) X_s^i dB_s^i + \sum_{i=1}^d \int_0^t f'_{x_i}(s, X_s) (\mu_i + \frac{1}{2} a_{i,i}) X_s^i ds \\ &\quad + \int_0^t f'_t(s, X_s) ds + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^d \int_0^t a_{i,i} (X_s^i)^2 f''_{x_i x_i}(s, X_s) ds \\ &\quad + \sum_{1 \leq i < j \leq d} \int_0^t a_{i,j} X_s^i X_s^j f''_{x_i x_j}(s, X_s) ds. \end{aligned}$$

## 2.8 Exercices

### Exercice 2.1

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

### Exercice 2.2

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

### Exercice 2.3

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

### Exercice 2.4

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**Exercice 2.5 Intégration par parties et processus gaussien.**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**Exercice 2.6 ★ Temps d'atteinte d'un niveau par un mouvement brownien avec dérive.**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**Exercice 2.7** Récurrence et transience du mouvement brownien.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**Exercice 2.8** Les intégrales stochastiques ne sont pas toujours d'espérance nulle.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**Exercice 2.9 ★ Loi du premier temps d'atteinte de deux niveaux.**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**Exercice 2.10 ★ Un processus ressemblant au mouvement brownien (d'après K. Hamza et F.C. Klebaner 2007).**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

LES OUTILS STOCHASTIQUES DES MARCHÉS FINANCIERS

Texte supprimé de la version électronique.

ECOLE POLYTECHNIQUE

ECOLE POLYTECHNIQUE

ECOLE POLYTECHNIQUE

LES OUTILS STOCHASTIQUES DES MARCHÉS FINANCIERS



## Chapitre 3

# Quelques processus continus essentiels

Nous présentons quelques autres processus uni-dimensionnels, à trajectoires continues, qui dérivent du mouvement brownien :

1. le mouvement brownien géométrique,
2. le processus d'Ornstein-Uhlenbeck,
3. les équations différentielles stochastiques.

Nous donnons ensuite les formules d'Itô et les équations aux dérivées partielles associées à ces processus.

Le premier exemple est essentiel dans la modélisation des cours d'actions et autres actifs financiers. Le second est un exemple important d'application en physique et en finance (pour modéliser les courbes de taux d'intérêt, les volatilités stochastiques ou tout phénomène stochastique de retour à la moyenne). Enfin, le dernier correspond à une famille encore plus générale, englobant formellement les deux premiers exemples, au détriment éventuel des propriétés explicites.

### 3.1 Mouvement brownien géométrique

#### 3.1.1 Définition et propriétés

**Définition 3.1.1 (du mouvement brownien géométrique)** *Un mouvement brownien géométrique, de valeur initiale  $S_0 > 0$  déterministe, de coefficient de tendance (ou dérive)  $\mu$  et de coefficient de diffusion  $\sigma$ , est un processus  $(S_t)_{t \geq 0}$  défini par*

$$S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}, \quad (3.1.1)$$

où  $\{W_t; t \geq 0\}$  est mouvement brownien standard réel.

Comme l'argument de l'exponentielle est de loi Normale, la variable  $S_t$  (à  $t$  fixé) est dite Log-Normale.

C'est un processus à trajectoires continues, qui prend des valeurs strictement positives. Comme nous le verrons dans le chapitre 7, le mouvement brownien géométrique sert couramment de modèle de prix d'actifs financiers (voir Samuelson [30]). Ce choix se justifie d'une part, par la positivité de  $S$  et d'autre part, par les propriétés gaussiennes simples de ses rendements :

- les rendements  $\text{Log}(S_t) - \text{Log}(S_s)$  suivent une loi gaussienne de moyenne  $(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)(t-s)$  et de variance  $\sigma^2(t-s)$ .
- Pour tout  $0 < t_1 < t_2 \dots < t_n$ , les accroissements relatifs  $\{\frac{S_{t_{i+1}}}{S_{t_i}}; 0 \leq i \leq n-1\}$  sont indépendants, et de même loi.

L'hypothèse de rendement gaussien est invalidé en pratique (voir les travaux de Mandelbrot dès 1963), mais néanmoins, ce modèle reste très utilisé dans toutes les salles de marché, nous y reviendrons.

**Densités de transition du processus.** Des propriétés d'indépendances des accroissements browniens, il est facile de montrer que  $(S_t)_t$  est un processus de Markov. Son noyau de transition  $Q(t, S_0, dy)$  est défini par  $\mathbb{E}[f(S_t)|S_0] = \int_{\mathbb{R}} f(y)Q(t, S_0, dy) = \int_{\mathbb{R}} g_{\mu, \sigma^2}^S(t, S_0, y)f(y)dy$  avec une densité de transition  $g_{\mu, \sigma^2}^S(t, S_0, y)$  qu'on peut déterminer explicitement en fonction de la densité gaussienne  $g(t, y) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp(-y^2/2t)$ . En effet, on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}[f(S_t)|S_0] &= \int_{\mathbb{R}} f(S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + y})g(\sigma^2 t, y)dy \\ &= \int_{\mathbb{R}^+} f(z)g(\sigma^2 t, \log(z/S_0) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t) \frac{dz}{z}, \end{aligned}$$

d'où

$$g_{\mu, \sigma^2}^S(t, S_0, y) = g\left(\sigma^2 t, \log(y/S_0) - (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t\right) \frac{1}{y} \mathbf{1}_{y>0}. \quad (3.1.2)$$

**Pourquoi appeler  $\mu$  le paramètre de tendance de  $S$  alors que c'est  $\mu - \frac{1}{2}\sigma^2$  qui apparaît dans la moyenne des rendements ?** Il faut chercher la raison dans la décomposition d'Itô de  $S$  qui s'obtient à partir de la formule d'Itô sur le brownien. Appliquons le corollaire 2.4.2 au mouvement brownien arithmétique  $X_t = \log(S_0) + (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t$  et à la fonction  $\psi(t, z) = \exp(z)$  ( $\psi'_t(t, z) = 0, \psi'_z(t, z) = \psi''_{zz}(t, z) = \psi(t, z)$ ); on obtient que  $S_t = \psi(t, X_t)$  satisfait

$$\begin{aligned} S_t &= S_0 + \int_0^t S_s \sigma dW_s + \int_0^t S_s (\mu - \frac{1}{2}\sigma^2) ds + \int_0^t \frac{1}{2}\sigma^2 S_s ds \\ &= S_0 + \int_0^t S_s \mu ds + \int_0^t S_s \sigma dW_s. \end{aligned}$$

Très souvent, l'écriture intégrale est transformée sous forme différentielle

$$dS_t = \mu S_t dt + \sigma S_t dW_t, \quad \text{ou bien} \quad \frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t. \quad (3.1.3)$$

C'est cette dernière représentation qui justifie l'appellation de  $\mu$  comme paramètre de tendance.

### 3.1.2 Équation aux dérivées partielles pour le mouvement brownien géométrique

Le **générateur** associé à ce processus est donné par

$$L_{\mu, \sigma^2}^S \phi(x) = \frac{1}{2} [\sigma x]^2 \phi''(x) + \mu x \phi'(x). \quad (3.1.4)$$

C'est cet opérateur différentiel du second ordre qui donne la forme des EDPs que nous allons écrire. En effet, on vérifie par un calcul simple à partir de l'expression (3.1.2) de  $g_{\mu, \sigma^2}^S(t, S_0, y)$  que (pour  $y > 0$  fixé)

$$\begin{aligned} \partial_t g_{\mu, \sigma^2}^S(t, S_0, y) &= \frac{1}{2} [\sigma S_0]^2 \partial_{S_0, S_0}^2 g_{\mu, \sigma^2}^S(t, S_0, y) + \mu S_0 \partial_{S_0} g_{\mu, \sigma^2}^S(t, S_0, y) \\ &= L_{\mu, \sigma^2}^S g_{\mu, \sigma^2}^S(t, S_0, y). \end{aligned}$$

Ainsi l'équation satisfaite par  $u(t, S_0, f) = \mathbb{E}[f(S_t)|S_0] = \int_{\mathbb{R}^+} g_{\mu, \sigma^2}^S(t, S_0, y) f(y) dy$  est  $\partial_t u(t, S_0, f) = L_{\mu, \sigma^2}^S u(t, S_0, f)$ . L'opération de dérivation sous l'intégrale se justifie par le théorème de dérivation de Lebesgue, sous des hypothèses appropriées de croissance de ce qui apparaît sous le signe intégrale. Il suffit par exemple que  $\sup_{y>0} \frac{|f(y)|}{1+y^p} < +\infty$  pour un  $p \geq 0$ .

**Proposition 3.1.2** *Considérons une fonction  $f$  avec  $\sup_{y>0} \frac{|f(y)|}{1+y^p} < +\infty$  pour un  $p \geq 0$ . La fonction  $(t, S_0) \mapsto u(t, S_0, f) = \mathbb{E}[f(S_t)|S_0]$  satisfait l'équation aux dérivées partielles*

$$\begin{cases} u'_t(t, x, f) &= L_{\mu, \sigma^2}^S u(t, x, f) \quad \text{pour } (t, x) \in ]0, \infty[ \times ]0, \infty[, \\ u(0, x, f) &= f(x) \quad \text{dans } ]0, \infty[. \end{cases} \quad (3.1.5)$$

De plus, si  $f$  est une fonction de classe  $\mathcal{C}_b^{1,2}$  et  $U$  un temps d'arrêt borné, alors

$$\mathbb{E}[f(t, S_t)] = f(0, S_0) + \int_0^t \mathbb{E}[L_{\mu, \sigma^2}^S f(s, S_s) + f'_t(s, S_s)] ds, \quad (3.1.6)$$

$$\mathbb{E}[f(U, S_U)] = f(0, S_0) + \mathbb{E}\left[\int_0^U (L_{\mu, \sigma^2}^S f(s, S_s) + f'_t(s, S_s)) ds\right]. \quad (3.1.7)$$

Nous avons déjà montré (3.1.5). Les équations (3.1.6) et (3.1.7) s'obtiennent comme à la Proposition 2.2.3 et au Théorème 2.2.4.

### 3.1.3 Formule d'Itô pour le mouvement brownien géométrique

Puisque  $S_t$  est une fonction du mouvement brownien  $W_t$ ,  $f(S_t)$  est aussi une fonction de  $W_t$ . La décomposition d'Itô de  $f(S_t)$  s'obtient donc immédiatement à partir de la formule d'Itô sur le brownien, en composant les fonctions (ou bien en appliquant la forme générale du Théorème 2.6.3). On obtient ainsi

**Théorème 3.1.3 (Formule d'Itô)** Soit  $f \in C^{1,2}(\mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+, \mathbb{R})$ , une fonction continûment dérivable une fois en  $t$  et deux fois en  $x$ . Alors avec probabilité 1, on a pour tout  $t \geq 0$

$$f(t, S_t) = f(0, S_0) + \int_0^t f'_x(s, S_s) \sigma S_s dW_s + \int_0^t [f'_t + L_{\mu, \sigma^2}^S f](s, S_s) ds \quad (3.1.8)$$

$$= f(0, S_0) + \int_0^t f'_x(s, S_s) dS_s + \int_0^t [f'_t(s, S_s) + \frac{1}{2} [\sigma S_s]^2 f''_{xx}(s, S_s)] ds. \quad (3.1.9)$$

Le terme  $\int_0^t f'_x(s, S_s) S_s dW_s$  est une intégrale stochastique : c'est la limite p.s. de

$$\sum_{t_i \leq t} f'_x(t_i, S_{t_i}) S_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

le long de la subdivision dyadique d'ordre  $n$ . Lorsque  $f$  a des dérivées bornées, cette intégrale stochastique est centrée (comparer avec (3.1.6)).

La forme intégrale (3.1.8) s'écrit aussi sous forme différentielle

$$d[f(t, S_t)] = f'_x(t, S_t) \sigma S_t dW_t + [f'_t + L_{\mu, \sigma^2}^S f](t, S_t) dt. \quad (3.1.10)$$

## 3.2 Processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Revenons à la physique et au mouvement brownien introduit par Einstein en 1905. Afin de proposer une modélisation plus adéquate du phénomène de diffusion des particules, nous introduisons le processus d'Ornstein-Uhlenbeck et ses principales propriétés.

### 3.2.1 Le mouvement brownien physique ou processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Nous avons construit le mouvement brownien comme un modèle pour une particule microscopique en suspension dans un liquide soumise à l'agitation thermique. Une critique importante faite à cette modélisation concerne l'hypothèse que les accroissements du déplacement sont indépendants, ignorant les effets de la vitesse de la particule au début de la période, dus à l'inertie de la particule.

Introduisons la masse  $m$  de la particule et sa vitesse  $\dot{X}(t)$ . La variation de la quantité de mouvement  $m\dot{X}(t + \delta(t)) - m\dot{X}(t)$  est égale à la résistance du milieu pendant le temps  $\delta t$ ,  $-k\dot{X}(t)\delta t$ , plus la variation de mouvement due aux chocs moléculaires, qu'on peut supposer à accroissements indépendants, stationnaires, et donc associée à un mouvement brownien non normalisé. Le processus ainsi modélisé s'appelle parfois le *brownien physique*.

L'équation des accroissements devient

$$m \delta[\dot{X}(t)] = -k\dot{X}(t)\delta t + m\sigma\delta W_t.$$

Les trajectoires du mouvement brownien n'étant pas différentiables, nous donnons un sens à une telle équation de manière intégrale

$$m\dot{X}(t) = m\dot{X}(0) + \int_0^t -k\dot{X}(s)ds + m\sigma W_t.$$

$\dot{X}(t)$  est donc solution de l'équation différentielle stochastique linéaire (dite équation de Langevin)

$$V_t = V_0 - a \int_0^t V_s ds + \sigma W_t$$

où  $a = \frac{k}{m}$ . Nous ne savons pas a priori si cette équation admet une solution, puisque  $W$  n'est pas différentiable. Mais cette dernière difficulté peut être levée par un simple changement de variable, en posant  $Z_t = V_t - \sigma W_t$ , qui nous conduit à la nouvelle équation

$$Z_t = V_0 - a \int_0^t (Z_s + \sigma W_s) ds,$$

qui est une équation différentielle linéaire ordinaire que l'on peut résoudre trajectoire par trajectoire. La méthode de variation des constantes donne la représentation de l'unique solution de cette équation comme

$$Z_t = V_0 e^{-at} - \sigma \int_0^t a e^{-a(t-s)} W_s ds.$$

La solution de l'équation initiale est donc

$$V_t = V_0 e^{-at} + \sigma W_t - \sigma \int_0^t a e^{-a(t-s)} W_s ds.$$

Cette dernière intégrale aussi se transformer par la formule d'intégration par parties en une intégrale de Wiener (voir Proposition 2.5.1) :

$$\int_0^t e^{as} dW_s = e^{at} W_t - \int_0^t a e^{as} W_s ds.$$

On obtient ainsi

$$V_t = V_0 e^{-at} + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s.$$

### 3.2.2 Propriétés du processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Revenons à l'équation de Langevin et décrivons les propriétés du processus de vitesse solution. Nous avons maintenant tous les éléments pour étudier simplement ce nouveau processus et montrer en quoi il diffère fondamentalement du mouvement brownien. Dans toute la suite, nous supposons  $a > 0$ .

#### Théorème 3.2.1

1. L'équation de Langevin

$$dV_t + aV_t dt = \sigma dW_t \quad (3.2.1)$$

possède pour toute condition initiale  $V_0$  donnée, une solution unique donnée par

$$V_t = V_0 e^{-at} + \sigma W_t - a\sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} W_s ds = V_0 e^{-ta} + \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s.$$

La f.a. continue  $V$  est appelée processus d'Ornstein-Uhlenbeck.

2. Si  $V_0$  est une v.a. gaussienne indépendante de  $W$ , la f.a.  $V$  est un processus gaussien, de paramètres

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(V_t) &= \mathbb{E}(V_0) e^{-at}, \\ \text{Var}(V_t) &= \text{Var}(V_0) e^{-2at} + \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at}), \\ \text{Cov}(V_t, V_s) &= e^{-a(t-s)} \text{Var}(V_s) \quad \text{pour } t > s. \end{aligned} \quad (3.2.2)$$

C'est un exemple de processus gaussien stationnaire, c'est à dire dont la fonction de covariance est donnée par

$$K^{O,U}(s, t) = e^{-a(t-s)} K^{O,U}(s, s).$$

3. *Distribution invariante.* En particulier, si la variable  $V_0$  est une v.a. gaussienne centrée et de variance  $\text{Var}(V_0) = \frac{\sigma^2}{2a}$ , pour tout  $t$   $V_t$  a même distribution, qui est appelée la distribution invariante du processus d'Ornstein-Uhlenbeck. La fonction de covariance vaut alors  $K^{O,U}(s, t) = e^{-a(t-s)} \frac{\sigma^2}{2a}$ . On parle aussi d'Ornstein-Uhlenbeck stationnaire.
4. Si  $V_0$  est une v.a. gaussienne indépendante de  $W$ , alors quand  $t \rightarrow +\infty$ ,  $\mathbb{E}(V_t)$  converge vers 0, et  $\text{Var}(V_t)$  converge vers  $\frac{\sigma^2}{2a}$ , et donc la v.a.  $V_t$  converge en loi vers la distribution invariante, qui est la distribution d'équilibre.

Sur la figure 3.1, nous avons représenté quelques trajectoires de ce processus, permettant de visualiser le phénomène de retour à moyenne nulle (les procédures de simulation sont expliquées au paragraphe A.4 en appendice).

Preuve:

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

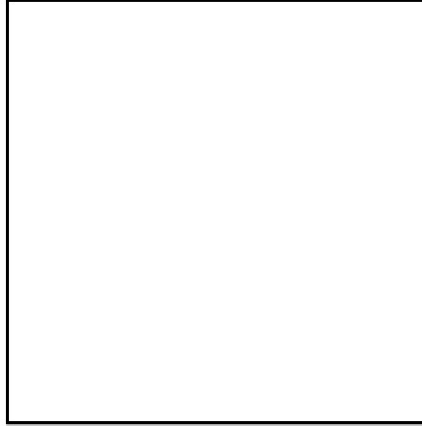


FIGURE 3.1 – Trajectoires d’Ornstein-Uhlenbeck avec  $V_0 = 1$ ,  $a = 2$  et  $\sigma = 0.1$ .

Texte supprimé de la version électronique.

□

**Exemple.** (Construction d’un processus O.U. stationnaire.)

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

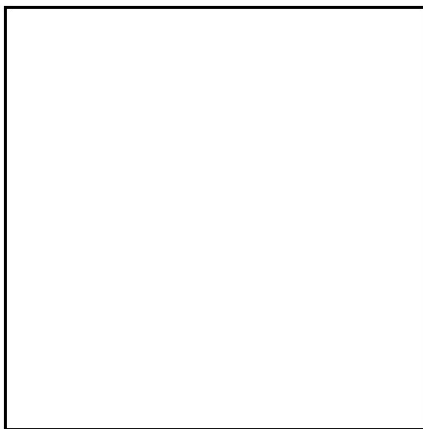


FIGURE 3.2 – Trajectoire de  $X_t = e^{-t}B(e^{2t})$ .

### 3.2.3 EDP associée au processus d'Ornstein-Uhlenbeck

Comme dans le cas du mouvement brownien, il est aisé de décrire l'équation aux dérivées partielles satisfaite par les fonctions  $v(t, x, f) = \mathbb{E}[f(V_t)|V_0 = x]$ .

**Proposition 3.2.2** *L'opérateur elliptique associé au processus d'Ornstein-Uhlenbeck est de la forme*

$$Lg(t, x) = \frac{1}{2}\sigma^2 g''_{xx}(t, x) - \alpha g'_x(t, x).$$

Pour une fonction  $f$  borélienne bornée<sup>1</sup> donnée, l'EDP satisfaite par  $v(t, x, f) = \mathbb{E}[f(V_t)|V_0 = x]$  est

$$v'_t(t, x, f) = Lv(t, x, f) \text{ pour } (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}, \quad v(0, x, f) = f(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}.$$

---

1. Cette condition peut être relaxée en  $|f(x)| \leq C \exp\left(\frac{|x|^2}{2\alpha}\right)$  pour tout  $x$ , avec des constantes positives  $C$  et  $\alpha \geq \frac{\sigma^2}{2a}$ .



Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

### Notes bibliographiques

Le livre de Nelson [24] comporte une importante discussion sur le mouvement brownien et le processus d'Ornstein-Uhlenbeck, tant sur le plan des propriétés mathématiques que sur leurs capacités à modéliser correctement le phénomène physique de diffusion des particules.

◆ ◆  
POUR EN SAVOIR PLUS  
◆

## 3.3 Equations différentielles stochastiques

### 3.3.1 Définition

Nous commençons par donner une définition informelle des solutions d'équation différentielle stochastique (EDS) qui généralisent les équations différentielles ordinaires  $x'_t = b(t, x_t)$ .

**Définition 3.3.1** La f.a. réelle  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  est solution de l'EDS avec point initial  $x$ , coefficient de dérive  $b(\cdot, \cdot)$  et coefficient de diffusion  $\sigma(\cdot, \cdot)$  si pour  $t \in [0, T]$

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$$

où  $(W_t)_t$  est un mouvement brownien standard réel.

Nous avons déjà rencontré plusieurs exemples de telles équations :

- mouvement brownien avec dérive (définition 1.3.2) : prendre  $b(t, x) = b$  et  $\sigma(t, x) = \sigma$ .
- mouvement brownien géométrique (définition 3.1.1) : prendre  $b(t, x) = \mu x$  et  $\sigma(t, x) = \sigma x$ .
- processus d'Ornstein-Uhlenbeck (théorème 3.2.1) : prendre  $b(t, x) = -ax$  et  $\sigma(t, x) = \sigma$ .

Résoudre une EDS (existence, unicité) avec des coefficients  $b$  et  $\sigma$  généraux est possible sous des conditions ad-hoc mais cela dépasse largement le cadre de ce livre. Ces questions sont traitées dans de nombreux ouvrages de calcul stochastique (voir par exemple [27]).

### 3.3.2 La transformation de Lamperti (1964)

Dans certains cas, la solution d'une EDS se construit simplement à partir du mouvement brownien, en se mettant sous la forme  $X_t = h(t, w_0 + W_t)$ , c'est-à-dire une fonction du brownien (c'est le cas par exemple du brownien géométrique). Cela s'obtient à partir d'un changement de variables, connu dans ce contexte sous le nom de transformation de Lamperti. Toutefois, cette situation n'est pas générique et les solutions d'EDS sont plutôt des fonctionnelles de la trajectoire brownienne comme le laisse deviner le cas du processus d'Ornstein-Uhlenbeck  $V_t = V_0 e^{-at} + \sigma W_t - a\sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} W_s ds$ .

**Théorème 3.3.2 (Résolution, formule d'Itô, EDP)** Soit une fonction<sup>2</sup>  $h : [0, T] \times \mathbb{R} \mapsto E$  de classe  $C^{1,2}$  et telle que pour tout  $t$ , la fonction  $y \mapsto h(t, y)$  est un difféomorphisme ; notons  $H(t, \cdot)$  son inverse, de classe  $C^2$  de  $E$  dans  $\mathbb{R}$ . Alors pour tout  $x \in E$ ,

$$X_t = h(t, H(0, x) + W_t)$$

est solution de l'EDS

$$X_t = x + \int_0^t b(s, X_s) ds + \int_0^t \sigma(s, X_s) dW_s$$

avec  $b(t, y) = [h'_t(t, \cdot) + \frac{1}{2} h''_{xx}(t, \cdot)] \circ H(t, y)$  et  $\sigma(t, y) = [h'_x(t, \cdot)] \circ H(t, y)$ .<sup>3</sup>

Si de plus on définit  $L$  l'opérateur différentiel associé à  $X$  par

$$Lg(t, x) = \frac{1}{2} \sigma^2(t, x) g''_{xx}(t, x) + b(t, x) g'_x(t, x),$$

2. dans les exemples précédents,  $E = \mathbb{R}$  ou  $E = \mathbb{R}^+$ .

3. Inversement, partant de  $\sigma(t, y)$ , la fonction  $H$  est définie par  $H(t, x) = \int_0^x \frac{1}{\sigma(t, y)} dy$ , à une constante additive près.

alors pour toute fonction  $f$  à support compact, l'EDP satisfaite par  $v(t, x, f) = \mathbb{E}[f(X_t)|X_0 = x]$  est

$$v'_t(t, x, f) = Lv(t, x, f) \text{ pour } (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times E, \quad v(0, x, f) = f(x) \text{ pour } x \in E.$$

Le processus  $X$  est à variation quadratique finie et son crochet est égal à

$$\langle X \rangle_t = \int_0^t \sigma^2(X_s) ds.$$

La formule d'Itô appliquée à  $X$  s'écrit :

$$\begin{aligned} df(t, X_t) &= (f'_x(t, X_t)b(X_t) + \frac{1}{2} f''_{xx}(t, X_t)\sigma^2(t, X_t) + f'_t(t, X_t))dt \\ &\quad + f'_x(t, X_t)\sigma(t, X_t)dW_t \\ &= (f'_t + Lf)(t, X_t)dt + f'_x(t, X_t)\sigma(t, X_t)dW_t. \end{aligned}$$

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

La détermination de  $b$  et  $\sigma$  se fait comme pour le mouvement brownien géométrique (voir équation (3.1.3)), nous laissons la preuve en exercice.

Pour l'EDP, il suffit de déterminer comme auparavant l'EDP satisfaite par la densité de transition  $p(t, x, y)$  de  $X$ . Elle s'exprime explicitement à l'aide de la densité gaussienne :  $p(t, x, y) = \frac{g(t, [h(t, \cdot)]^{-1}(y) - [h(0, \cdot)]^{-1}(x))}{[h'_x(t, \cdot)]\sigma[h(t, \cdot)]^{-1}(y)}$ . L'hypothèse de support compact sur  $f$  permet de justifier facilement la dérivation de  $v(t, x, f)$ .

Le calcul du crochet s'effectue par application de la Proposition 2.6.4, item 5). La formule d'Itô découle de la formule générale (Théorème 2.6.3) ou de celle du brownien (Théorème 2.4.1) en différenciant les changements de variables.  $\square$

**Lien processus/EDP.** Ce que nous pointons dans le théorème précédent, c'est un lien systématique entre la dynamique de  $X$  (via ses coefficients  $b$  et  $\sigma$ ) et les coefficients de l'opérateur  $L$  de l'EDP associée. Nous l'avons observé sur quelques exemples (comme l'équation de la chaleur et le brownien); l'écrire dans un cadre général d'EDS montre la généralité de ce lien. Ces représentations de solution d'EDP sous forme d'espérance sont connues sous le nom de formules de Feynman-Kac (voir Durrett [7] par exemple) et sont le point de départ d'innombrables réflexions d'ordre théorique (techniques probabilistes pour obtenir des résultats sur les EDPs, ou bien techniques EDPistes pour avoir des informations sur les lois des processus) ou d'ordre numérique (utiliser des outils déterministes ou stochastiques pour calculer la solution stochastique ou déterministe). Le cadre multidimensionnel (que nous ne décrivons pas ici) est similaire. Enfin, nous ferons aussi la lumière sur cette relation processus/EDP dans le cadre du processus de Poisson (voir chapitre 4).

### 3.3.3 La représentation de Doss (1977)

Une autre technique de construction de solution d'EDS en dimension 1 est celle de Doss. La solution  $X$  est construite comme une fonctionnelle explicite du mouvement brownien, à l'aide d'équation différentielle ordinaire (EDO). Pour cela, nous supposons que les coefficients  $b$  et  $\sigma$  sont indépendants du temps, bornés, deux fois continûment dérivables, à dérivées bornées, de sorte que les quantités introduites ci-dessous sont bien définies (pour les hypothèses précises, voir [27] par exemple).

Notons  $u(x, y)$  la solution à l'EDO (à  $y$  fixé)

$$u'_x(x, y) = \sigma(u(x, y)), \quad u(0, y) = y. \quad (3.3.1)$$

Cette solution est strictement croissante en  $y$  et permet de définir la fonction  $\rho(x, y)$  par

$$u'_y(x, y) = \frac{1}{\rho(x, y)}. \quad (3.3.2)$$

Introduisons alors  $f(x, y) = \rho(x, y)(b - \frac{1}{2}\sigma\sigma')(u(x, y))$ , et notons  $(Y_t)_t$  le processus solution de l'EDO

$$Y'_t = f(W_t, Y_t), \quad Y_0 = X_0. \quad (3.3.3)$$

Le résultat est alors le suivant :

**Théorème 3.3.3** *Le processus  $(X_t := u(W_t, Y_t))_t$  est solution de*

$$X_t = X_0 + \int_0^t b(X_s)ds + \int_0^t \sigma(X_s)dW_s.$$

On peut aussi vérifier que ce processus est à variation quadratique finie. Les expressions de son crochet et sa formule d'Itô sont identiques à celles données au Théorème 3.3.2.

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

### 3.4 Exercices

**Exercice 3.1** Un calcul fondamental de la finance de marché sur les variables log-normales.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**Exercice 3.2** Processus d'Ornstein-Uhlenbeck avec coefficients inhomogènes en temps.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**Exercice 3.3**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

LES OUTILS STOCHASTIQUES DES MARCHÉS FINANCIERS

Texte supprimé de la version électronique.

#### Exercice 3.4

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

ECOLE POLYTECHNIQUE

ECOLE POLYTECHNIQUE

ECOLE POLYTECHNIQUE

LES OUTILS STOCHASTIQUES DES MARCHÉS FINANCIERS



## Chapitre 4

# Processus à sauts

Dans ce chapitre, nous étudions les processus à sauts les plus simples, à savoir les processus de Poisson composés. Nous nous restreignons aux intensités de saut indépendantes du temps. Nous insistons sur les transformations exponentielles, qui permettent d'identifier les lois marginales, ou qui seront à la base des changements de probabilité du chapitre 5. Du point de vue modélisation, nous introduisons ensuite des modèles mixtes superposant des sauts et une partie brownienne. Enfin, comme dans le cas brownien, nous établissons une formule d'Itô et le lien avec les EDPs.

### 4.1 Processus de Poisson composé

Nous rappelons qu'un processus de Poisson  $(N_t)_t$  de paramètre  $\lambda > 0$  est un processus de comptage défini par

$$N_t = \sum_{k \geq 1} \mathbf{1}_{T_k \leq t}$$

où les v.a.  $(T_k - T_{k-1})_{k \geq 0}$  sont des v.a. i.i.d. de loi exponentielle  $\mathcal{E}(\lambda)$  (par convention  $T_0 = 0$ ). C'est un processus continu à droite avec des limites à gauche (on utilise souvent l'acronyme *càdlàg*). On utilise aussi la définition suivante, qui est équivalente.

**Définition 4.1.1 Processus de Poisson.**  $(N_t)_t$  est un processus de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$  si

- $N_0 = 0$  ;
- $N$  est un processus à accroissements indépendants ;
- pour  $t > s$ ,  $N_t - N_s$  est une variable de Poisson de paramètre  $\lambda(t - s)$  :

$$\mathbb{P}(N_t - N_s = k) = e^{-\lambda(t-s)} \frac{[\lambda(t-s)]^k}{k!}.$$

$N$  est le prototype de processus à sauts (sauts de taille 1 uniquement). Il est intéressant de pouvoir considérer des sauts plus généraux, d'amplitude aléatoire réelle de loi décrite<sup>1</sup> par la

1. on suppose dans la suite  $\nu(\{0\}) = 0$ , c'est-à-dire que les sauts sont différents de 0!!

mesure de probabilité  $\nu(dy)$ . Cela conduit à la définition du processus de Poisson composé :

**Définition 4.1.2 Processus de Poisson composé.**  $(X_t)_t$  est un processus de Poisson composé de caractéristiques  $(\lambda, \nu)$  si

$$X_t = \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$$

avec  $(Y_i)_i$  des v.a. i.i.d. de loi  $\nu$ ,  $N$  un processus de Poisson de paramètre  $\lambda > 0$ ,  $(Y_i)_i$  et  $N$  étant indépendants.

Le résultat suivant caractérise complètement la loi du processus  $X$ .

**Proposition 4.1.3**  $(X_t)_t$  est un processus à accroissements indépendants et stationnaires. La loi de  $X_t$  est donnée par sa fonction caractéristique : pour  $u \in \mathbb{R}$ , on a

$$\mathbb{E}(e^{iuX_t}) = e^{\lambda t \mathbb{E}(e^{iuY} - 1)}.$$

En particulier, si  $Y$  est d'espérance finie, on a

$$\mathbb{E}(X_t) = \lambda t \mathbb{E}(Y).$$

Si  $Y$  est de variance finie, on a

$$\text{Var}(X_t) = \lambda t \mathbb{E}(Y^2).$$

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

Pour une fonction  $f$  donnée, définissons

$$X_t(f) := \sum_{k=1}^{N_t} f(Y_k). \quad (4.1.1)$$

Clairement,  $(X_t(f))_t$  est un processus de Poisson composé, avec des sauts d'amplitude  $f(Y)$ . De la proposition 4.1.3, on obtient donc

**Proposition 4.1.4** *Pour tout  $u \in \mathbb{R}$  et toute fonction  $f$ , on a*

$$\mathbb{E}(e^{iuX_t(f)}) = e^{\lambda t \mathbb{E}(e^{iu f(Y)} - 1)}.$$

## 4.2 Modèle mixte brownien-Poisson

Souvent, les phénomènes stochastiques à modéliser en finance sont la juxtaposition de périodes à trajectoires continues (de type mouvement brownien), intercalées par des sauts représentant des chocs imprévus (modélisés par les sauts d'un processus de Poisson composé). Dans ce paragraphe, nous définissons de tels modèles mixtes et donnons quelques-unes de leurs propriétés.

### 4.2.1 Définitions

**Définition 4.2.1 (Modèle mixte brownien-Poisson arithmétique)** *Un processus mixte brownien-Poisson arithmétique de caractéristiques  $(\mu, \sigma, \lambda, \nu)$  s'écrit sous la forme*

$$X_t = x + \mu t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i,$$

où

1.  $(W_t)_t$  est un mouvement brownien standard ;
2.  $(\sum_{i=1}^{N_t} Y_i)_t$  est un processus de Poisson composé avec intensité de saut  $\lambda$  et loi commune  $\nu$  pour les sauts  $(Y_i)_i$  ;
3. les deux processus sont indépendants.

Ce modèle correspond à la simple superposition d'un mouvement brownien et d'un processus de Poisson composé. C'est encore un processus à accroissements indépendants et stationnaires. En passant à l'exponentielle, on obtient le processus mixte brownien-Poisson géométrique.

**Définition 4.2.2 (Modèle mixte brownien-Poisson géométrique)** *Un processus mixte brownien-Poisson géométrique de caractéristiques  $(\mu, \sigma, \lambda, \nu)$  s'écrit sous la forme*

$$S_t = S_0 \exp \left( \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} \ln(1 + Y_i) \right) \quad (4.2.1)$$

où

1.  $(W_t)_t$  est un mouvement brownien standard ;
2.  $(\sum_{i=1}^{N_t} \ln(1 + Y_i))_t$  est un processus de Poisson composé avec intensité de saut  $\lambda$  et loi commune  $\nu$  pour les sauts  $(Y_i)_i$  ;
3. les deux processus sont indépendants.

On suppose que  $Y_i > -1$  p.s. (autrement dit, le support de la mesure  $\nu$  est dans  $] -1, \infty[$ ).

On peut écrire aussi

$$S_t = S_0 \exp \left( \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right) \prod_{i=1}^{N_t} (1 + Y_i). \quad (4.2.2)$$

Interprétons cette identité lorsque  $S$  modélise le cours d'un titre financier. Entre deux sauts, le titre se comporte comme un mouvement brownien géométrique. A des intervalles de temps de loi exponentielle de paramètre  $\lambda$  (correspondant par exemple à l'arrivée d'informations importantes dans le marché), le titre varie de  $Y_i\%$  (pour rendre compte de l'impact de ces informations).

## 4.2.2 Propriétés

Nous énonçons maintenant des résultats sur les deux premiers moments et les propriétés de martingales de ces modèles mixtes. La propriété de martingales est importante pour les aspects valorisation de produits financiers (voir Chapitre 7).

**Proposition 4.2.3 (Propriétés dans le modèle mixte brownien-Poisson arithmétique)** *Supposons que  $Y$  ait les deux premiers moments finis. Dans un tel modèle, les moyenne et variance de  $X_t = x + \mu t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$  sont données par*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(X_t) &= x + \mu t + \lambda t \mathbb{E}(Y), \\ \text{Var}(X_t) &= \sigma^2 t + \lambda t \mathbb{E}(Y^2). \end{aligned}$$

De plus,  $(X_t)_t$  est martingale (dans sa filtration naturelle) si et seulement si  $\mu + \lambda \mathbb{E}(Y) = 0$ .

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

**Proposition 4.2.4 (Propriétés dans le modèle mixte brownien-Poisson géométrique)** *Supposons que  $Y$  ait les deux premiers moments finis. Dans un tel modèle, les moyenne et variance de  $S_t = S_0 \exp\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} \ln(1 + Y_i)\right)$  sont données par*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_t) &= S_0 e^{t(\mu + \lambda \mathbb{E}(Y))}, \\ \text{Var}(S_t) &= [\mathbb{E}(S_t)]^2 (e^{t(\sigma^2 + \lambda \mathbb{E}(Y^2))} - 1).\end{aligned}$$

*De plus,  $(S_t)_t$  est une martingale (dans sa filtration naturelle) si et seulement si  $\mu + \lambda \mathbb{E}(Y) = 0$ .*

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

## 4.3 Équation de la chaleur avec noyau intégro-différentiel

L'objectif de ce paragraphe est de mettre en évidence la connexion entre espérance de processus et EDP. Pour cela, nous énonçons des résultats de type *formule d'Itô en espérance* (voir Proposition 2.2.3 dans le cas brownien).

### 4.3.1 Modèle mixte brownien-Poisson arithmétique

Ici, nous considérons le cas où le processus  $X$  est la somme d'un mouvement brownien avec dérive  $\mu$  et coefficient de diffusion  $\sigma$ , et d'un processus de Poisson composé de caractéristiques  $(\lambda, \nu)$  (avec indépendance des 2 processus) :

$$X_t = x + \mu t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i. \quad (4.3.1)$$

Pour exhiber le lien avec les EDPs, nous n'étudions d'abord que la partie avec sauts ( $\mu = \sigma = 0$ ).

**Proposition 4.3.1** *Si  $X$  est un processus de Poisson composé  $(\lambda, \nu)$  issu de  $x$ , alors pour toute fonction<sup>2</sup>  $f \in C_b^{1,0}$  on a*

$$\mathbb{E}(f(t, X_t)) = f(0, x) + \mathbb{E} \left( \int_0^t \left[ f'_t(s, X_s) + \lambda \int_{\mathbb{R}} (f(s, X_s + y) - f(s, X_s)) \nu(dy) \right] ds \right). \quad (4.3.2)$$

---

2. si la mesure  $\nu$  intègre toute fonction à croissance exponentielle en l'infini, alors on peut relâcher la condition de bornitude sur  $f$  et sa dérivée en temps en une condition de croissance sous-exponentielle en l'infini.

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

**Théorème 4.3.2** *Si  $X$  est un processus mixte brownien-Poisson arithmétique de type (4.3.1), alors pour toute fonction<sup>3</sup>  $f \in C_b^{1,2}$  on a*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(t, X_t)) = f(0, x) + \mathbb{E} \left( \int_0^t \left[ f'_t(s, X_s) + \mu f'_x(s, X_s) + \frac{1}{2} \sigma^2 f''_{xx}(s, X_s) \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda \int_{\mathbb{R}} (f(s, X_s + y) - f(s, X_s)) \nu(dy) \right] ds \right). \end{aligned} \quad (4.3.3)$$

**Remarque 4.3.3** *C'est la généralisation de ce que nous avons obtenu individuellement pour le mouvement brownien (égalité (2.2.10)) et pour le processus de Poisson composé (égalité (4.3.2)).*

*Comme pour le théorème 2.2.4, on peut remplacer dans le résultat précédent le temps  $t$  déterministe par un temps d'arrêt  $U$  borné.*

Preuve :

---

3. là encore, on peut relâcher les conditions de croissance sur  $f$  en fonction d'hypothèse supplémentaire sur  $\nu$ .

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

Nous pouvons maintenant représenter la solution d'EDP intégro-différentielle comme espérance de fonction de processus mixte brownien-Poisson. La nouvelle qualification *intégro-différentielle* provient de la présence du terme intégral en  $\nu(dy)$ .

**Corollaire 4.3.4 (Formule de Feynman-Kac)** *Si  $u$  est une fonction de classe  $C_b^{1,2}$  solution de l'EDP intégro-différentielle*

$$\left\{ \begin{array}{ll} u'_t(t, x) + \mu u'_x(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 u''_{xx}(t, x) - ru(t, x) \\ \quad + \lambda \int_{\mathbb{R}} (u(t, x+y) - u(t, x)) \nu(dy) = 0 & \text{pour } (t, x) \in ]0, T[ \times \mathbb{R}, \\ u(T, x) = g(x) & \text{pour } x \in \mathbb{R}, \end{array} \right.$$

alors

$$u(0, x) = \mathbb{E} \left( e^{-rT} g(x + \mu T + \sigma W_T + \sum_{i=1}^{N_T} Y_i) \right).$$

Preuve :



Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

### 4.3.2 Modèle mixte brownien-Poisson géométrique

Par un changement de variable exponentielle  $S_t = \exp(X_t)$  (en changeant un peu la forme des sauts et de la tendance), on déduit l'analogie des résultats précédents dans le cadre qui nous intéresse en finance. Nous énonçons les résultats sans preuve.

**Théorème 4.3.5** *Si  $S$  est un processus mixte brownien-Poisson géométrique  $(\mu, \sigma, \lambda, \nu)$*

$$S_t = S_0 \exp \left( \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right) \prod_{i=1}^{N_t} (1 + Y_i),$$

alors pour toute fonction  $f \in C_b^{1,2}$  on a

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(f(t, S_t)) = f(0, S_0) + \mathbb{E} \left( \int_0^t \left[ f'_t(s, S_s) + \mu S_s f'_x(s, S_s) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_s^2 f''_{xx}(s, S_s) \right. \right. \\ \left. \left. + \lambda \int_{\mathbb{R}} (f(s, S_s(1+y)) - f(s, S_s)) \nu(dy) \right] ds \right). \end{aligned}$$

**Corollaire 4.3.6 (Formule de Feynman-Kac)** *Si  $u$  est une fonction de classe  $C_b^{1,2}$  so-*

lution de l'EDP intégrro-différentielle

$$\left\{ \begin{array}{l} u'_t(t, x) + \mu x u'_x(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 u''_{xx}(t, x) - ru(t, x) \\ \quad + \lambda \int_{\mathbb{R}} (u(t, x(1+y)) - u(t, x)) \nu(dy) = 0 \quad \text{pour } (t, x) \in ]0, T[ \times ]0, \infty[, \\ \\ u(T, x) = g(x) \quad \text{pour } x \in ]0, \infty[, \end{array} \right.$$

alors

$$u(0, S_0) = \mathbb{E} \left( e^{-rT} g(S_T) \right).$$

## 4.4 Formule d'Itô

Nous passons maintenant de la décomposition temporelle en espérance de  $f(t, Y_t)$  (où  $Y = X$  ou  $Y = S$ ) à une décomposition temporelle trajectorielle : c'est la formule d'Itô.

### 4.4.1 Notations sur les sauts

Nous avons besoin de notations préalables spécifiques aux processus à saut.

**Définition 4.4.1** Un processus  $(Z_t)_t$  est dit **càdlàg** (continu à droite avec des limites à gauche) si avec probabilité 1, pour tout  $t$  on a

- $\lim_{s \downarrow t} Z_s = Z_t$  ;
- la limite  $\lim_{s \uparrow t} Z_s$  existe : on la note  $Z_{t-}$ .

Le saut en  $t$  est défini par  $\Delta Z_t = Z_t - Z_{t-}$ .

Les processus mixtes brownien-Poisson arithmétiques et géométriques sont des exemples typiques de processus càdlàg.

- Dans le cas arithmétique  $X_t = x + \mu t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$ , on a  $\Delta X_t = Y_i$  si  $t$  est le  $i$ -ième instant de saut.
- Dans le cas géométrique  $S_t = S_0 \exp \left( \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right) \prod_{i=1}^{N_t} (1 + Y_i)$ , on a  $\Delta S_t = S_{t-} Y_i$  si  $t$  est le  $i$ -ième instant de saut.

Si  $(T_i)_{i \geq 1}$  désigne la suite des instants de sauts (avec la convention  $T_0 = 0$ ), on définit  $Y$  à tout instant par

$$Y_t = Y_i \text{ pour } t \in ]T_{i-1}, T_i], \quad (4.4.1)$$

et  $Y_0 = 0$ . On notera que  $Y$  est continu à gauche. Avec ces notations, on a  $\Delta X_t = Y_t$  et  $\Delta S_t = S_{t-} Y_t$ .

### 4.4.2 Formule d'Itô

Nous commençons par définir l'intégrale par rapport au processus de Poisson  $(N_t)_t$ . Comme  $N$  est un processus croissant, nous avons juste besoin d'une intégrale au sens de Riemann-Stieljes.

**Définition 4.4.2 (Intégrale par rapport au processus de Poisson)** Si  $(g_t)_t$  est une fonction continue à gauche, alors pour tout  $0 \leq r \leq t$

$$\int_{]r,t]} g(s) dN_s = \sum_{r < s \leq t} g(s) \Delta N_s = \sum_{i \geq 1} g(T_i) \mathbf{1}_{r < T_i \leq t}. \quad (4.4.2)$$

**Proposition 4.4.3 (Formule d'Itô pour le processus de Poisson composé)** Considérons  $f : (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^{1,0}$  et  $X_t = x + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$  : alors

$$f(t, X_t) = f(0, x) + \int_0^t f'_t(s, X_{s-}) ds + \int_{]0,t]} (f(s, X_{s-} + Y_s) - f(s, X_{s-})) dN_s.$$

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

**Remarque 4.4.4** Dans la formule d'Itô ci-dessus, écrire  $X_{s-}$  ou  $X_s$  dans l'intégrale en  $ds$  n'a pas d'importance, car les deux processus diffèrent seulement aux instants de sauts qui sont en quantité dénombrable (en fait finie ici) donc négligeables pour la mesure de Lebesgue. Par contre, c'est crucial d'écrire  $X_{s-}$  dans l'intégrale en  $dN_s$  comme on peut s'en rendre compte dans la preuve.

Si  $X$  comporte en plus une partie Brownienne, alors on utilise la même décomposition télescopique, mais entre deux instants de sauts, on applique la formule d'Itô pour le mouvement brownien avec dérive (corollaire 2.4.2). Cela donne :

**Théorème 4.4.5 (Formule d'Itô pour le processus mixte brownien-Poisson arithmétique)** *Considérons  $f : (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}$  une fonction de classe  $C^{1,2}$  et  $X_t = x + \mu t + \sigma W_t + \sum_{i=1}^{N_t} Y_i$  : alors avec probabilité 1, on a pour tout  $t \geq 0$*

$$f(t, X_t) = f(0, x) + \int_0^t (f'_t(s, X_{s-}) + \mu f'_x(s, X_{s-}) + \frac{1}{2} \sigma^2 f''_{xx}(s, X_{s-})) ds \\ + \int_0^t \sigma f'_x(s, X_{s-}) dW_s + \int_{]0, t]} (f(s, X_{s-} + Y_s) - f(s, X_{s-})) dN_s.$$

L'intégrale stochastique par rapport à  $W$  est la limite de

$$\sum_{t_i \leq t} f'_x(t_i, X_{t_i}) \sigma (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$$

le long de la subdivision dyadique d'ordre  $n$ .

En comparant la formule trajectorielle précédente avec celle en espérance (égalité (4.3.3)), on observe que si  $f \in C_b^{1,2}$ , alors

1. l'intégrale stochastique par rapport à  $W$  est d'espérance nulle ;
2. celle par rapport à  $N$  a pour espérance  $\mathbb{E}[\int_0^t \int_{\mathbb{R}} (f(s, X_s + y) - f(s, X_s)) \lambda \nu(dy) ds]$ .

### 4.4.3 Applications au processus mixte brownien-Poisson géométrique

Appliquons le résultat qui précède à la fonction  $f(t, x) = \exp(x)$  pour déduire la décomposition d'Itô de  $S$ . On obtient

**Corollaire 4.4.6** *Soit  $S_t = \exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t) \prod_{i=1}^{N_t} (1 + Y_i)$  un processus mixte brownien-Poisson géométrique de caractéristiques  $(\mu, \sigma, \lambda, \nu)$ . Alors*

$$S_t = S_0 + \int_0^t \mu S_{s-} ds + \int_0^t \sigma S_{s-} dW_s + \int_{]0, t]} S_{s-} Y_s dN_s$$

ou de manière équivalente

$$\frac{dS_t}{S_{t-}} = \mu dt + \sigma dW_t + Y_t dN_t. \quad (4.4.3)$$

A partir du Théorème (4.4.5) on peut aussi déduire la décomposition d'Itô de  $v(t, S_t)$  (par composition de fonctions  $f(t, x) = v(t, \exp(x))$  et en ajustant la tendance et les sauts de  $X$ ).

**Corollaire 4.4.7** *Soit  $S_t = \exp((\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t) \prod_{i=1}^{N_t} (1 + Y_i)$  un processus mixte brownien-Poisson géométrique de caractéristiques  $(\mu, \sigma, \lambda, \nu)$ . Alors pour  $v : (t, x) \in \mathbb{R}^+ \times \mathbb{R}^+$  une fonction de classe  $C^{1,2}$ , on a*

$$dv(t, S_t) = (v'_t(t, S_{t-}) + \mu S_{t-} v'_x(t, S_{t-}) + \frac{1}{2} \sigma^2 S_{t-}^2 v''_{xx}(t, S_{t-})) dt + \sigma S_{t-} v'_x(t, S_{t-}) dW_t \\ + (v(t, S_{t-}(1 + Y_t)) - v(t, S_{t-})) dN_t. \quad (4.4.4)$$

C'est tout à fait l'analogie de la décomposition du Théorème 3.1.3 à laquelle on ajoute la contribution des sauts. C'est également à comparer avec la version en espérance (Théorème 4.3.5).

## 4.5 Exercices

**Exercice 4.1** Superposition de processus de Poisson composé.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

ECOLE POLYTECHNIQUE

ECOLE POLYTECHNIQUE

ECOLE POLYTECHNIQUE

LES OUTILS STOCHASTIQUES DES MARCHÉS FINANCIERS

## Chapitre 5

# Changements de probabilité

Les changements de probabilité sont d'un usage courant en statistique et probabilité. La théorie de l'estimation par maximum de vraisemblance repose sur l'étude des densités du modèle paramétrique par rapport à une probabilité de référence. Cette fonction qui s'appelle **la vraisemblance** traduit le taux de dépendance du modèle par rapport aux paramètres.

Dans les modèles discrets, les changements de probabilité sont fréquents, mais ils correspondent à des transformations tellement simples, qu'il n'est pas vraiment nécessaire de les énoncer comme telles. Toutefois, ils jouent un rôle important dans les techniques de réduction de variance dans les méthodes de Monte-Carlo (voir le paragraphe A.4 sur les simulations). Les applications les plus spectaculaires apparaissent dans la théorie des espaces gaussiens, du processus de Poisson, et plus généralement dans l'étude des martingales. De nombreuses propriétés des solutions d'équations différentielles stochastiques en découlent.

La finance est un des domaines appliqués qui utilise le plus les changements de probabilité. Harrison et Pliska (1981,1983) [12, 13] les premiers ont montré l'importance de cette technique, qui est maintenant bien connue dans les salles de marché : pour évaluer les prix de contrats financiers, on calcule des espérances sous une probabilité "risque-neutre", qui est seulement équivalent à la probabilité historique de départ. Au chapitre 7, nous reviendrons sur ces aspects fondamentaux en finance de marché.

Ce chapitre présente d'abord des généralités sur les changements de probabilités, puis nous étudions le cas des processus gaussiens et processus de Poisson.

## 5.1 Généralités

### 5.1.1 Notions élémentaires et exemples

Nous travaillons sur un espace de probabilité de référence  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ . Ce peut être l'espace correspondant à une des hypothèses d'un test statistique. En finance, c'est l'espace dit "univers historique", en référence auquel on fait les tests statistiques.

**Définition 5.1.1** Une probabilité  $\mathbb{Q}$  sur l'espace  $(\Omega, \mathcal{F})$  définit un changement de probabilité (par rapport à  $\mathbb{P}$ ), s'il existe une v.a.  $Y$ , positive, telle que

$$\mathbb{Q}(A) = \mathbb{E}[Y\mathbf{1}_A] \quad \text{si } A \in \mathcal{F}. \quad (5.1.1)$$

La v.a.  $Y$  s'appelle la densité ou la vraisemblance de  $\mathbb{Q}$  par rapport à  $\mathbb{P}$ . On note en général

$$\mathbb{Q} = Y \cdot \mathbb{P}, \quad \text{ou} \quad d\mathbb{Q} = Y d\mathbb{P}, \quad \text{ou} \quad \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} = Y.$$

On dira que les probabilités  $\mathbb{P}$  et  $\mathbb{Q}$  sont équivalentes, si la v.a.  $Y$  est strictement positive  $\mathbb{P}$  p.s., ce qui entraîne que  $\mathbb{P}$  est un changement de probabilité par rapport à  $\mathbb{Q}$ , de densité  $Y^{-1}$ .

Remarquons que pour  $\mathbb{Q}$  soit une mesure de probabilité (de masse 1), il est nécessaire que  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(Y) = 1$ . Réciproquement, avec la contrainte de positivité, cette condition est suffisante pour définir une mesure de probabilité  $\mathbb{Q}$ .

Lorsque les probabilités sont équivalentes, la densité  $Y$  est souvent représentée sous la forme de  $e^Z$ , où  $Z$  s'appelle la **log-vraisemblance**.

#### EXEMPLES

##### 1. Le modèle de Bernoulli.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

##### 2. Le modèle binomial.

Texte supprimé de la version électronique.



Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Remarquons qu'avec ces exemples de changement de probabilité, la variance est modifiée, ce qui sera aussi le cas dans le modèle poissonnien, mais pas forcément dans le modèle gaussien.

### 5.1.2 Changement de probabilité et changement de tribus

Il arrive fréquemment que nous ayons à calculer les probabilités d'événements qui ne dépendent que d'une partie de l'information a priori disponible. Dans le cas où interviennent des probabilités équivalentes, il est important de préciser comment sont modifiées les densités dans ce contexte.

Nous précisons le cadre mathématique de cette étude : les événements que nous souhaitons évaluer sont mesurables par rapport à une sous-tribu  $\mathcal{G}$  de  $\mathcal{F}$ . D'autre part,  $\mathbb{Q}$  est une probabilité équivalente à  $\mathbb{P}$  sur  $\mathcal{F}$ , de densité  $Y$ ,  $\mathcal{F}$ -mesurable.

On désigne par  $\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z|\mathcal{G}]$  l'espérance conditionnelle d'une v.a.  $Z$  positive ou intégrable, par rapport à la sous-tribu  $\mathcal{G}$ , c'est à dire l'unique v.a. à une égalité p.s. près,  $\mathcal{G}$ -mesurable, qui vérifie :

$$\forall C \in \mathcal{G}, \quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z\mathbf{1}_C] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Z|\mathcal{G}]\mathbf{1}_C].$$

**Théorème 5.1.2** *Sous les hypothèses précédentes, la restriction de la probabilité  $\mathbb{Q}$  à la tribu  $\mathcal{G}$  admet une densité par rapport à  $\mathbb{P}$ , donnée par*

$$Y^1 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y|\mathcal{G}].$$

La règle de Bayes donne le calcul de l'espérance conditionnelle,

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[Z|\mathcal{G}] = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[ZY|\mathcal{G}]}{\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[Y|\mathcal{G}]}$$

avec la convention habituelle que  $\frac{0}{0} = 0$ .

**Preuve :**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

## 5.2 Modèles gaussiens

### 5.2.1 Le cas des gaussiennes réelles

Dans les modèles gaussiens, il existe des changements de probabilité qui conservent le caractère gaussien des v.a. Ceci est évident dans le cas d'une gaussienne réelle à partir de la forme de la densité.

**Proposition 5.2.1 (Changement de probabilité et de moyenne)** *Soit  $U$  une v.a. gaussienne de moyenne  $m = m_{\mathbb{P}}$  et de variance  $\sigma^2 > 0$  sous  $\mathbb{P}$ . Posons*

$$Y = \exp\left[\lambda(U - m) - \frac{\lambda^2}{2}\sigma^2\right].$$

*$Y$  est une v.a. positive, d'espérance 1, qui définit une nouvelle probabilité  $\mathbb{Q}$ , sous laquelle  $U$  est une v.a. gaussienne de variance  $\sigma^2$ , et de moyenne*

$$m_{\mathbb{Q}} = m_{\mathbb{P}} + \lambda\sigma^2. \quad (5.2.1)$$

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

Les changements de probabilité dont les log-vraisemblances sont des polynômes d'ordre 2 conservent aussi le caractère gaussien, mais modifient à la fois l'espérance et la variance, comme le montre le résultat suivant.

**Proposition 5.2.2 (Changement de probabilité et de moyenne/variance)** *Soit  $U$  une v.a. gaussienne de moyenne  $m = m_{\mathbb{P}}$  et de variance  $\sigma^2 = \sigma_{\mathbb{P}}^2 > 0$  sous  $\mathbb{P}$ . Pour  $\theta \in ]-\infty, \frac{1}{2\sigma^2}[$  et  $\lambda \in \mathbb{R}$ , posons  $\sigma_{\mathbb{Q}}^2 = \frac{\sigma^2}{1-2\theta\sigma^2} > 0$  et*

$$Y = \frac{\sigma}{\sigma_{\mathbb{Q}}} \exp[\theta(U - m)^2 + \lambda(U - m) - \frac{\lambda^2}{2}\sigma_{\mathbb{Q}}^2].$$

*$Y$  est une v.a. positive, d'espérance 1, qui définit une nouvelle probabilité  $\mathbb{Q}$ , sous laquelle  $U$  est une v.a. gaussienne de variance  $\sigma_{\mathbb{Q}}^2$ , et de moyenne  $m_{\mathbb{Q}} = m_{\mathbb{P}} + \lambda\sigma_{\mathbb{Q}}^2$ .*

**Preuve :**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

Dans la suite, concernant les changements de probabilité gaussienne, nous nous restreignons au cas où seule la moyenne est modifiée ( $\theta = 0$ ). Ce choix se justifie par le fait que concernant le mouvement brownien, seules les moyennes sont modifiables par changement de probabilité (voir Théorème 5.2.4 ci-après). Nous mentionnons toutefois que le changement de variances pour les vecteurs gaussiens est possible et a des applications en simulation d'événements rares par échantillonnage préférentiel (voir paragraphe A.4).

### Changement de probabilité et changement de variable

Une autre manière d'interpréter les résultats précédents est la suivante. Dans le cadre de la Proposition 5.2.1, la variable aléatoire translatée  $U + \lambda\sigma^2$  sous la probabilité  $\mathbb{P}$  est gaussienne, de variance  $\sigma^2$  et de moyenne  $m_{\mathbb{P}} + \lambda\sigma^2 = m_{\mathbb{Q}}$ . Elle a donc la même loi que la v.a.  $U$  sous la probabilité  $\mathbb{Q}$ .

De manière plus explicite, cela signifie que pour toute fonction  $f$  (borélienne) positive

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(U + \lambda\sigma^2)] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f(U)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\exp(\lambda(U - m) - \frac{\lambda^2}{2}\sigma^2)f(U)]. \quad (5.2.2)$$

Ainsi le calcul de toute espérance relative à la v.a.  $(U + \lambda\sigma^2)$  se ramène au calcul d'une espérance relative à la v.a.  $U$ . Sans changer la v.a.  $U$ , en pondérant sa distribution d'un poids donné par  $Y$ , on peut modifier sa moyenne. Ce point est particulièrement important dans certaines expériences de statistique ou dans certains calculs menés par des méthodes de Monte-Carlo.

### 5.2.2 Le cas vectoriel

Nous nous intéressons maintenant à la manière dont le même changement de probabilité transforme la loi d'un vecteur gaussien. Le caractère gaussien est conservé, ainsi que la matrice de variance/covariance, mais les moyennes sont modifiées.

**Proposition 5.2.3** Soit  $(X_1, X_2, \dots, X_n, U)$  un vecteur gaussien. Sous la probabilité  $\mathbb{Q}$ , de densité  $Y$  par rapport à  $\mathbb{P}$ , où

$$Y = \exp\left(U - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(U) - \frac{1}{2}\text{Var}_{\mathbb{P}}(U)\right)$$

le vecteur  $(X_1, X_2, \dots, X_n)$  est gaussien, de même matrice de covariance sous  $\mathbb{P}$  et sous  $\mathbb{Q}$ , et de vecteur des espérances

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[X_i] = \text{Cov}_{\mathbb{P}}(X_i, U) + \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[X_i].$$

En particulier, pour toute fonction  $f$  borélienne positive,

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[f(X_1 + \text{Cov}_{\mathbb{P}}(X_1, U), \dots, X_n + \text{Cov}_{\mathbb{P}}(X_n, U))] = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[f(X_1, X_2, \dots, X_n)] \\ & = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[\exp(U - \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(U) - \frac{1}{2}\text{Var}_{\mathbb{P}}(U))f(X_1, X_2, \dots, X_n)]. \end{aligned}$$

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

### 5.2.3 La formule de Cameron-Martin

Les applications de ce théorème sont très nombreuses. L'exemple le plus spectaculaire est celui du mouvement brownien, que nous décrivons ci-dessous.

**Théorème 5.2.4 (Formule de Cameron-Martin)** Soit  $\{W_t; t \in \mathbb{R}^+\}$  un mouvement brownien standard, par rapport à une probabilité  $\mathbb{P}$ , et  $f$  une fonction continûment dérivable sur  $[0, T]$ .

La v.a.  $L_T = \exp[\int_0^T f(s)dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T f^2(s)ds]$  est une densité de probabilité, qui définit une nouvelle probabilité  $\mathbb{Q}$  par rapport à laquelle la fonction aléatoire  $\{W_t^{\mathbb{Q}} = W_t - \int_0^{t \wedge T} f(s)ds; t \in \mathbb{R}^+\}$  est un mouvement brownien.

En d'autres termes, sous  $\mathbb{Q}$  le mouvement brownien  $W$  se représente comme une f.a d'Itô de décomposition

$$W_t = W_t^{\mathbb{Q}} + \int_0^{t \wedge T} f(s)ds.$$

Nous énonçons ce résultat pour des fonctions  $f$  dérivables, car c'est pour de telles fonctions que nous avons construit en détail l'intégrale de Wiener  $\int_0^T f(s)dW_s$ . Mais nous savons (voir les remarques après la propriété 2.5.1) que cette intégrale a un sens si  $f$  est seulement une fonction de  $L^2([0, T], dt)$  : c'est sous cette hypothèse minimale que la formule de Cameron-Martin est connue.

Preuve:

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

En particulier, pour toute fonction  $F$  définie sur l'espace des fonctions continues, nous avons

que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}[F(W. + \int_0^{. \wedge T} f(s)ds)] = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[L_T F(W.)]$$

**Exemple. Étude du sup d'un mouvement brownien décentré.**

Pour étudier la loi du sup de  $\widehat{W}_t = W_t + bt$  sur  $[0, T]$ , il suffit de connaître la loi du couple  $(W_T, \sup_{t \leq T} W_t)$ . En effet, d'après la formule de Cameron-Martin,

$$\mathbb{P}(\sup_{t \leq T} (W_t + bt) \geq x) = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}[e^{bW_T - \frac{1}{2}b^2T} \mathbf{1}_{\sup_{t \leq T} W_t \geq x}].$$

**Extensions.** Le théorème 5.2.4 s'étend immédiatement au cas multidimensionnel en considérant un brownien  $d$ -dimensionnel et un vecteur ligne  $f$ .

### 5.2.4 Un exemple d'application statistique

Supposons que  $m(\cdot)$  représente un signal temporel (déterministe) intéressant, susceptible d'être présent ou absent tandis que  $W$  représente un bruit additif. La modélisation de cette situation conduit évidemment à considérer les deux fonctions aléatoires  $W$  correspondant à un bruit pur, et  $m(\cdot) + W$  correspondant à un "signal utile", plongé dans un bruit. La probabilité  $\mathbb{P}$  donne la loi du bruit.

L'observateur de son côté n'a accès qu'à l'une de ces deux fonctions aléatoires dont il observe une trajectoire  $\omega = (\omega_t; t \in [0, T])$ , et en général, il ignore laquelle des deux fonctions est en jeu, son problème étant précisément de le détecter.

Aussi, au lieu de considérer les deux fonctions aléatoires  $W$  et  $X = m(\cdot) + W$  dont la loi est mesurée par la seule probabilité  $\mathbb{P}$ , il lui est équivalent de considérer qu'il observe une seule fonction aléatoire  $X$ , qui modélise son observation, sous deux probabilités différentes. Ainsi la trajectoire observée  $\omega$  possède une probabilité a priori d'être observée égale à  $\mathbb{P}(d\omega)$  ou  $\mathbb{Q}(d\omega)$  suivant les cas.

Supposons que  $W$  est un processus de Wiener sous  $\mathbb{P}$ , et  $m(t)$  la primitive d'une fonction  $\mu(\cdot)$  de carré intégrable, de telle sorte que  $m(t) = \int_0^t \mu(s)ds$ . La fonction  $m(t)$  est associée à la covariance de la variable  $U = \int_0^T \mu(s)dW_s$  avec le mouvement brownien  $(W_t)_t$  avec une covariance donnée par  $\text{Cov}_{\mathbb{P}}(U, W_t) = m(t)$ .

Sous la probabilité  $\mathbb{Q} = L_T \cdot \mathbb{P}$ , où  $L_T = \exp[\int_0^T \mu(s)dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T \mu^2(s)ds]$ ,  $W$  est un processus décentré, dont le paramètre de décentralité est  $m(\cdot)$ .

La vraisemblance associée à l'observation de  $\omega$  est donnée par  $L_T$ , qui vaut 1 s'il n'y a pas de signal, et qui peut être très grand s'il y a effectivement un signal. On en déduit une règle de décision, basée sur cette remarque :

au vu de l'observation  $\omega$ , on décide que le signal était présent si

$$U = \int_0^T \mu(s)dW_s > \frac{1}{2} \text{Var}_{\mathbb{P}}(U) = \frac{1}{2} \int_0^T \mu^2(s)ds = \frac{1}{2} \sigma^2. \tag{5.2.3}$$

Cette règle n'est pas infaillible! Si le signal  $m(\cdot)$  est réellement absent, la probabilité de prendre une mauvaise décision vaut

$$p := \mathbb{P}[U > \frac{1}{2} \text{Var}_{\mathbb{P}}(U)] \tag{5.2.4}$$

tandis que si le signal  $m$  est réellement présent, la probabilité d'erreur vaut

$$q := \mathbb{Q}[U \leq \frac{1}{2} \text{Var}_{\mathbb{P}}(U)] \quad (5.2.5)$$

puisque suivant les cas, c'est la probabilité  $\mathbb{P}$  ou  $\mathbb{Q}$  qui régit l'expérience. Ces deux probabilités se calculent facilement en fonction de la variance de  $U$ ,  $\sigma^2 = \int_0^T \mu^2(s) ds$ , qui dépend non plus de  $m$  directement mais du carré de ses variations au cours du temps.

**Proposition 5.2.5** *Les probabilités  $p$  et  $q$  sont égales à  $\mathcal{N}(-\frac{\sigma}{2})$ , où  $\mathcal{N}$  est la fonction de répartition de la loi normale*

$$\mathcal{N}(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^x e^{-\frac{y^2}{2}} dy.$$

En particulier, pour que la règle de décision soit satisfaisante ( $p, q \leq 5\%$ ) il suffit que  $\sigma \geq 4$ .

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

Notons que pour le test soit réellement efficace, il faut que la dérivée du signal lui-même ait une norme dans  $L_2([0, T], dt)$ , i.e.  $\int_0^T \mu^2(s) ds$ , suffisamment grande.



### 5.3 Modèles poissonniens

Nous en venons maintenant au changement de probabilité pour les processus de Poisson composé. Comme dans le cas brownien, les changements de probabilité possibles sont nombreux et nous n'en décrivons qu'un certain type, connu sous le nom de transformation de Esscher.

**Théorème 5.3.1 Transformation de Esscher.** *Soit  $X$  un processus de Poisson composé de caractéristiques  $(\lambda, \nu)$  et  $f$  une fonction borélienne tels que  $\int_{\mathbb{R}} e^{f(y)} \nu(dy) = \mathbb{E}(e^{f(Y)}) < +\infty$ . Soit  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$  la filtration générée par  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$ . La v.a.*

$$L_T = \exp[X_T(f) - \int_{\mathbb{R}} (e^{f(y)} - 1) \lambda T \nu(dy)]$$

*est une densité de probabilité sur  $\mathcal{F}_T$ , qui définit une nouvelle probabilité  $\mathbb{Q}$  (équivalente à  $\mathbb{P}$ ) par rapport à laquelle  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un processus de Poisson composé de caractéristiques*

$$(\lambda^{\mathbb{Q}}, \nu^{\mathbb{Q}}) = \left( \lambda \int_{\mathbb{R}} e^{f(y)} \nu(dy), \frac{e^{f(y)} \nu(dy)}{\int_{\mathbb{R}} e^{f(y)} \nu(dy)} \right).$$

*Ainsi, ce changement de probabilité modifie l'intensité des sauts et la loi des sauts.*

Preuve:

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

## 5.4 Modèles mixtes browniens-Poisson

Nous terminons le chapitre en précisant comment changer de probabilités dans un modèle mixte brownien-Poisson.

**Théorème 5.4.1** *Soit  $X$  un processus de Poisson composé de caractéristiques  $(\lambda, \nu)$  et  $W$  un mouvement brownien standard indépendant de  $X$ . On désigne par  $(\mathcal{F}_t)_{0 \leq t \leq T}$  la filtration générée par  $(X_t, W_t)_{0 \leq t \leq T}$ . Soit  $f$  une fonction borélienne tels que  $\int_{\mathbb{R}} e^{f(y)} \nu(dy) = \mathbb{E}(e^{f(Y)}) < +\infty$  et  $g$  une fonction de carré intégrable sur  $[0, T]$ . La variable aléatoire*

$$L_T = \exp \left[ \int_0^T g(s) dW_s - \frac{1}{2} \int_0^T g^2(s) ds \right] \exp \left[ X_T(f) - \int_{\mathbb{R}} (e^{f(y)} - 1) \lambda T \nu(dy) \right]$$

*est une densité de probabilité sur  $\mathcal{F}_T$ , qui définit une nouvelle probabilité  $\mathbb{Q}$  (équivalente à  $\mathbb{P}$ ) par rapport à laquelle :*

1.  $(X_t)_{0 \leq t \leq T}$  est un processus de Poisson composé de caractéristiques

$$(\lambda^{\mathbb{Q}}, \nu^{\mathbb{Q}}) = \left( \lambda \int_{\mathbb{R}} e^{f(y)} \nu(dy), \frac{e^{f(y)} \nu(dy)}{\int_{\mathbb{R}} e^{f(y)} \nu(dy)} \right);$$

2.  $(W_t^{\mathbb{Q}} = W_t - \int_0^t g(s) ds)_{0 \leq t \leq T}$  est un mouvement brownien standard;
3. les deux processus  $X$  et  $W$  sont indépendants.

**Preuve :**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

## 5.5 Exercices

**Exercice 5.1** Application du théorème de Cameron-Martin au mouvement brownien avec drift  $\mu$  constant.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**Exercice 5.2** ★ A propos de certains polynômes du mouvement brownien.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**Exercice 5.3 ★ Formule de symétrie Call-Put (avec les prérequis du chapitre 7).**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

## Chapitre 6

# Marchés financiers et produits dérivés

Ce chapitre constitue une introduction descriptive aux marchés financiers et aux produits dérivés, retraçant brièvement leurs évolutions depuis leurs origines jusqu'à nos jours. Un *produit dérivé* est un *produit financier*, défini à partir d'un autre produit financier plus simple appelé *sous-jacent* comme par exemple une action, un indice, une devise, une matière première ou un taux d'intérêt pour les sous-jacents les plus naturels. Le produit dérivé le plus simple est le *contrat à terme* où un acheteur et un vendeur s'entendent pour échanger à une date fixée un sous-jacent à un prix déterminé à l'avance. Le contrat optionnel, ou *option*, est une autre catégorie de produit dérivé, expliqué ultérieurement.

Dans cette présentation, il s'agit aussi de discuter de l'utilité et de l'utilisation des produits dérivés dans les sphères économique et financière : pourquoi et par qui sont-ils utilisés ? Il y a de nombreux ouvrages sur le sujet ; ici nous nous inspirons du livre remarquable de Chabardes et Delclaux [5], il est vrai peu récent, mais pourtant ô combien en prise avec l'actualité dans son analyse.

Evidemment, dans cette description, nous ne restons pas indifférents à la crise que nous traversons, depuis l'explosion des *sub-primes* à l'été 2007. Ce contexte difficile nous permet de mieux illustrer l'importance des hypothèses de modélisation et de calcul d'où dérivent les outils stochastiques pour la gestion dynamique des risques financiers. En effet, cette période de crise a mis à jour des risques souvent sous-estimés (risque de liquidité, risque systémique...), risques qui en période normale paraissent effectivement marginaux, mais qui en situation extrême prennent une place essentielle vis-à-vis des risques de marché (c'est-à-dire de fluctuations *habituelles* des cours financiers). A la fin du chapitre, nous discuterons des hypothèses de modélisation et calcul, à la lumière de la crise actuelle. Globalement, les outils présentés dans cet ouvrage répondent de manière satisfaisante aux problématiques de gestion des produits dérivés, dans des périodes *normales*.

## 6.1 Un peu d'histoire

### 6.1.1 De l'Antiquité au XIX<sup>e</sup> siècle

Les premières formes des produits dérivés remontent aux origines de l'Antiquité : ils portaient essentiellement sur les produits agricoles. Dans son roman *Simouhé l'égyptien* (1945) basé sur des recherches historiques minutieuses, Mika Waltari rapporte l'existence des contrats à terme sur les matières agricoles à l'époque du pharaon Akhénoton (quatorze siècles avant Jésus-Christ) : on pouvait acheter et vendre le blé, avant même le début de la semaille. Dans *Les Politiques*, Aristote raconte que le mathématicien et philosophe grec Thalès de Milet, dont chacun connaît le célèbre théorème, serait l'auteur de la première grande spéculation, sept siècles avant Jésus-Christ, concernant les olives. Par ses connaissances en astronomie, il anticipa dès l'hiver que la récolte suivante serait abondante ; alors il loua à bon prix tous les pressoirs de Milet et de Chios, avant de les sous-louer le temps venu aux très nombreux cultivateurs, imposant un prix élevé. Cet exemple illustre l'utilité des calculs de prévision à des fins économiques. Un autre exemple de produit dérivé remonte aux temps des Romains, qui finançaient de grands travaux par la vente d'obligations garanties par des terres publiques. Bien plus tard, au XVII<sup>e</sup> siècle en Hollande, le commerce de bulbes de tulipe était très actif. A chaque printemps, le prix des bulbes pouvait varier fortement à la hausse ou à la baisse, selon que l'hiver précédent avait été froid ou doux. Au lieu de proposer seulement des achats/ventes à terme des bulbes, les négociants *innovèrent* en introduisant les premières options de vente donnant le droit (et non l'obligation) de vendre les bulbes à une date fixée et à un prix convenu à l'avance. Mais suite à un hiver particulièrement doux conduisant à l'effondrement des prix des bulbes, les producteurs exercèrent avantagement leurs options de vente. Dans l'impossibilité d'honorer les prix garantis, les négociateurs furent rapidement ruinés, mettant fin à ce marché d'options. Mentionnons aussi l'existence dès le XVII<sup>e</sup> siècle des marchés à terme sur le riz au Japon, ou sur le blé et le bétail aux USA dès le XIX<sup>e</sup> siècle.

### 6.1.2 Le bouleversement des années 70

Jusqu'à la fin des années 60, les produits dérivés sont écrits surtout sur les matières premières et agricoles, dans des volumes infimes comparés à ceux qui sont échangés aujourd'hui. Ce sont les accords de Bretton Woods de 1944 qui instaurent un système de parité entre l'or et le dollar américain, et une stabilité des taux de change entre les principales monnaies mondiales. Mais ce système est abandonné en 1971, rendant instables les taux de change. Les déséquilibres macro-économiques qui en résultent conduisent à des tensions sur les taux d'intérêt, devenant à leur tour volatiles. A la fin des années 60, les fluctuations des taux de change et des taux d'intérêt sont comparables, voire supérieures à celles des cours des matières premières. Par ailleurs le 1er choc pétrolier de 1973 contribue lui aussi à des variations importantes des cours des matières premières.

Ceci est concomitant avec une volonté politique internationale d'ouverture et de déréglementation. Ainsi, le monde bascule rapidement dans un environnement financier dérégulé et déréglementé. Les entreprises industrielles et commerciales sont soumises à des risques

accrus, liés par exemple aux taux de change très variables : cette situation d'incertitude croissante est inconfortable, tout particulièrement lorsque recettes et dépenses sont libellées dans des monnaies différentes (disons Dollar et Euro si on se replace dans le contexte actuel). Pour les aider et plus généralement pour permettre aux compagnies d'assurance et aux banques de couvrir ces nouveaux risques, ont été créés des marchés organisés, les autorisant à intervenir massivement pour échanger des produits assurant contre les variations des taux de change par exemple.

Les premiers marchés de contrats à terme sur taux d'intérêt, portant sur des titres à revenus fixes, obligations du Trésor et contrats à 90 jours en dollars ont été créés en 1977 et 1981 à Chicago. Maintenant toutes les maturités sont facilement négociées. En 1982, à Kansas City s'ouvre le premier marché sur indices boursiers. En dehors des Etats-Unis, des marchés de taux voient le jour dans les différentes places. A Londres, le LIFFE ouvre en 1982, à Paris, le MATIF en 1986. Progressivement se développent des marchés proposant de nouveaux produits, en particulier les options négociables. En 1973 est créé à Chicago le premier marché d'options, le Chicago Board Options Exchange, qui connaît rapidement un grand succès. Mais le nombre de sous-jacents et de produits traités reste pendant longtemps très limité par les autorités de surveillance. L'excellent livre de Y. Simon [31], sur les marchés de dérivés, vous permettra d'approfondir cette période passionnante, qui voit la naissance et l'essor des marchés de nouveaux instruments financiers, dits produits dérivés.

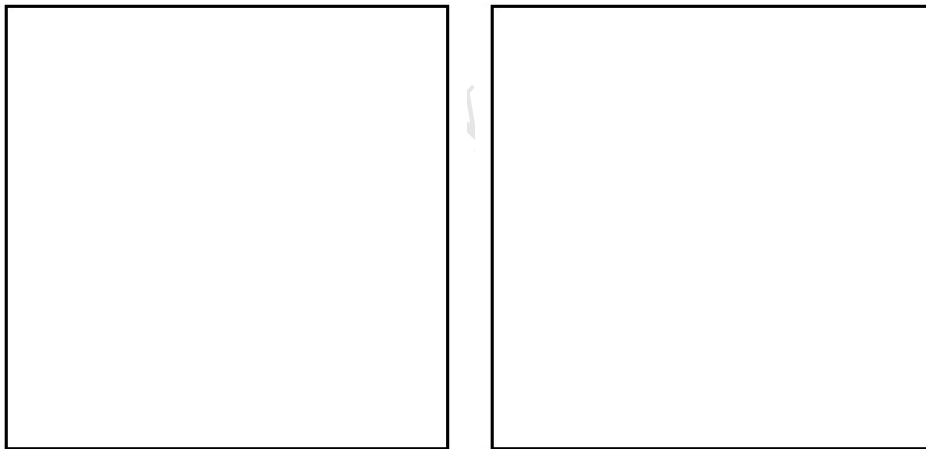


FIGURE 6.1 – A gauche, nombre de transistors présents dans les processeurs Intel. A droite, volume journalier de transactions (moyenné sur 1 mois) des titres composant l'indice Dow Jones Industrial Average. Période : 1970-2010. Les axes des ordonnées sont en échelle logarithmique.

Mentionnons enfin le facteur technologique qui a accompagné et rendu possible l'émergence de ces nouveaux marchés et nouveaux instruments financiers. Les progrès informa-

tiques, concernant tant les aspects communication que stockage des données ou bien puissance de calculs, ont donné des moyens appropriés pour traiter l'information liée aux masses considérables de transactions et aux calculs complexes des produits dérivés. D'ailleurs, les institutions financières sont de grands clients des constructeurs informatiques. Sur les graphes de la Figure 6.1 avec l'axe des ordonnées en échelle logarithmique, le lecteur remarquera la similitude entre les croissances exponentielles de la puissance des ordinateurs (ici mesurée en nombre de transistors, illustrant la loi de Moore<sup>1</sup>) et celles des volumes échangés de titres composant le célèbre indice Dow Jones.

## 6.2 Produits dérivés

### 6.2.1 Un peu de typologie

En général, ils sont décrits par un échéancier donnant les dates de paiement des flux financiers qui caractérisent le contrat. Dans les cas simples, il y a une seule date ; dans les cas plus avancés et notamment sur les taux d'intérêt, les dates sont multiples (trimestrielles). La fin du contrat est appelée la *maturité* ou *échéance*. Les produits dérivés sont essentiellement de deux types.

1. Les **contrats à terme**. A la signature, l'acheteur et le vendeur conviennent de l'échange à une date ou un échéancier donné d'un sous-jacent à un prix fixé. Du point de vue des risques tout au long de la vie du contrat, la situation est symétrique pour l'acheteur ou le vendeur, chaque pouvant supporter des pertes. L'échange peut s'effectuer avec livraison physique du sous-jacent (*physical settlement*), ou bien avec règlement monétaire de l'équivalent financier (*cash settlement*), nous ne rentrerons pas dans ces détails. Les exemples de tels contrats sont :
  - les contrats *forwards*. Ce sont des contrats de gré à gré (*Over The Counter* ou OTC). Le prix d'échange fixé à signature est réglé à maturité, en échange du sous-jacent. L'exemple du blé au temps des égyptiens, cité au début du chapitre, rentre dans ce cadre. Ils étaient utilisés de manière régulière en 1860 à Chicago pour le commerce des céréales et à Londres pour celui des métaux.
  - les contrats *futures*. Le principe est analogue aux contrats forwards, mais la différence principale tient au fait que ce sont des contrats standardisés échangés sur des marchés organisés. La création des chambres de compensation fut une innovation majeure qui favorisa l'essor de ces marchés. En présence d'une chambre de compensation dès que deux opérateurs (disons A et B) ont négocié la vente ou l'achat d'un contrat, la transaction est enregistrée par l'organisme qui se substitue à l'acheteur et au vendeur et devient ainsi leur unique contrepartie. Cela permet à l'acteur A de pouvoir revendre son contrat à un autre intervenant, C par exemple, sans avoir à rechercher la contrepartie B avec laquelle il avait initialement négocié. En compensation, la *chambre de compensation* exige des garanties financières de chaque

---

1. qui prédisait dans les années 60 que le nombre de transistors par circuit doublerait environ tous les 2 ans.



- contrepartie, pour que le contrat puisse être honoré. Des appels de marge sont réalisés quotidiennement pour régulariser les éventuelles pertes de chacun. Ce système assure une très grande sécurité aux intervenants. Il favorise la liquidité.
- les *swaps*. Ces contrats de gré à gré permettent d'échanger un sous-jacent à un prix fixe, tout le long d'un échéancier donné. Typiquement, par un swap de taux d'intérêt, on échange le paiement de taux variable contre un taux fixe, sur un nominal donné. Les swaps ont fait leur apparition en France au milieu des années 80.
2. Les **options**. Contre le paiement d'une *prime*, l'acheteur d'option a le droit (mais pas l'obligation) d'acheter (ou de vendre selon le sens de l'option) un sous-jacent à un prix convenu dans le contrat optionnel. L'option d'achat standard dit *Call* est le prototype des options les plus utilisées et elle servira de base pour le développement des chapitres suivants sur la gestion des risques. Illustrons celle-ci dans le contexte évoqué précédemment d'une entreprise cherchant à se protéger contre la hausse du taux de change Dollar/Euro. Notons  $S_t$  la valeur de ce taux de change à la date  $t$  ( $1 \$ = S_t \text{ €}$ ). L'entreprise, détentrice du *Call*, aura le droit d'acheter 1 \$ au prix d'exercice de  $K \text{ €}$  ( $K$ , appelé aussi *strike*, est une caractéristique fixe du contrat) à l'échéance future  $T$  fixée. Deux cas de figure se présentent à l'échéance.
- (a) Si 1 \$ vaut moins que  $K \text{ €}$ , alors l'entreprise n'a pas intérêt à exercer son droit et il est préférable pour elle d'acheter directement 1 \$ sur le marché des changes. Dans ce cas, le gain conféré à l'entreprise en  $T$  via le contrat optionnel est nul.
  - (b) Si au contraire  $S_T > K$ , il vaut mieux exercer le droit à acheter 1\$ au prix  $K \text{ €}$ , ce qui équivaut à recevoir un flux financier égal à  $S_T - K \text{ €}$  (différence entre le cours réel et le cours garanti).

Ces deux cas de figure peuvent se résumer pour l'entreprise détentrice du *Call* à recevoir en  $T$  un montant égal à  $\max(0, S_T - K) := (S_T - K)_+ \text{ €}$ . Dans le cas d'une option de vente (*Put*) donnant un droit de vente, l'équivalent monétaire pour le détenteur du *Put* est  $\max(K - S_T, 0) := (K - S_T)_+ \text{ €}$ .

Autrement dit, une option est une assurance contre les mouvements défavorables du prix du sous-jacent. Cette assurance a un coût (appelé la *prime*) que l'entreprise verse initialement (à la date 0 disons) au vendeur de l'option.

Sur cet exemple, il apparaît clair que du point de vue des risques, la situation est dissymétrique entre acheteur et vendeur d'option. L'acheteur ne peut rien perdre à maturité, alors que le vendeur peut devoir faire face à une hausse défavorable (ou baisse) des cours dans le cas d'un *Call* (ou *Put*).

### 6.2.2 Mais encore...

De tels contrats *Call* et *Put* sont très usuels entre intervenants du marché : on les appelle options *vanilles*, en référence au parfum de glaces qu'on trouve de partout. A l'inverse, les options les moins standards (souvent *OTC*) sont appelées options *exotiques*. Leur flux à maturité revêt des formes différentes d'où elles tirent leur noms. On peut citer par exemple :

- les options *digitales*. Leur exercice donne un flux constant selon que le sous-jacent est au-dessus ou en dessous du prix d'exercice. C'est un produit très risqué (fort effet de levier), car près de l'échéance et du prix d'exercice, le contrat peut valoir rapidement tout ou rien.
- les options *barrières*. Leur sont attachés des droits d'exercice dépendant d'une clause supplémentaire liée au fait que le sous-jacent a dépassé, à la hausse ou à la baisse, un certain niveau prédéfini, appelé *barrière*. Nous étudions leurs valorisations au Chapitre 9. Elles sont très utilisées sur les marchés des changes. Du fait de la barrière, elles sont en général moins chères que l'option vanille associée.
- les options *asiatiques*. Leur flux à échéance dépend de la moyenne du sous-jacent sur une période. De ce fait, elles sont moins sensibles aux variations du sous-jacent. Elles sont courantes dans les marchés des commodités.
- les options *lookback* dépendent du minimum et maximum du sous-jacent, cela en fait des options chères en général. Nous en valoriserons certaines au Chapitre 9.
- les options *quanto*. Leur sous-jacent est libellé dans une devise et le flux de l'option est réglé dans une autre devise.

De plus, les options avec exercice à date fixe sont dites à exercice *européen*, alors que l'exercice est dit *américain* quand il peut intervenir à tout moment, au choix du détenteur. Dans cet ouvrage, nous n'étudierons que le premier type d'exercice.

Alors que les contrats de gré à gré (OTC) sont signés directement entre deux intervenants, avec des caractéristiques sur mesure résultant de l'entente des deux parties, les autres produits (futures et options standards) sont échangés sur des marchés organisés. Leurs caractéristiques sont moins variées (ce sont des produits dits *listés*), ce qui a pour effet positif de concentrer les échanges sur ces produits et en augmenter ainsi la liquidité. Dans ces marchés organisés, les prix d'échange sont connus de tous, ce qui fournit de la *transparence* aux intervenants. Par ailleurs, un système de *chambre de compensation* garantit que chaque contrepartie assurera ses engagements : cela écarte ainsi le *risque de contrepartie*.

Les sous-jacents peuvent être eux aussi classifiés en grande catégorie :

- marché de taux d'intérêt, avec comme sous-jacent des taux d'intérêt 3 mois ou 10 ans, des taux de swap, des obligations, etc. . . ;
- marché de changes (ou FOREX pour FOREIGN EXchange), avec comme sous-jacent des devises ;
- marché d'actions (ou Equity), prenant les actions et indices comme sous-jacent ;
- marché des matières premières (métaux, pétrole, céréales, etc. . .).

Cette classification n'est pas stricte. Il est fréquent que les produits soient décrits à travers plusieurs marchés. Prenons deux exemples :

- un fonds à formule, produit commercialement destiné aux particuliers, offre au souscripteur au bout de quelques années un gain lié à la performance d'un panier d'actions ou d'indices internationaux, avec une clause de garantie plancher de type obligataire. Clairement, ce produit mélange des composantes actions, devises et taux d'intérêt.
- une obligation convertible est un instrument de dette d'une entreprise : l'obligation peut être convertie en action, mélangeant ainsi des problématiques actions et taux d'intérêt. En fait, ce type de produit intègre une dimension nouvelle par rapport à ce

que nous avons décrit, à savoir le risque de contre-partie. En effet, il est possible que l'entreprise fasse faillite, et ne puisse pas rembourser tout ou partie de sa dette ; pour les entreprises fragiles, ce risque est même très important. Ce risque-là, appelé *risque de crédit*, est de nature différente du risque marché décrit auparavant (risque lié aux fluctuations des cours) : par exemple, on peut se couvrir naturellement contre la hausse future du dollar, en achetant aujourd'hui du dollar, réduisant ainsi son exposition au risque. Face à un risque de défaillance, la couverture est plus complexe, et parfois même impossible.

### 6.2.3 Les dérivés de crédit

Précisément, un nouveau marché du risque du crédit s'est développé à la fin des années 90, aux USA puis en Europe, pour répondre aux besoins de transfert et de couverture des risques de défaillance. Les produits de base sont les CDS (*Credit Default Swap*), qui permettent en échange du paiement d'un taux fixe sur un certain nominal de recevoir un montant de ce nominal en cas de défaillance d'une entreprise. Mais rapidement bien d'autres produits dérivés voient le jour (*Collateralized Debt Obligations, Asset Back Securities, Credit Link Notes*, etc. . .). Cela se développe à vitesse exponentielle<sup>2</sup>, aidé par un mécanisme sophistiqué de titrisation, qui permet de passer du contexte de défaillance d'entreprises à un cadre bien plus général de défaillance. Ainsi, sans rentrer dans le détail du montage, on peut réaliser un découpage de risques variés, puis un transfert à des investisseurs potentiels sous forme de titres financiers (titrisation). Ainsi, dans *Le Monde* du 5 novembre 2005, lit-on qu'Axa s'est déchargé d'une partie de ses risques sur l'assurance automobile via ce mécanisme de titrisation. On apprend en juin 2006 que l'Unedic a fait de même avec ses futures cotisations d'assurance-chômage. Les exemples sont nombreux, sortant de la sphère strictement financière pour toucher toute la sphère économique.

### 6.2.4 Utilisation et utilité des produits dérivés

Les produits dérivés sont utilisés de deux manières.

- **La couverture du risque.** Dans l'exemple précédent de l'entreprise internationale exposé à la hausse du dollar contre l'euro, l'acquisition d'un produit dérivé va lui permettre de s'immuniser contre ce risque. Les produits dérivés sont aussi utilisés par des professionnels (traders) pour se constituer des couvertures sur mesure face à certains risques.
- **L'investissement et la spéculation.** Le sens du terme spéculateur mérite d'être clarifié car il peut être compris de plusieurs manières. Dans le sens courant, le spéculateur fait plutôt référence à un individu qui *joue* en bourse, en prenant des risques éventuellement importants ; nous sommes ici dans le registre du jeu, voire de la loterie. Dans le milieu financier, le spéculateur se définit différemment : c'est un individu qui,

---

2. La British Bankers' Association (<http://www.bba.org.uk/publications/books-reports-subscriptions>) indique dans son rapport 2003/2004 une augmentation vertigineuse des produits dérivés de crédit sur la période 1997-2004. Le montant nominal estimé des risques assurés passe de 180 milliards de dollars à 5021 milliards de dollars !

à partir d'*anticipations ou prévisions* économiques et financières, va prendre des décisions d'investissement, en misant un montant faible et en attendant des plus-values substantielles. C'est typiquement l'activité des sociétés de gestion.

Concernant les produits dérivés, une de leurs caractéristiques est d'avoir en général un *fort effet de levier* : une fois versée la prime initiale, les gains (et pertes) à maturité peuvent être très importants en regard du montant de la prime. Ces produits offrent un rendement potentiellement élevé, mais aussi un risque tout aussi élevé. Pour des intervenants ayant des anticipations d'évolution spécifique de cours (les spéculateurs), ce sont des outils naturels d'investissement.

Quelques facettes de leur utilité ont été illustrées à travers les exemples mentionnés précédemment.

- **Transfert des risques.** Une entreprise exposée au risque de change pourra trouver intérêt à transférer ce risque à une contrepartie spécialisée dans la gestion des risques. C'est très facile à réaliser par un produit dérivé. Les marchés organisés permettent plus généralement aux intervenants d'échanger des risques, parfois dans l'intérêt des deux parties.
- **Economie de fonds propres.** Par ces mécanismes de transfert, les entreprises peuvent se recentrer sur leurs activités industrielles et commerciales spécifiques, en se déchargeant des risques dont elles ne sont pas spécialistes. Elles dégagent ainsi des réserves qui peuvent être réinvesties dans leur activité principale.
- **Spécialisation des investisseurs.** Par les produits dérivés, les investisseurs peuvent transférer des risques qu'ils ne souhaitent pas gérer, et ainsi se concentrer dans des secteurs précis pour lesquels ils développent des compétences aiguës.
- **Effet de levier pour spéculateurs.** Comme indiqué précédemment, les spéculateurs à la recherche de produits à rendement élevé, trouveront dans les produits dérivés des solutions ad-hoc.

### 6.3 Le vendeur d'options : quelle gestion du risque ?

Nous en venons maintenant à la méthodologie de gestion dynamique de risque, par exemple liée à la vente d'une option. Deux questions se posent aux intervenants de ces marchés :

1. quel est le prix de tel contrat optionnel (ce qui détermine le montant de la prime que l'acheteur doit verser au vendeur à la signature du contrat) ? C'est la question de *valorisation*.
2. quelle attitude doit adopter le vendeur une fois qu'il a vendu un tel produit et ainsi endossé (à la place de l'acheteur) le risque d'une hausse du taux de change dollar/euro à maturité ? C'est la question de *couverture* du risque.

En fait, nous verrons au Chapitre 7 que ces deux problèmes sont très liés et nous les résoudrons simultanément. Comment couvrir un risque, comment diversifier une exposition ? Si Bachelier avait établi dès 1900 dans sa thèse<sup>3</sup> [1] la connexion entre le prix de ce type d'ins-

---

3. Louis Bachelier, *Théorie de la spéculation*, thèse soutenue à la Sorbonne en 1900.

truments financiers et des calculs probabilistes associés à certains processus stochastiques, la question de la couverture du risque n'a été vraiment résolue qu'avec les travaux [2] [21] de Black, Scholes et Merton<sup>4</sup> en 1973.

**Diversification statique.** À l'époque, l'idée de diversification du risque est déjà dans l'air, grâce aux travaux pionniers de Markovitz<sup>5</sup> en 1952 sur l'optimisation de portefeuille : il propose une *diversification statique du risque*, fondée sur un *grand nombre d'actifs*. Markovitz définit une allocation optimale, en lien avec une frontière efficiente dans le plan rendement/risque. La problématique est encore différente en assurance de sinistres : la diversification s'appuie sur le grand nombre d'assurés (modélisés comme indépendants pour faire agir la loi des grands nombres et le théorème de la limite centrale). Mais ce type de diversification ne peut être la réponse adéquate pour le vendeur d'une option, car il n'a à couvrir qu'un seul contrat sur un seul sous-jacent.

**Diversification dynamique.** Le point de vue novateur de Black, Scholes et Merton, qui constitue encore aujourd'hui la clé de voûte de la finance moderne, consiste à *diversifier le risque sur le temps de manière infinitésimale* (entre aujourd'hui et l'échéance), c'est-à-dire à mettre en œuvre *une stratégie d'investissement dynamique*. Pour le Call sur le taux de change, cela se réalise en achetant ou en vendant des Dollars à chaque instant. Le miracle est complet lorsque Black, Scholes et Merton aboutissent à l'existence d'une stratégie dynamique optimale, qui *supprime tous les risques possibles dans tous les scénarii de marché*. Ce sera détaillé au Chapitre 7.

Ce pas de géant a rendu possible l'explosion des nouveaux marchés organisés, dont nous avons vu que le premier d'entre eux s'ouvre à Chicago en 1973 (le CBOE, Chicago Board Options Exchange), suivi rapidement par bien d'autres, aux États-Unis d'abord (Chicago, Philadelphie, ...), puis partout. La France emboîte le pas et crée le MATIF en 1986 (Marché à Terme International de France) puis le MONEP en 1987 (Marché des Options NÉgociables de Paris). Les progrès technologiques (informatique, communications...) et théoriques (mathématiques) ont aussi largement favorisé ces développements spectaculaires.

## 6.4 Les hypothèses sous-tendant une gestion dynamique efficace

Nous insistons dès maintenant sur les hypothèses de la méthodologie qui va être présentée dans les chapitres suivants, car précisément, la crise financière actuelle illustre concrètement le sens de ces hypothèses et laisse bien voir ce qui peut se passer si l'une de ces hypothèses n'est plus valable. Dans cette discussion, il ne s'agit pas de démontrer que ce cadre méthodologique rend toute application impossible, mais au contraire que cette méthodologie fonctionne bien dans des situations de marché normales. En résumé, il y a des précautions d'usage, qui sont parfois oubliées par les praticiens.

---

4. pour cela, les deux derniers ont reçu le Prix Nobel d'Économie en 1997 (Black est mort en 1995).

5. Prix Nobel d'Économie en 1990.

Le jeu d'hypothèses de travail est celui d'un **marché sans friction**, à savoir :

1. il n'y a pas de coûts de transaction ;
2. il n'y pas d'impôts ou taxes (sur les transactions, ou les plus values) ;
3. il n'y a pas d'écart entre prix d'achat et prix de vente des titres (fourchette de prix nulle) ;
4. les transactions sont instantanées ;
5. les titres négociables sont très liquides et indéfiniment fractionnables ;
6. il n'y a pas de restriction sur les ventes à découvert ;
7. les participants du marché sont preneurs de prix (ils n'influencent pas les prix par leurs achats et ventes).

Du côté de l'analyse mathématique, la remise en cause d'une ou partie de ces conditions fait l'objet de recherches actuelles qui dépassent largement le niveau de cet ouvrage. Discutons plutôt de la validité de ces hypothèses en pratique.

- 1.2. L'absence de coûts de transaction est manifestement fautive pour les particuliers. En revanche, les professionnels des salles de marché, par l'intermédiaire d'accords globaux entre eux, ne supportent pas de coûts de transaction concernant les marchés liquides. Concernant les taxes ou impôts, leur prise en compte concernant les plus-values serait possible. La prise en compte au niveau de chaque transaction relèverait de la même problématique que celle des coûts de transaction.
- 3.4.5. Les hypothèses 3 à 5 traduisent une caractéristique de grande liquidité du marché. En effet, s'il y a beaucoup d'intervenants actifs sur un marché, on peut considérer que le prix de vente demandé par les vendeurs égalise à tout instant le prix d'achat des acheteurs, donnant lieu ainsi à un seul prix. Sur le marché des changes qui est le plus liquide, cette hypothèse est tout à fait pertinente, les cours de change sont cotés avec plusieurs chiffres après la virgule. Pour d'autres marchés, la réalité peut être légèrement différente : la fourchette de prix n'est pas exactement nulle, puisque les prix cotés sont arrondis, au centime d'euro par exemple ; néanmoins l'approximation reste excellente pour les marchés très liquides. Signalons enfin que cette hypothèse de fourchette quasi-nulle s'est retrouvée plusieurs fois en défaut depuis le début de la crise. Une illustration de ce phénomène est donnée sur la Figure 6.2 : on y voit un saut des taux interbancaires pendant l'été 2007, indiquant la préférence accrue des banques pour conserver leurs liquidités à horizon 3 mois. L'instantanéité des transactions est une hypothèse idéalisée traduisant que le délai entre la prise de décision d'achat/vente et l'achat/vente lui-même est extrêmement court, de sorte que les prix n'ont pas eu le temps de varier. A la vue des progrès technologiques, on peut considérer cette hypothèse relativement bien satisfaite. Enfin, l'indéfinie fractionnabilité des titres est une hypothèse mathématique, qui permet de définir des stratégies de couverture comportant des nombres réels arbitraires de titres négociables. En pratique, seul un nombre entier de titres (ou un nombre décimal dans le cas de parts d'OPCVM par exemple) est possible. Mais pour des portefeuilles

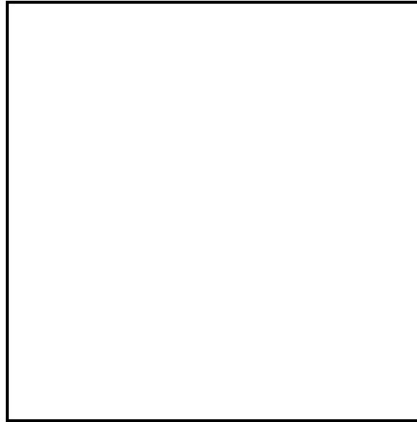


FIGURE 6.2 – Différence hebdomadaire entre le taux EURIBOR 3 mois (taux de prêt moyen à 3 mois, entre banques de la zone euro) et le taux EONIA (taux de prêt inter-bancaire sur 24 heures), au cours de l'année 2007. Les deux augmentations en mars et juin 2007 correspondent à deux hausses des taux directeurs de la Banque Centrale Européenne de 0.25%. En dehors de ces anticipations, cette différence EURIBOR 3 mois / EONIA se situe autour de 0.1%. La hausse importante pendant l'été 2007 indique une réticence des banques à se prêter entre elles à horizon de quelques mois, marquant un manque de liquidité. Source : Euribor-EBF (<http://www.euribor-ebf.eu/>).

de taille importante, ces approximations d'arrondi n'ont pas beaucoup d'impact. Cette hypothèse de fractionnabilité est donc réaliste.

En revanche, la très grande liquidité supposée des titres signifie également qu'il n'y pas d'effet de taille du portefeuille de couverture : le prix d'une option donnant  $\lambda$  fois le flux  $F_T$  est égal à  $\lambda$  fois le prix de l'option donnant le flux  $F_T$ . C'est vrai si  $\lambda$  est de grandeur raisonnable, mais évidemment faux si  $\lambda$  est à ce point grand qu'on atteint des tailles comparables aux actifs du marché. En d'autres termes, des produits dérivés de nominal très grand sont, toutes choses égales par ailleurs, beaucoup plus délicats à couvrir que ceux de nominal faible. Quand on examine la Figure 6.3 relatant les positions des produits dérivés et leur évolution au fil des années, on veut bien croire que le risque de liquidité devient de plus en plus palpable au fil du temps et que la croissance du marché des dérivés finit par devenir elle-même une nouvelle source de risques quand des tailles critiques sont atteintes.

Par ailleurs, un autre effet indirect de la croissance des volumes des produits dérivés a été une moindre surveillance des risques associés à chacun.

6. Cette hypothèse est importante : elle assure une cohérence des prix et des stratégies de couverture. Cela supporte la règle de linéarité de valorisation de produits financiers :

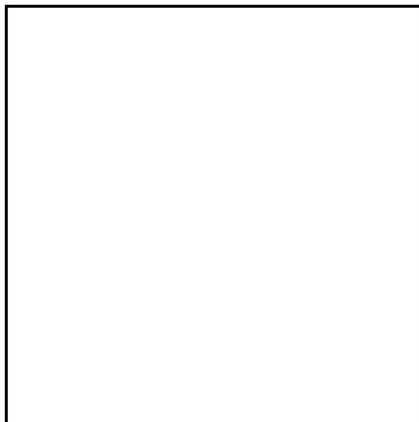


FIGURE 6.3 – Evolution des positions (en milliers de milliards de dollars US) sur les marchés des produits dérivés de gré à gré, pendant la période 1986-2007. Sources : [5] et BIS Quarterly review, Dec 2007, *International banking and financial market developments* (<http://www.bis.org>).

si un produit dérivé donne un flux  $F_T^1$ , un second  $F_T^2$ , leur différence de prix est le prix du produit dérivé de flux  $F_T^1 - F_T^2$ . Cela justifie aussi que deux stratégies ayant même flux à maturité se valorisent de la même manière aujourd'hui (prendre  $F_T^1 = F_T^2$  dans le raisonnement précédent). C'est le fondement de la règle de prix unique pour tout produit financier (ou d'absence d'opportunité d'arbitrage).

Voici une autre illustration plus concrète : pour se couvrir contre la baisse d'une action, il est nécessaire de vendre maintenant l'action pour s'immuniser contre la baisse future possible. Ainsi, interdire les ventes à découvert ne permet plus de couvrir les Puts, et ce n'est qu'un exemple. A certains moments forts de la crise, la vente à découvert a été interdite, dans le but d'enrayer la baisse des cours. L'effet secondaire était de limiter les couvertures possibles des risques.

7. Etre preneur de prix indique qu'on n'a pas d'influence sur le marché : c'est le cas d'un petit investisseur. Cette hypothèse est en lien avec la taille des nominaux à couvrir, déjà mentionnée. Elle est donc réaliste tant que les nominaux des produits dérivés sont raisonnables.

Nous espérons qu'en ayant rappelé ces précautions d'usage, le lecteur cernera mieux les limites d'application de la méthodologie que nous allons développer dans les chapitres suivants.



## Chapitre 7

# Couverture de produits financiers : le point de vue de Black-Scholes-Merton

Nous exposons en détail l'approche de Black-Scholes pour valoriser et couvrir une option, en nous concentrant sur les Calls/Puts. Dans la suite, nous considérons uniquement le marché de la zone euro, où les prix sont exprimés en €. Evidemment, ce choix de marché est arbitraire. En revanche, nous ne considérons pas dans cet ouvrage le cas plus complet de marchés internationaux où différentes devises sont échangées (par exemple du dollar, de l'euro, de la livre Sterling, du yen ...). La méthodologie est similaire mais les notations sont plus lourdes, ce qui complique les écritures.

Les produits dérivés étudiés sont écrits sur des sous-jacents de type action ou taux d'intérêt. Les options sur taux de change ou matières premières ont des spécificités que nous ne discutons pas ici.

### 7.1 Marché sans friction et absence d'arbitrage

Dans toute la suite, nous supposons que le marché est sans friction : nous en rappelons la définition, qui a été discutée au chapitre précédent.

**Définition 7.1.1 (Marché sans friction)** *Un marché financier est dit sans friction si*

- il n'y a pas de coûts de transaction ;
- il n'y pas d'impôts ou taxes (sur les transactions, ou les plus values) ;
- il n'y a pas d'écart entre prix d'achat et prix de vente des titres (fourchette de prix nulle) ;
- les transactions sont instantanées ;
- les titres négociables sont très liquides et indéfiniment fractionnables ;

- il n'y a pas de restriction sur les ventes à découvert;
- les participants du marché sont preneurs de prix (ils n'influencent pas les prix par leurs achats et ventes).

L'AOA (Absence d'Opportunité d'Arbitrage) est un des axiomes de base de la finance de marché. Il exprime l'idée simple qu'**on ne peut pas faire de profit sans prendre de risque** : si tel était le cas, des acteurs du marché (les *arbitrageurs*) exploiteraient ces opportunités, ce qui amènerait des corrections de prix faisant disparaître ces opportunités. Cette hypothèse est assez naturelle dans un marché sans friction.

**Hypothèse 7.1.2 (Absence d'Opportunité d'Arbitrage)** *Dans un marché sans friction, il y a AOA, c'est à dire qu'il est impossible de gagner de l'argent de façon certaine à partir d'un investissement initial nul.*

Cette loi de marché est importante car elle assure une cohérence forte des prix de marché des produits déjà existants, mais aussi des options que nous cherchons à valoriser. En pratique, des opportunités d'arbitrage peuvent apparaître momentanément, mais elles sont si rapidement éliminées qu'on peut considérer que l'AOA prévaut tout le temps.

**Corollaire 7.1.3 (Unicité des prix)** *En AOA, si les valeurs de deux portefeuilles coïncident de façon certaine à une date donnée, alors ces deux portefeuilles ont la même valeur à toute date intermédiaire.*

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

Voici deux exemples importants d'arbitrage, de type statique, c'est-à-dire correspondant à des compositions de portefeuille restant fixes au cours du temps.

**Exemple 1 : prix d'un contrat à terme.** Nous désignons par  $F_t(S, T)$ , le prix fixé par contrat à la date  $t$  auquel sera négocié le titre  $S$  à la date  $T$ . C'est le *prix à terme*, ou le *prix forward* de  $S$  en  $T$ .

La notion de prix forward est à différencier de celle de *prix comptant*, correspondant à un règlement immédiat. Un raisonnement d'arbitrage statique permet de comparer le prix de ce contrat au cours de  $S$  à la date  $t$ . Il faut pour cela utiliser le zéro-coupon d'échéance  $T$ , dont le prix en  $t$  est  $B(t, T)$  : c'est un instrument de taux d'intérêt qui permet de recevoir à coup sûr 1 € en  $T$ .

**Proposition 7.1.4** *Supposons que le titre  $S$  ne verse pas de dividende. Alors le prix forward de  $S$  en  $T$  vaut*

$$F_t(S, T) = \frac{S_t}{B(t, T)}. \quad (7.1.1)$$

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

Nous remarquons que la détermination du prix du contrat forward est indépendante de tout modèle! De même, l'exemple suivant n'utilise aucun modèle particulier.

**Exemple 2 : relation de parité Call-Put.** Par analogie avec l'option d'achat (Call), l'option de vente (Put) donne le droit au détenteur du contrat de vendre un titre sous-jacent  $S$  au strike  $K$  à échéance  $T$ , ce qui équivaut pour l'acheteur du Put à recevoir un flux  $(K - S_T)_+$ . Pour l'acheteur du Put, c'est une assurance contre la baisse de l'actif sous-jacent.

Un raisonnement d'arbitrage statique permet de relier à une date donnée le prix du Call et du Put avec mêmes caractéristiques.

**Proposition 7.1.5** Notons  $\text{Call}_t(T, K)$  et  $\text{Put}_t(T, K)$  le prix en  $t$  des Call et Put de prix d'exercice  $K$  et d'échéance  $T$ , écrit sur le titre de cours  $S$ .

Si le titre ne distribue pas de dividende, la relation de parité Call-Put est donnée par

$$\text{Call}_t(T, K) - \text{Put}_t(T, K) = S_t - KB(t, T). \quad (7.1.2)$$

Plus généralement, on a

$$\text{Call}_t(T, K) - \text{Put}_t(T, K) = (F_t(S, T) - K)B(t, T). \quad (7.1.3)$$

Preuve:

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

Par des raisonnements d'arbitrage statique, on peut également montrer les relations suivantes.

**Proposition 7.1.6** *On a*

1.  $(S_t - KB(t, T))_+ \leq \text{Call}_t(T, K) \leq S_t$  (relation de hedge);
2.  $\frac{\partial \text{Call}_t(T, K)}{\partial K} \leq 0$  (relation de Bull spread);
3.  $\frac{\partial^2 \text{Call}_t(T, K)}{\partial K^2} \geq 0$  (relation de Butterfly spread);
4.  $\frac{\partial \text{Call}_t(T, K)}{\partial T} \geq 0$  (relation de Calendar spread) si les taux d'intérêt court terme sont positifs.

Preuve:

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

## 7.2 Modélisation probabiliste du marché

Notre objectif est maintenant de donner un prix au option d'achat, option de vente, et plus généralement à tout contrat financier dont le flux terminal (en  $T$ ) est de la forme  $h(S_T)$ , où  $(S_t)_t$  est un titre négociable<sup>1</sup> comme une action par exemple. Pour y parvenir, il est nécessaire de définir un modèle probabiliste d'évolution des cours. Dans cette démarche de modélisation, soulignons qu'il y a une différence importante avec ce qu'on peut observer dans d'autres domaines scientifiques : le phénomène à décrire n'obéit pas à une loi physique, comme la loi de Fourier décrivant la répartition stationnaire de la température dans un milieu thermiquement conducteur, ou bien la loi d'Ampère en électrostatique, ou encore les lois de la mécanique ... Dans ces derniers cas, les phénomènes physiques décrits sont immuables, alors que les cours de bourse résultent d'un processus complexe d'offres et demandes, non stationnaire et changeant dans le temps. Là encore, il convient d'être prudent sur la valeur accordée à un modèle stochastique de finance : il permet de développer une méthodologie de gestion des risques et d'obtenir des outils d'aide à la décision, qu'il est nécessaire de tester sur des historiques<sup>2</sup> pour vérifier l'adéquation à la situation courante. Toutefois, ce qui est remarquable, c'est la grande robustesse de cette approche en pratique.

### 7.2.1 Espace de probabilité et mouvement brownien

Nous réalisons la modélisation des aléas du marché financier via un espace de espace de probabilité filtré  $(\Omega, \mathcal{F}, \mathcal{F}_t, \mathbb{P})$  :

- $\Omega$  est l'ensemble de tous les scénarii de marché possibles.
- la tribu  $\mathcal{F}$  représente la structure d'information globale disponible sur le marché.
- les aléas sont générés par un mouvement brownien réel  $(\widehat{W}_t)_{0 \leq t \leq T}$ , qui engendre une filtration croissante  $(\mathcal{F}_0 \subseteq \mathcal{F}_t \subseteq \mathcal{F}_T)$ , décrivant l'information disponible pour tous les acteurs du marché au fil du temps (toute le monde a la même information, pas de délit d'initié).
- la probabilité  $\mathbb{P}$  est appelée **probabilité historique ou objective**.

### 7.2.2 Modélisation du titre sous-jacent

En 1900, Louis Bachelier [1] a proposé une modélisation des cours comme des trajectoires aléatoires. Son modèle brownien rend bien compte de l'aspect imprévisible des cours d'actifs financiers mais présente l'inconvénient de donner des prix négatifs. Samuelson [30] en 1965 remédie à ce problème en prenant pour modèle l'exponentielle du brownien, c'est-à-dire un mouvement brownien géométrique (voir Chapitre 3). C'est un processus à trajectoires continues, qui confère au cours la propriété d'avoir des rendements gaussiens, indépendants et stationnaires. Finalement, c'est un modèle, qui en terme de nombre de paramètres, est des plus parcimonieux : il dépend seulement de

1. C'est sur ce point qu'une option sur taux de change demande un traitement particulier, le taux de change n'étant pas un titre négociable : on peut acheter des Euros ou des Dollars mais on ne peut pas acheter le taux de change EuroDollar.

2. ce sont les dits *backtests*.

1. **la tendance**  $\mu$ , correspondant au rendement (annualisé) du titre espéré par unité de temps.
2. **la volatilité**  $\sigma$ , qui rend compte de la variabilité du titre. Sa valeur (annualisée) dépend énormément du type de marché (pour les actions : entre 20 et 50% ; pour le change : entre 10 et 30 % ; pour les taux d'intérêt : entre 5 et 20 % ; pour les matières premières : entre 50 et 300 %).

**Définition 7.2.1 (et Proposition)** *Le modèle de Black-Scholes-Samuelson est défini sous forme de rendement instantané par*

$$\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma d\widehat{W}_t$$

avec  $S_0 = x$ , où  $(\widehat{W}_t)_t$  est un mouvement brownien standard sous  $\mathbb{P}$ . Sous forme intégrée (voir les équations (3.1.1) et (3.1.3)), cela devient

$$S_t = xe^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\widehat{W}_t}.$$

C'est un **modèle log-normal** dont les deux premiers moments valent

$$\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_t) = xe^{\mu t}, \quad \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_t^2) = x^2 e^{(2\mu + \sigma^2)t}, \quad \text{Var}_{\mathbb{P}}(S_t) = [\mathbb{E}_{\mathbb{P}}(S_t)]^2 (e^{\sigma^2 t} - 1). \quad (7.2.1)$$

Notons  $r$  le taux d'intérêt sans risque<sup>3</sup> ; alors la prime de risque du titre vaut

$$\lambda = \frac{\mu - r}{\sigma}. \quad (7.2.2)$$

La dynamique de  $S$  se réécrit alors

$$\frac{dS_t}{S_t} = r dt + \sigma(d\widehat{W}_t + \lambda dt), \quad (7.2.3)$$

en recentrant le rendement de  $S$  autour du taux sans risque.

## 7.3 Portefeuille dynamique

Focalisons nous sur le cas du Call, ce qui nous donnera l'occasion d'introduire les concepts fondamentaux et le vocabulaire de circonstances.

Le vendeur de l'option, en échange de la prime versée par l'acheteur à la signature (au temps 0), doit verser en  $T$  le flux  $(S_T - K)_+$  (appelé plus généralement **payoff**), s'exposant ainsi au risque de forte hausse du titre sous-jacent. Pour minimiser ce risque, à l'aide de la prime reçue il va se constituer un **portefeuille dynamique de couverture** en achetant/vendant le titre. La **valeur liquidative** (ou *Mark-to-Market*) du portefeuille au cours du temps est notée  $(V_t)_t$ . L'**erreur de couverture**  $\varepsilon_T$  (ou *tracking error*) est la différence entre la valeur du portefeuille constitué et le flux promis :

$$\varepsilon_T = V_T - (S_T - K)_+.$$

Son objectif est évidemment d'avoir une erreur de couverture nulle.

---

3. taux de rémunération de l'argent placé sans risque au jour le jour.

### 7.3.1 Portefeuille de couverture

Formalisons mathématiquement la notion de portefeuille dynamique du vendeur de l'option.  $V_0$  est le montant initial de son portefeuille. Puis son investissement à la date  $t$  consiste en

- $\delta(t)$  parts d'actif risqué  $S_t$ . Si  $\delta(t) > 0$ , il est *long* du titre (acheteur); si  $\delta(t) < 0$ , il est *short* du titre (vendeur).
- $\delta^0(t)$  parts d'actif sans risque  $S_t^0 = e^{rt}$  de rendement  $r$  entre  $[t, t + dt]$ , rémunérant les liquidités (ou *cash*). Si  $\delta^0(t)$  est positif, c'est un placement de liquidités; s'il est négatif, c'est un emprunt.

Ces deux processus  $(\delta^0(t), \delta(t))$  définissent la **stratégie de portefeuille**.

En pratique, les nombres de part sont ajustés tous les jours ou toutes les semaines, disons à des dates de négociation (ou de *trading*)  $0 = t_0 < t_1 < t_2 < t_3 < \dots < t_n = T$  où  $T$  est l'horizon de couverture. Le nombre de parts  $(\delta^0(t), \delta(t)) = (\delta_k^0, \delta_k)$  détenus sur la période  $]t_k, t_{k+1}]$  dépend des conditions de marché à la date  $t_k$  et de ce qui s'est passé avant. Mathématiquement, cela se traduit par prendre  $(\delta_k^0, \delta_k)$  adaptés à  $\mathcal{F}_{t_k}$ . Autrement dit, les stratégies n'anticipent pas sur le futur. Si ces quantités sont constantes dans le temps, la gestion est *statique* sinon elle est *dynamique*. Dans la suite, nous supposons que le titre  $S$  ne verse pas de dividende (voir le paragraphe 7.5.1 pour enlever cette hypothèse).

**Définition 7.3.1 (et propriétés)** Une stratégie simple de portefeuille investi dans le titre  $S$  et dans le cash est la donnée de deux processus  $(\delta^0(t), \delta(t))$  de la forme

$$\delta(t) = \delta_0 1_{[0, t_1]}(t) + \dots + \delta_k 1_{]t_k, t_{k+1}]}(t) + \dots + \delta_{n-1} 1_{]t_{n-1}, t_n]}(t)$$

(et de manière analogue pour  $\delta^0$ ) où les variables  $\delta_k^0, \delta_k$  sont  $\mathcal{F}_{t_k}$ -mesurables. La valeur liquidative à la date  $t$  du portefeuille associé est égale à

$$V_t = \delta^0(t) S_t^0 + \delta(t) S_t,$$

ou bien sous forme de valeur actualisée  $\frac{V_t}{S_t^0} = \delta^0(t) + \delta(t) \frac{S_t}{S_t^0}$ .

Les propriétés qui en découlent sont :

1.  $(\delta^0(t), \delta(t))_t$  est continue à gauche et  $\mathcal{F}_t$ -adapté.
2.  $V_t$  est  $\mathcal{F}_t$ -adapté<sup>4</sup>.
3. Pour  $t \in ]t_{k-1}, t_k]$ , intervalle sur lequel  $\delta^0(t)$  et  $\delta(t)$  sont constants, la variation de la valeur du portefeuille s'écrit<sup>5</sup>

$$V_{t_k} - V_t = \delta_{k-1}^0 (S_{t_k}^0 - S_t^0) + \delta_{k-1} (S_{t_k} - S_t) = \int_t^{t_k} \delta^0(u) dS_u^0 + \delta(u) dS_u \quad (7.3.1)$$

ou de manière équivalente, sur les valeurs actualisées,

$$\frac{V_{t_k}}{S_{t_k}^0} - \frac{V_t}{S_t^0} = \delta_{k-1} \left( \frac{S_{t_k}}{S_{t_k}^0} - \frac{S_t}{S_t^0} \right) = \int_t^{t_k} \delta(u) d \left( \frac{S_u}{S_u^0} \right). \quad (7.3.2)$$

4. ici,  $V$  est continu à gauche car  $S$  est continu. Pour les modèles à sauts,  $V$  n'est a priori pas continu à gauche mais juste pourvu de limites à gauche.

5. ici, on utilise que détenir le titre n'apporte pas de flux supplémentaires de type dividende.



En fait, les variations de  $(\delta^0(t), \delta(t))$  ne peuvent pas être quelconques : nous devons notamment traduire que l'apport d'argent extérieur au cours de la gestion de la couverture n'est pas possible. Autrement, les variations de la valeur du portefeuille sont uniquement dues aux variations du titre et du cash.

Cette **contrainte, dite d'autofinancement**, se traduit sur les stratégies simples par égalité des valeurs liquidatives avant et après négociation, soit

$$\delta_{k-1}^0 S_{t_k}^0 + \delta_{k-1} S_{t_k} = \delta_k^0 S_{t_k}^0 + \delta_k S_{t_k}.$$

En utilisant la continuité à droite du prix de  $S$ , observons que cette condition se traduit par la continuité à droite de  $V$

$$V_{t_k} = \lim_{t \downarrow t_k} V_t.$$

Ainsi, les équations (7.3.1) et (7.3.2) sont valables même pour  $t = t_{k-1}$  et par recollement des intervalles, cela devient

$$V_t - V_0 = \int_0^t \delta^0(u) dS_u^0 + \delta(u) dS_u, \quad \frac{V_t}{S_t^0} - V_0 = \int_0^t \delta(u) d\left(\frac{S_u}{S_u^0}\right).$$

L'intégrale stochastique  $\int_0^t \delta(u) dS_u$  ou  $\int_0^t \delta(u) d\left(\frac{S_u}{S_u^0}\right)$  ci-dessus est simplement une somme de Riemann car  $(\delta(u))_u$  est constant par morceaux.

Un portefeuille dont la stratégie satisfait cette condition d'autofinancement sera dit **portefeuille autofinçant**. Nous résumons ces propriétés dynamiques :

**Définition 7.3.2 (et proposition)** *La valeur d'un portefeuille autofinçant a pour dynamique*

$$\begin{aligned} V_t &= V_0 + \int_0^t \delta^0(u) dS_u^0 + \delta(u) dS_u \\ &= V_0 + \int_0^t rV_u du + \int_0^t \delta(u) (dS_u - rS_u du) \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

(en utilisant  $dS_u^0 = rS_u^0 du$  et  $V_u = \delta^0(u)S_u^0 + \delta(u)S_u$ ). Sur les valeurs actualisées, cela s'écrit

$$e^{-rt} V_t = \frac{V_t}{S_t^0} = V_0 + \int_0^t \delta(u) d\left(\frac{S_u}{S_u^0}\right) = V_0 + \int_0^t \delta(u) d(e^{-ru} S_u). \quad (7.3.4)$$

Le processus  $(V_t)_t$  est complètement déterminé par  $V_0$  et  $(\delta(t))_t$  (le montant en cash se déduit par  $S_t^0 \delta^0(t) = V_t - \delta(t)S_t$ ).

Ces équations ont été complètement établies pour des stratégies simples (constantes par morceaux). **Dans la suite, nous prenons cette équation comme définition générale de stratégie de portefeuille autofinçant**, en autorisant des stratégies  $(\delta^0(t), \delta(t))_t$  à varier en continu. Dans ce cas-là, une définition générale de l'intégrale stochastique  $\int_0^t \delta(u) dS_u$  est nécessaire, sous des conditions précises de mesurabilité et d'intégrabilité de  $(\delta(u))_u$ , conditions plus faibles que celles que nous avons rencontrées au chapitre 2 : cela va au delà de ce livre introductif et renvoyons le lecteur intéressé à des ouvrages spécialisés comme [27].

En fait, dans la suite de ce livre, nous aurons juste besoin de  $\delta(u)$  sous la forme  $u'_x(u, S_u)$ , auquel cas l'intégrale stochastique  $\int_0^t u'_x(u, S_u) dS_u$  a bien un sens (voir les chapitres 2 et 3).

### 7.3.2 Traduction du problème de couverture parfaite de l'option

Le vendeur de l'option doit déterminer un processus de couverture  $(\delta(t))_t$  et une richesse initiale  $V_0$  tels que

$$dV_t = rV_t dt + \delta(t)(dS_t - rS_t dt)$$

avec une erreur de couverture nulle  $\epsilon_T = 0 = V_T - h(S_T)$ , où  $h(S_T) = (S_T - K)_+$  dans le cas de la vente d'un Call,  $h(S_T) = (K - S_T)_+$  dans le cas de la vente d'un Put ou encore  $h(S_T) = \mathbf{1}_{S_T > K}$  pour un Call binaire (ou Call digital).

S'il existe un tel portefeuille de couverture, l'option et le portefeuille de couverture ont même valeur en  $T$  avec probabilité 1. En vertu de l'AOA, leurs valeurs à toute date intermédiaire coïncident. En particulier,  **$V_0$  est la valeur de l'option aujourd'hui.**

Dans le prochain paragraphe, nous donnons la solution à ce problème de **cible aléatoire**<sup>6</sup>, en cherchant un portefeuille dont la valeur à la date  $t$  serait une fonction de la valeur du titre  $S_t$  :  $V_t = v(t, S_t)$ . Il se trouve que  $v$  doit résoudre une équation aux dérivées partielles dont on connaît la solution.

### 7.3.3 Résolution par équation aux dérivées partielles

**Théorème 7.3.3** Soit  $h$  une fonction mesurable, à croissance au plus linéaire, pour laquelle l'EDP ci-dessous admet une solution régulière  $v(t, x)$  sur  $]0, T[ \times ]0, +\infty[$  :

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v''_{xx}(t, x) + r x v'_x(t, x) + v'_t(t, x) - r v(t, x) = 0, \\ v(T, x) = h(x). \end{cases} \quad (7.3.5)$$

Le flux  $h(S_T)$  est répliquable par un portefeuille autofinçant, dont la valeur à la date  $t$  est  $v(t, S_t)$ , et celle du portefeuille de couverture est  $\delta(t, S_t) = v'_x(t, S_t)$ .

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

---

6. on vise la valeur  $V_T = h(S_T)$  en agissant sur  $(\delta(t))_t$ .

Texte supprimé de la version électronique.

□

De manière surprenante, la **fonction prix**  $v(t, x)$  ne dépend pas du rendement  $\mu$  du titre : la stratégie de portefeuille dynamique qui suit l'évolution du marché a permis d'annuler l'effet de la tendance. En revanche, le **processus de prix**  $v(t, S_t)$  dépend bien de la tendance, via  $S_t$ .

En conséquence, seule la volatilité  $\sigma$  devra être évaluée par le vendeur de l'option pour déterminer la fonction prix.

## 7.4 La formule de Black et Scholes

### 7.4.1 Résolution de l'EDP par la formule de Feynman-Kac

Afin d'aboutir à des formules explicites, nous ré-interprétons la solution de l'EDP comme une espérance : cette représentation porte le nom de formule de Feynman-Kac.

**Théorème 7.4.1 (formule de Feynman-Kac)** *Soit  $(\tilde{S}_t)_t$  un titre fictif de dynamique :*

$$\frac{d\tilde{S}_t}{\tilde{S}_t} = rdt + \sigma dW_t,$$

*avec  $W$  un mouvement brownien sous une probabilité auxiliaire  $\mathbb{Q}$ . Alors la solution de l'EDP d'évaluation est donnée par*

$$v(t, x) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}h(\tilde{S}_T)|\tilde{S}_t = x].$$

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

### Commentaires sur la fonction prix.

- Le règle de prix reste linéaire par rapport au payoff  $h$ , ce qui est satisfaisant vis-à-vis de l'AOA.
- Le titre fictif  $\tilde{S}$  n'a aucune réalité financière et ne sert qu'à représenter la fonction prix de l'option.
- Si le titre  $S$  avait pour tendance  $\mu = r$ , alors le prix aujourd'hui de l'option serait  $V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-rT}h(S_T))$ , ce qui se relit comme "le prix de l'option est la moyenne des flux futurs actualisés", règle intuitivement raisonnable. Ce cas-là correspondant à un titre neutre au risque car sa prime de risque  $\lambda = \frac{\mu-r}{\sigma} = 0$  est nulle.
- Si le titre  $S$  a une tendance  $\mu \neq r$ , alors la règle précédente  $V_0 = \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-rT}h(S_T))$  de moyennisation sous la probabilité historique n'est plus valable. Pour relier  $V_0$  à moyenne sous la probabilité historique  $\mathbb{P}$ , il est nécessaire de changer de probabilité. Rappelons que d'après (7.2.3), on a

$$S_t = xe^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma\widehat{W}_t} = xe^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma(\widehat{W}_t + \lambda t)}.$$

D'après le théorème 5.2.4 de Cameron-Martin,  $W_t = \widehat{W}_t + \lambda t$  définit un mouvement brownien avec dérive sous  $\mathbb{P}$  et un mouvement brownien standard sous une probabilité  $\mathbb{Q}$  appropriée équivalente à  $\mathbb{P}$  sur  $\mathcal{F}_T$ . La probabilité  $\mathbb{Q}$  correspondante est donnée par

$$\left. \frac{d\mathbb{Q}}{d\mathbb{P}} \right|_{\mathcal{F}_T} = \exp(-\lambda\widehat{W}_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T).$$

Ainsi  $S_t = xe^{(r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$ , c'est-à-dire que  $S$  a même loi sous  $\mathbb{Q}$  que  $\tilde{S}$ . Cela permet d'écrire

$$\begin{aligned} V_0 &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-rT}h(\tilde{S}_T)) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-rT}h(S_T)) \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{P}}(e^{-rT}e^{-\lambda\widehat{W}_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T}h(S_T)). \end{aligned} \tag{7.4.1}$$

La règle de valorisation reste donc une moyenne actualisée des flux futurs, mais avec une pondération  $e^{-\lambda\widehat{W}_T - \frac{1}{2}\lambda^2 T}$  des scénarii de marché.

- La probabilité  $\mathbb{Q}$  porte le nom de **probabilité risque-neutre** (ou probabilité neutre au risque) car sous cette probabilité,  $S$  a pour tendance  $r$  (d'où une prime de risque nulle).

### 7.4.2 Une ré-interprétation avec un point de vue risque-neutre

Nous donnons maintenant une autre preuve de l'égalité (7.4.1), en mettant en jeu non pas l'EDP mais des propriétés d'intégrale stochastique. C'est l'approche moderne de la finance quantitative, qui remonte sous cette forme aux travaux [12, 13] de Harrison et Pliska au début des années 80.

Nous commençons par un résultat simple de martingale.

**Lemme 7.4.2** *Sous la probabilité  $\mathbb{Q}$ , l'actif actualisé  $(e^{-rt}S_t)_t$  est une intégrale stochastique  $\mathcal{F}_t$ -martingale :*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-rt}S_t | \mathcal{F}_s) = e^{-rs}S_s \quad (s \leq t), \quad d(e^{-rt}S_t) = e^{-rt}S_t \sigma dW_t.$$

Compte-tenu de cette propriété,  $\mathbb{Q}$  s'appelle aussi **probabilité martingale**.

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

Au vue de l'équation d'autofinancement (7.3.4) sous forme actualisée entre 0 et  $T$ , le problème de réplication devient

$$e^{-rT}h(S_T) = e^{-rT}V_T = V_0 + \int_0^T \delta(u)e^{-ru}S_u\sigma dW_u.$$

Sous  $\mathbb{Q}$  (et non sous  $\mathbb{P}$ ), le dernier terme est une intégrale stochastique. On sait dans les bons cas<sup>7</sup> que cela définit un processus d'espérance nul. **Formellement**, on obtient, par passage à l'espérance sous  $\mathbb{Q}$ , que

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-rT}h(S_T)) = V_0.$$

Nous retrouvons ainsi la représentation précédente. Toutefois, cette approche a des différences importantes avec celle par EDP.

- Par l'EDP, on montre qu'il existe une stratégie de couverture, on donne sa forme et on détermine le prix de l'option. C'est une approche constructive.
- Par la probabilité risque-neutre en admettant l'existence d'une stratégie de réplication, on déduit seulement (mais directement) le prix du portefeuille associé, sous forme d'espérance. Par différence avec l'approche EDP, il n'est pas nécessaire d'avoir un payoff comme simple fonction du titre en  $T$ , on pourra ainsi valoriser des payoffs complexes dépendant de toute la trajectoire de  $S$ , payoffs dit path-dependent (voir le chapitre 9 sur les options barrière et lookback).

### 7.4.3 Les formules fermées

La formule de Black et Scholes concerne plus spécifiquement les prix des Calls et des Puts, que nous explicitons ci-dessous.

#### **Théorème 7.4.3 (formule de Black-Scholes)**

1. La fonction prix d'un Call de maturité  $T$  et de prix d'exercice  $K$  est donnée par

$$\text{Call}(t, x, T, K) = x\mathcal{N}\left[d_1(T-t, xe^{r(T-t)}, K)\right] - Ke^{-r(T-t)}\mathcal{N}\left[d_0(T-t, xe^{r(T-t)}, K)\right]$$

avec

$$d_0(\tau, x, y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \ln\left(\frac{x}{y}\right) - \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau}, \quad d_1(\tau, x, y) = d_0(\tau, x, y) + \sigma\sqrt{\tau}$$

où  $\mathcal{N}$  est la fonction de répartition de la loi normale, centrée réduite.

2. De plus, cette option est couverte par un portefeuille qui contient

$$\delta(t) = \text{Call}'_x(t, S_t, T, K) = \mathcal{N}[d_1(T-t, S_t e^{r(T-t)}, K)]$$

parts de titre  $S$ .

---

7. il faut des conditions sur  $(\delta(u))_u$ , conditions ici difficilement vérifiables car nous ne connaissons pas ce processus.

3. De même, la fonction prix d'un Put de mêmes caractéristiques est donnée par

$$\text{Put}(t, x, T, K) = K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}[d_1(T-t, K, x e^{r(T-t)})] - x \mathcal{N}[d_0(T-t, K, x e^{r(T-t)})]$$

avec une couverture de  $\delta(t) = \text{Put}'_x(t, S_t, T, K) = -\mathcal{N}[d_0(T-t, K, S_t e^{r(T-t)})]$  parts de titre  $S$ .

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

#### 7.4.4 Les grecques

Il est important pour la gestion des risques de disposer d'indicateurs pertinents de ces risques. On utilise très souvent la sensibilité ou les dérivées de prix par rapport aux différents paramètres du modèle. On appelle communément ces indicateurs *les grecques* car on les note avec des lettres de l'alphabet grecque.

**Proposition 7.4.4 (grecques)** Les paramètres de sensibilité sont définies et données par

$$\text{Call}'_x = \text{Delta} = \Delta = \mathcal{N}(d_1) \in ]0, 1[,$$

$$\text{Call}'_K = -e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_0) < 0,$$

$$\text{Call}''_{xx} = \text{Gamma} = \Gamma = \frac{1}{x\sigma\sqrt{T-t}} \mathcal{N}'(d_1) > 0,$$

$$\text{Call}'_\sigma = \text{Vega} = x\sqrt{T-t} \mathcal{N}'(d_1) = \Gamma x^2 \sigma (T-t) > 0,$$

$$\text{Call}'_t = \text{Theta} = \Theta = -\frac{x\sigma}{2\sqrt{T-t}} \mathcal{N}'(d_1) - rKe^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_0) < 0,$$

$$\text{Call}'_r = \text{Rho} = \rho = (T-t)Ke^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_0) > 0,$$

en omettant les arguments des fonctions  $d_0$  et  $d_1$ .

On remarque que le prix de Call est convexe en le titre et croissant en la volatilité. Ces différentes fonctions de prix et de sensibilités sont représentées sur la Figure 7.1.

### 7.4.5 Résultats numériques

Pour évaluer numériquement la fonction de répartition  $\mathcal{N}(x)$  de la loi normale, on peut utiliser l'approximation suivante (voir [15] p.271) : pour  $x \geq 0$

$$\mathcal{N}(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} (a_1y + a_2y^2 + a_3y^3 + a_4y^4 + a_5y^5),$$

$$\text{avec } y = \frac{1}{1 + 0.2316419x}, \quad a_1 = 0.319381530, \quad a_2 = -0.356563782,$$

$$a_3 = 1.781477937, \quad a_4 = -1.821255978, \quad a_5 = 1.330274429.$$

Elle est précise à  $10^{-7}$ . La suivante est précise à  $10^{-5}$  (voir [33] p.110) : pour  $x \geq 0$

$$\mathcal{N}(x) = 1 - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}x^2} (ay + by^2 + cy^3),$$

$$\text{avec } y = \frac{1}{1 + 0.33267x}, \quad a = 0.4361836,$$

$$b = -0.1201676, \quad c = 0.937298.$$

Pour  $x \leq 0$ , on utilise le fait que  $\mathcal{N}(x) = 1 - \mathcal{N}(-x)$ .

**Exemple.** Prenons les paramètre suivants :  $x = 100\text{€}$ ,  $r = 2\%$ ,  $\sigma = 25\%$ ,  $T = 0.5$  (6 mois), pour un Call et un Put avec différents prix d'exercice.

Valeurs à $t = 0$	Call $K = 95\text{€}$	Call $K = 100\text{€}$	Call $K = 105\text{€}$	Put $K = 95\text{€}$	Put $K = 100\text{€}$	Put $K = 105\text{€}$
Prix	10.2 €	7.52 €	5.37 €	4.27 €	6.52 €	9.33€
Montant en titres	66.8 €	55.8 €	44.7€	-33.2€	-44.2€	-55.2€
Montant en cash	-56.6 €	-48.28€	-39.33€	37.47€	50.72 €	64.53 €
Delta	0.668	0.558	0.447	-0.332	-0.442	-0.552
Gamma	0.0205	0.0223	0.0224	0.0205	0.0223	0.0224
Vega	25.7	27.9	28	25.7	27.9	28
Theta	-7.54	-7.94	-7.78	-5.67	-5.96	-5.70
Rho	28.3	24.1	19.7	-18.7	-25.4	-32.3



A la vue de ces valeurs numériques, il y a des observations simples mais importantes à faire :

1. pour couvrir un Call (protection contre la hausse), le vendeur a besoin d'acheter le titre ( $\Delta > 0$ ). Pour financer cette position, il devient emprunteur (montant en cash négatif). La situation est inversée pour le vendeur de Put, qui vend le titre et se retrouve prêteur de cash.
2. la différence du delta d'un Call et d'un Put de même prix d'exercice vaut 1 : cette propriété est liée à la relation de parité Call/Put. Cette même relation de parité assure que le Gamma et le Vega sont égaux pour un Call et un Put de mêmes caractéristiques.
3. la volatilité  $\sigma_t^{\text{Call}}$  de l'option définie comme le processus satisfaisant

$$d\text{Call}(t, S_t) = \text{Call}(t, S_t)(\dots dt + \sigma_t^{\text{Call}} dW_t)$$

est donnée par

$$\sigma_t^{\text{Call}} = \frac{\text{Call}'_x(t, S_t)}{\text{Call}(t, S_t)} \sigma S_t$$

(l'identification vient en comparant avec l'équation d'autofinancement (??)). Prenons un exemple avec  $K = 100$  : cela donne  $\sigma_0^{\text{Call}} \approx 185\%$ . Cela illustre bien l'effet de levier des options : la volatilité (mesurant les fluctuations des cours) a été multipliée par un facteur supérieur à 7 en passant du sous-jacent à l'option.

**Remarque 7.4.5** Une très bonne approximation du prix d'un Call de prix d'exercice égal à la monnaie forward ( $K = xe^{r(T-t)}$ ) est donnée par la formule de Brenner-Subrahmanyam (1994) (voir exercice 7.5) :

$$\text{Call}(t, x, T, K) \approx 0.4x\sigma\sqrt{T-t}.$$

## ◆ ◆ ◆ POUR EN SAVOIR PLUS ◆ ◆ ◆

### 7.5 Le cas de titres versant des dividendes

Jusqu'à maintenant, nous avons supposé que le titre  $S$  ne verse pas de dividende. Dans ce paragraphe, nous étendons l'analyse précédente au cas de sous-jacent versant des dividendes. Nous donnons trois exemples où il est nécessaire de considérer des dividendes.

1. Le premier est le plus évident. C'est celui d'une action qui détache un dividende à une date connue (*dividende discret*). Par extension, c'est le cas des indices composés de titres versant des dividendes discrets : dans ce cas, il n'est déraisonnable de faire l'approximation que l'indice verse un taux de dividende continu.

2. Le second exemple est lié au fait que la vente à découvert d'actions, bien qu'autorisée, n'est pas gratuite. Il y a un taux de prêt (noté  $q$  dans la suite et appelé *taux repo*) que paie le vendeur et que reçoit le prêteur de titres. Ainsi, détenir une action revient à percevoir un taux de dividende continu en sus.
3. Le troisième exemple est plus subtil et concerne le marché des changes : bien que non abordé dans cet ouvrage, nous expliquons brièvement ce cas. Un taux de change n'est pas un titre négociable (on négocie l'une ou l'autre des devises). Toutefois, un raisonnement d'arbitrage entre marchés internationaux montre que, valoriser une option sur taux de change dollar-euro se ramène (d'un point de vue du marché €) à une option sur un titre versant un dividende continu égal au taux d'intérêt du marché \$.

Dans la suite, nous reprenons la valorisation de Calls/Puts lorsque le sous-jacent verse un taux de dividende continu, puis des dividendes à des dates discrètes.

### 7.5.1 Le cas de titres versant un taux de dividende continu

Nous reformulons les principales définitions et résultats dans le cas de dividende continu.

**Définition 7.5.1 (et proposition)** *Un portefeuille autofinçant investi dans le cash et le titre  $S$  (versant un dividende continu au taux  $q$  par unité de temps) a pour valeur liquidative en  $t$   $V_t = \delta^0(t)S_t^0 + \delta(t)S_t$ , et sa dynamique est*

$$\begin{aligned} V_t &= V_0 + \int_0^t \delta^0(u) dS_u^0 + \delta(u)(dS_u + qS_u du) \\ &= V_0 + \int_0^t rV_u du + \int_0^t \delta(u)(dS_u + (q - r)S_u du). \end{aligned} \quad (7.5.1)$$

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

Comme précédemment, le problème de couverture du contrat financier de flux  $h(S_T)$  se traduit pour le vendeur du contrat par trouver le montant initial de la prime ( $V_0$ ) et la stratégie de couverture, de sorte que son portefeuille autofinçant ait pour valeur  $h(S_T)$  à échéance :

$$dV_t = rV_t dt + \delta(t)(dS_t - (r - q)S_t dt) \quad \text{avec } V_T = h(S_T).$$

Alors, il n'est pas difficile de voir que les théorèmes 7.3.3 et 7.4.1 deviennent dans un cadre avec dividende continu :

**Théorème 7.5.2** *Soit  $h$  une fonction mesurable, à croissance au plus linéaire, pour laquelle l'EDP ci-dessous admet une solution régulière  $v(t, x)$  sur  $]0, T[ \times ]0, +\infty[$  :*

$$\begin{cases} \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 v''_{xx}(t, x) + (r - q)x v'_x(t, x) + v'_t(t, x) - rv(t, x) = 0, \\ v(T, x) = h(x). \end{cases}$$

Le flux  $h(S_T)$  est répliquable par un portefeuille autofinçant, dont la valeur à la date  $t$  est  $v(t, S_t)$ , et celle du portefeuille de couverture est  $\delta(t, S_t) = v'_x(t, S_t)$ .

De plus, si  $(\tilde{S}_t)_t$  un titre fictif de dynamique  $\frac{d\tilde{S}_t}{\tilde{S}_t} = (r - q)dt + \sigma dW_t$  avec  $W$  un mouvement brownien sous une probabilité  $\mathbb{Q}$ , alors la solution de l'EDP d'évaluation est donnée par

$$v(t, x) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)} h(\tilde{S}_T) | \tilde{S}_t = x].$$

Là encore, on peut interpréter la règle de prix à l'aide d'un changement de probabilité, nous omettons les détails. Nous retiendrons simplement que sous la probabilité risque-neutre  $\mathbb{Q}$ , les portefeuilles autofinçants actualisés sont des intégrales stochastiques mais pas le titre risqué actualisé (à cause du dividende) : la dynamique du titre sous  $\mathbb{Q}$  est

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - q)dt + \sigma dW_t$$

(même dynamique que  $\tilde{S}$ ). La quantité  $\nu = r - q$  s'appelle le **coût de portage**.

Un calcul explicite à l'aide des lois gaussiennes permet de donner une formule fermée aux prix de Call et Put. Les fonctions  $d_0$  et  $d_1$  sont inchangées.

**Théorème 7.5.3 (formule de Black-Scholes avec dividende continu)**

1. La fonction prix d'un Call de maturité  $T$  et de prix d'exercice  $K$  sur un titre versant un dividende au taux continu  $q$  est donnée par

$$\begin{aligned} \text{Call}(t, x, T, K) = & x e^{-q(T-t)} \mathcal{N} \left[ d_1(T-t, x e^{(r-q)(T-t)}, K) \right] \\ & - K e^{-r(T-t)} \mathcal{N} \left[ d_0(T-t, x e^{(r-q)(T-t)}, K) \right]. \end{aligned}$$

2. De plus, cette option est couverte par un portefeuille qui contient

$$\delta(t) = \text{Call}'_x(t, S_t, T, K) = e^{-q(T-t)} \mathcal{N}[d_1(T-t, S_t e^{(r-q)(T-t)}, K)]$$

parts de titre  $S$ .

3. De même, la fonction prix d'un Put de mêmes caractéristiques est donnée par

$$\begin{aligned} \text{Put}(t, x, T, K) &= K e^{-r(T-t)} \mathcal{N}[d_1(T-t, K, x e^{(r-q)(T-t)})] \\ &\quad - x e^{-q(T-t)} \mathcal{N}[d_0(T-t, K, x e^{(r-q)(T-t)})] \end{aligned}$$

avec une couverture de

$$\delta(t) = \text{Put}'_x(t, S_t, T, K) = -e^{-q(T-t)} \mathcal{N}[d_0(T-t, K, S_t e^{(r-q)(T-t)})]$$

parts de titre  $S$ .

## 7.5.2 Le cas de titres versant des dividendes discrets

Supposons maintenant que le titre<sup>8</sup>  $S^{(\delta, y)}$  détache un dividende aux dates discrètes connues  $0 < t_1 < \dots < t_n \leq T$ . Le montant est supposé être une fonction affine du titre : en d'autres termes, à la date  $t_i$ , le dividende comporte un montant fixe  $\delta_i \geq 0$  et un montant proportionnel égal à  $y_i S_{t_i}^{(\delta, y)}$  ( $y_i \in [0, 1]$ ). Ainsi, le montant global de dividende en  $t_i$  vaut

$$\delta_i + y_i S_{t_i}^{(\delta, y)},$$

ce qui implique (par absence d'opportunité d'arbitrage) que le titre  $S$  saute vers le bas à la valeur

$$S_{t_i}^{(\delta, y)} = S_{t_i-}^{(\delta, y)} - [\delta_i + y_i S_{t_i-}^{(\delta, y)}] = S_{t_i-}^{(\delta, y)} (1 - y_i) - \delta_i \quad (7.5.2)$$

juste après le paiement de dividende.

Pour couvrir un Call, le vendeur d'option met en oeuvre une couverture dynamique comme précédemment. Nous laissons au lecteur le soin de vérifier les détails. Au final, la prime initiale de l'option (prix du Call à  $t = 0$ ) vaut

$$\mathbb{E}(e^{-rT} (S_T^{(\delta, y)} - K)_+)$$

où  $S^{(\delta, y)}$  suit une dynamique risque-neutre entre deux dates de dividendes ( $dS_t^{(\delta, y)} = rS_t^{(\delta, y)} dt + \sigma S_t^{(\delta, y)} dW_t$ ), et le prix à une date intermédiaire s'écrit de manière analogue.

A cause des dividendes discrets,  $S_T^{(\delta, y)}$  n'est plus log-normale : c'est une somme de v.a. log-normales corrélées dont la loi n'est pas explicitement connue. En effet, un calcul simple par récurrence (sur le nombre de dates) permet de montrer l'identité suivante.

**Lemme 7.5.4** Posons  $\pi_{i, n} = \prod_{j=i+1}^n (1 - y_j) = (1 - y_n) \cdots (1 - y_{i+1})$  pour  $0 \leq i \leq n$  avec la convention  $\prod_{j=n+1}^n (1 - y_j) = 1$  (de telle sorte que  $\pi_{n, n} = 1$ ), et notons  $S_t = S_0 \exp((r - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t)$  le cours risque-neutre de l'actif sans dividende. Alors

$$S_T^{(\delta, y)} = \pi_{0, n} S_T - \sum_{i=1}^n \delta_i \pi_{i, n} \frac{S_T}{S_{t_i}}$$

8. l'exposant  $(\delta, y)$  fait référence aux dividendes définis après.

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

Remarquons que si la partie fixe  $\delta_i$  des dividendes est nulle, alors  $S_T^{(\delta,y)} = \pi_{0,n} S_T$  reste log-normal et le prix du Call  $\mathbb{E}(e^{-rT}(S_T^{(\delta,y)} - K)_+)$  est encore donné par une formule de type Black-Scholes, où l'on remplace  $S_0$  par  $S_0 \pi_{0,n}$ . Dans le cas  $\delta_i \neq 0$ , le calcul exact n'est pas possible : on peut avoir recours à des méthodes de simulations Monte Carlo mais on peut aussi développer des approximations s'appuyant sur l'hypothèse  $\frac{\delta_i}{S_0} \rightarrow 0$ .

**Théorème 7.5.5 (Développement du prix au premier ordre en  $\delta$ )** *Posons*

$$\hat{\delta}_i = \delta_i \pi_{i,n} e^{r(T-t_i)} \quad \text{et} \quad K^{(\delta)} = K + \sum_{i=1}^n \hat{\delta}_i.$$

Alors le prix d'un Call sur un actif avec dividende discret est relié au prix Black-Scholes sans dividende et à ses grecques par rapport à  $K$  :

$$\begin{aligned} \mathbb{E}(e^{-rT}(S_T - K)_+) = & \text{Call}^{BS} \left( 0, \pi_{0,n} S_0, T, K^{(\delta)} \right) \\ & + \sum_{i=1}^n \hat{\delta}_i \left( \partial_k \text{Call}^{BS} \left( 0, \pi_{0,n} S_0 e^{\sigma^2(T-t_i)}, T, K^{(\delta)} \right) \right. \\ & \left. - \partial_k \text{Call}^{BS} \left( 0, \pi_{0,n} S_0, T, K^{(\delta)} \right) \right) + O\left( \sup_i \left( \frac{\delta_i}{S_0} \right)^2 \right). \end{aligned}$$

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

L'avantage de cette approximation en petit dividende est sa facilité d'utilisation car tous les termes à évaluer relèvent de la formule explicite de Black-Scholes. Comme on le voit dans la preuve, la clé pour avoir un développement explicite est l'utilisation du théorème de changement de probabilité de Cameron-Martin. Sur le même principe, il n'est pas très difficile de poursuivre le développement limité à l'ordre 2, 3 ... Nous renvoyons à [9]. Par exemple, le terme d'ordre 2 à ajouter à la formule précédente est égal à

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2} \left( \sum_{1 \leq i, j \leq n} \hat{\delta}_i \hat{\delta}_j e^{\sigma^2(T-t_i \vee t_j)} \partial_k^2 \text{Call}^{BS}(0, \pi_{0,n} S_0 e^{\sigma^2(2T-t_i-t_j)}, T, K^{(\delta)}) \right. \\ & - 2 \left( \sum_{j=1}^n \hat{\delta}_j \right) \sum_{i=1}^n \hat{\delta}_i \partial_k^2 \text{Call}^{BS}(0, \pi_{0,n} S_0 e^{\sigma^2(T-t_i)}, T, K^{(\delta)}) \\ & \left. + \left( \sum_{j=1}^n \hat{\delta}_j \right)^2 \partial_k^2 \text{Call}^{BS}(0, \pi_{0,n} S_0, T, K^{(\delta)}) \right) \end{aligned}$$

avec une erreur d'ordre  $O(\sup_i (\frac{\delta_i}{S_0})^3)$ .

## 7.6 Exercices

### Exercice 7.1

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

### Exercice 7.2 Collar.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**Exercice 7.3 Propriétés qualitatives des Calls.**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**Exercice 7.4 Prix arbitrables.**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.



**Exercice 7.5 Approximation à la monnaie forward de prix de Call.**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**Exercice 7.6 Primes de risque et absence d'opportunité d'arbitrage.**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**Exercice 7.7 ★ Assurance perpétuelle contre la baisse d'un titre.**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**Exercice 7.8 ★ Effet de levier.**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**Exercice 7.9 La sur-réplication en temps discret.**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

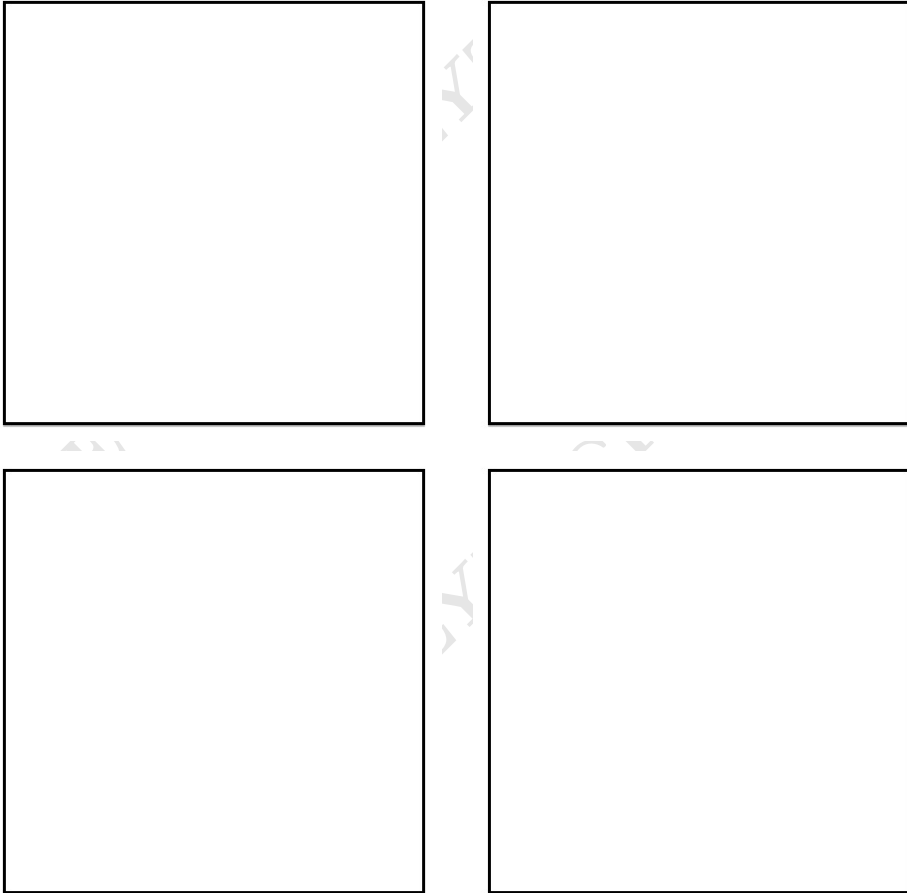


FIGURE 7.1 – Prix de Call. En haut à gauche : profil de prix Call et payoff  $(x - K)_+$ . En haut à droite : surface de prix en fonction de  $x$  et  $T$ . En bas à gauche : surface du  $\Delta$  en fonction de  $x$  et  $T$ . En bas à droite : surface du  $\Gamma$  en fonction de  $x$  et  $T$ .

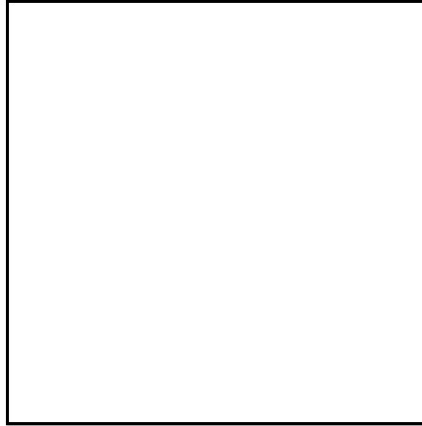


FIGURE 7.2 – La nappe correspond à la surface de prix d'un Call, i.e.  $\text{Call}(t, x, T, K)$ , comme fonction de  $t$  et de  $x$ . La courbe en bleu foncé est une simulation de prix du titre  $(S_t)_{0 \leq t \leq T}$  pendant la durée de vie de l'option. Pour avoir le processus de prix de l'option  $(\text{Call}_t = \text{Call}(t, S_t, T, K))_{0 \leq t \leq T}$  au cours du temps, on évalue la fonction prix le long du cours du titre (on projette sur la surface ce qui donne la courbe rouge) : la réalisation correspondante du processus de prix de Call est la courbe verte. Les paramètres de l'option sont  $S_0 = K = 100$ ,  $\sigma = 25\%$ ,  $r = 2\%$  et  $T = 1$  an.

ECOLE POLYTECHNIQUE

ECOLE POLYTECHNIQUE

ECOLE POLYTECHNIQUE

LES OUTILS STOCHASTIQUES DES MARCHÉS FINANCIERS

## Chapitre 8

# Mise en pratique

Ce chapitre complète le précédent sous un angle plus opérationnel. Nous discutons de l'estimation des paramètres (calibration), de la performance de la couverture dynamique et de l'impact du risque de modèle sur la couverture.

### 8.1 Estimation de la volatilité

Ce paramètre n'est pas observable instantanément sur le marché, il faut donc l'en *extraire* par une voie ou une autre. Comme nous l'avons vu dans la formule de Black et Scholes, le paramètre de volatilité joue un rôle très important ; on va jusqu'à dire que les traders vendent ou achètent la volatilité.

#### 8.1.1 Volatilité historique

La première voie est la plus naturelle, elle consiste à estimer  $\sigma$  statistiquement à partir de l'observation des cours. Cela conduit à la **volatilité historique**. D'un point de vue pratique, on utilise que les rendements logarithmiques du modèle de Black-Scholes-Merton sont gaussiens et indépendants :

$$\text{Log}(S_{t_{i+1}}) - \text{Log}(S_{t_i}) \stackrel{\text{loi}}{=} \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)(t_{i+1} - t_i), \sigma^2(t_{i+1} - t_i)\right).$$

On peut ainsi calculer un estimateur du maximum de vraisemblance conduisant à l'écart-type empirique. Le graphe 8.1 montre le résultat de cette estimation sur les données de l'indice français CAC40 sur la période 1990-2010. Ce qu'on observe, c'est un manque de stationnarité dans les données, ce qui impose de restreindre les observations à une plage récente (60 jours sur le graphe). Mentionnons qu'en plus des cours d'ouverture et de clôture, on peut utiliser aussi les plus hauts et plus bas (ce qui de toute façon ne résout pas le problème de stationnarité). Cette durée d'estimation de 60 jours n'est pas vraiment compatible avec la notion de volatilité instantanée, dont nous avons besoin a priori.

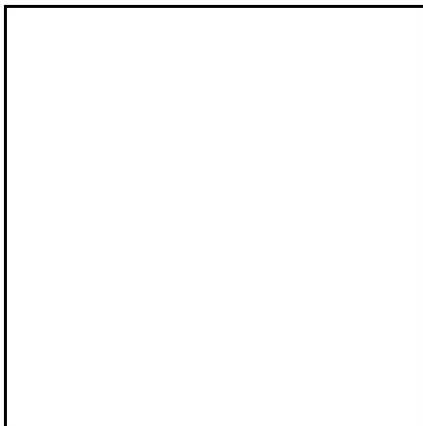


FIGURE 8.1 – Volatilité historique annualisée du CAC40 calculée à partir des cours de clôture des 60 derniers jours.

### 8.1.2 Volatilité implicite

En fait, la méthodologie précédente n'est pas adoptée par les financiers dans le cadre de la couverture d'options. On privilégie une approche implicite, qui extrait le paramètre de volatilité des prix d'options cotés sur le marché par l'intermédiaire de la formule de Black et Scholes :

$$\text{Call}(t, S_t, T, K, \sigma_{\text{impl}}) = \text{Call}_t(T, K) \quad (\text{pour une cotation de l'actif } S_t).$$

On obtient ainsi la **volatilité implicite**  $\sigma_{\text{impl}}$ . Ce paramètre est celui qui est révélé par les prix d'options cotées et que, d'une certaine manière, le marché anticipe pour la période future  $[t, T]$ . La volatilité implicite est une représentation intrinsèque des prix de marché, qui permet une comparaison facile des prix pour différents prix d'exercice, bien que ceux-ci ne soient pas du même ordre de grandeur. Le calcul effectif de  $\sigma_{\text{impl}}$  repose sur une inversion de la formule de Black-Scholes, ce qui est validé par le résultat suivant.

**Proposition 8.1.1** *La fonction  $\sigma \mapsto \text{Call}(t, S_t, T, K, \sigma)$  est une bijection croissante de  $[0, +\infty]$  dans  $[(S_t - Ke^{-r(T-t)})_+, S_t]$ . De plus, les bornes d'arbitrage (relation de hedge) donne que le prix de marché  $\text{Call}_t(T, K) \in [(S_t - Ke^{-r(T-t)})_+, S_t]$ . Il existe donc une unique volatilité  $\sigma_{\text{impl}}$  égalisant prix du modèle et prix du marché.*

Preuve :



Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

**Exemple.** Si le prix de Call est coté à  $\text{Call}_t(T, K) = 4.98\text{€}$  pour  $K = 100\text{€}$ , une maturité  $T - t = 0.25$  (3 mois), un titre de valeur  $S_t = 98.1\text{€}$ , un taux d'intérêt  $r = 2\%$ , alors  $\sigma_{\text{impl}} = 28.7\%$  car  $\text{Call}(t, S_t, T, K, \sigma_{\text{impl}}) = 4.98\text{€}$ .

Remarquons que par la relation de parité Call/Put, la volatilité implicite est la même si on considère un Call ou un Put, toutes choses égales par ailleurs.

Sous cette forme, le paramètre  $\sigma_{\text{impl}}$  semble dépendre de  $(t, T, K)$ , mais devrait être constant si le modèle est bien celui de Black-Scholes-Merton. La Figure 8.2 montre le calcul de la volatilité implicite

$$K \mapsto \sigma_{\text{impl}}(t, T, K)$$

pour différents prix d'exercice pour des Calls, invalidant ainsi l'hypothèse de modèle de Black-Scholes-Merton. Le phénomène est connu sous le nom de **smile de volatilité** (*volatility smile*), à cause de la forme vaguement parabolique d'un sourire. La volatilité implicite a tendance à être plus élevée pour les prix d'exercices dans ou hors la monnaie<sup>1</sup> correspondant à  $S_0 e^{rT} \ll K$  et  $S_0 e^{rT} \gg K$ , alors qu'elle l'est moins à la monnaie<sup>2</sup>  $S_0 e^{rT} \approx K$ . Sur certains actifs sous-jacents (comme les indices, voir l'Eurostoxx50 sur la Figure 8.2), on observe plutôt un **skew de volatilité** (*volatility skew*) correspondant à une surface oblique, décroissante avec  $K$ . Ce phénomène s'explique ainsi : la plus grande valeur de volatilité implicite pour  $K \ll S_0$  traduit une sur-cote relative des prix de Put pour de tel prix d'exercice. Cette pression à la hausse sur les prix de Put n'est qu'une réponse au grand nombre d'investisseurs acheteurs de protection contre une chute des cours (nombreux gestionnaires de fond

1. on parle alors de Call OTM (out-of-the-money) ou ITM (in-the-money).

2. on parle alors de Call ATM (at-the-money).

se couvrent contre un krach boursier). Inversement, sur certaines matières premières (voir le cacao sur la Figure 8.2), les entreprises ou investisseurs se protègent contre une envolée des cours : ainsi, il y a une pression acheteuse sur les Calls pour  $K \gg S_0$ , induisant un *skew* inversé. Enfin, sur les marchés des changes, vue la symétrie du échanges, en général la surface de volatilité implicite ressemble davantage à un *smile*.

### 8.1.3 Conclusion

Le modèle de Black-Scholes-Merton n'est pas valide, il reste néanmoins très utilisé pour définir des représentations de prix (via la volatilité implicite et des conventions de marché analogues). Une des principales raisons est de disposer de formules fermées pour le prix et la couverture, donc rapides à évaluer. Ce modèle est aussi très utilisé comme première approximation, autour de laquelle on va pouvoir développer des variantes/perturbations et atteindre des modèles plus avancés, qui seront en meilleure adéquation avec les données de marché. Dans le chapitre 10, nous incorporons par exemple des sauts dans la dynamique de prix et étudions ces implications. Mais il existe bien d'autres modèles (modèles à volatilité locale, à volatilité stochastique...), dont le traitement détaillé dépasse le niveau de cet ouvrage. Un tel modèle est étudié dans l'exercice 9.6.

Signalons un point important : le rejet du modèle de Black-Scholes-Merton en tant que modèle ne remet pas en cause la méthodologie de couverture du risque, par un portefeuille de couverture dynamique. Ce principe s'étend à toute une variété de modèles.

En observant les graphes de données de la figure 8.2, le lecteur pourrait s'interroger sur le sens de **calculer des prix de Calls avec un modèle, puisque les prix sont déjà connus sur le marché**. Dans les années 1980, la volatilité implicite était utilisée pour calculer la couverture de l'option. Depuis ces dernières années, les contrats d'options standards, encore appelés vanilles, sont devenus tellement liquides qu'il n'est plus vraiment nécessaire de les couvrir, puisqu'on peut les revendre dès qu'on veut s'en débarrasser. Ils sont utilisés en couverture d'options plus exotiques. En fait, les modèles sont nécessaires pour valoriser et couvrir les contrats de gré à gré, les prix de Call ne servant alors que de références pour *calibrer le modèle et ses paramètres*. On cherche ainsi des modèles cohérents avec les *smiles* de volatilité.

## 8.2 Couverture dynamique

Alors que nous avons trouvé une solution mathématique à la couverture de l'option par un portefeuille autofinçant, cette solution nécessite des adaptations pour être mise en pratique. En effet, pour un Call par exemple, la solution trouvée préconise de détenir à toute date  $t$  un nombre  $\text{Call}'_x(t, S_t, T, K)$  de titres, ce qui conduit à deux considérations pratiques :

1. là encore, il est nécessaire de connaître la volatilité du modèle (le Delta en dépend), volatilité qu'on aura au préalable estimée (voir la discussion précédente).
2. le réajustement de la couverture doit être continu en temps, ce qui évidemment ne peut être satisfait parfaitement.

C'est ce second point que nous discutons. En pratique, un re-balancement quotidien ou hebdomadaire des positions est réalisé : cela induit une erreur de couverture (*tracking error*). Plus le re-balancement est fréquent, plus cette erreur est faible, jusqu'à devenir nulle à la limite en temps continu. Sur la figure 8.3, nous reportons les distributions de cette *tracking error*, calculées par simulations, dans plusieurs cas. La colonne de droite correspond à un réajustement hebdomadaire (52 jours/an), alors qu'à gauche c'est quotidien (252 jours/an). On observe effectivement une diminution de l'erreur de couverture lorsque la fréquence de re-balancement augmente. Dans le cas du Call, on peut montrer que cela décroît comme la racine carrée de cette fréquence. Par ailleurs, en dépit des apparences, ces distributions ne sont pas gaussiennes.

L'influence de rendement historique  $\mu$  du titre est notable, et conduit à des distributions significativement différentes. Lorsque  $\mu$  est très positif, on observe de plus un biais négatif de la distribution de l'erreur de couverture.

Pour terminer, mentionnons que les praticiens n'utilisent pas que la couverture en Delta (immunisant contre les variations d'ordre 1 des cours), mais la combinent à des insensibilisations d'ordre 2 ou par rapport à d'autres paramètres (volatilité...) : ce sont les stratégies dites en *Delta-Gamma*, *Delta-Vega*... Pour cela, les calculs de grecques sont utiles.

### 8.3 Volatilité implicite et Risk-Management

Le paramètre de volatilité implicite est un outil clé du Risk-Management, puisqu'il permet à partir de la connaissance d'un prix d'option de mettre en place les stratégies de couverture et les mesures de sensibilité associées, par le biais des grecques.

Le Vega est une mesure de l'exposition à une mauvaise estimation de la valeur de la volatilité. Rappelons qu'il est "proportionnel" au Gamma. C'est un outil de mesure du risque de modèle, calculé par la *tracking error*, représentant la différence entre la valeur du portefeuille de couverture mis en place avec de mauvais paramètres et le payoff de l'option.

**Proposition 8.3.1** *Supposons que l'on utilise à tort la formule de Black et Scholes avec une volatilité constante  $\sigma^{BS}$  alors que la "vraie" volatilité instantanée de l'actif est  $\sigma_t$  éventuellement aléatoire, mais inconnue, pour donner le prix  $C^{BS}$  d'un produit dérivé dont le payoff est  $h(S_T)$ .*

*La stratégie de couverture est mise en place à l'aide de la volatilité  $\sigma^{BS}$  ; cela conduit à une erreur de réplication (tracking error) à maturité, donnée par*

$$e_T = V_T(\Delta^{BS}(h)) - h(S_T) = \int_0^T e^{r(T-t)} \frac{1}{2} \left( (\sigma^{BS})^2 - \sigma_t^2 \right) S_t^2 \Gamma^{BS}(t, S_t, \sigma^{BS}) dt. \quad (8.3.1)$$

*Dans le cas des Calls, on peut exploiter les liens entre Gamma et Vega pour transformer l'équation*

$$e_T = \int_0^T e^{r(T-t)} \frac{\sigma^{BS}}{2(T-t)} \left( 1 - \frac{\sigma_t^2}{(\sigma^{BS})^2} \right) \text{Vega}^{BS}(t, S_t, \sigma^{BS}) dt.$$

**Preuve :**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

Cette estimation de l'erreur peut être utilisée pour justifier de certaines approximations faites dans le marché sur les volatilités. De nombreux produits dont la volatilité est structurellement aléatoire sont évalués avec une formule de Black Scholes. Lorsque la volatilité choisie majore la vraie volatilité, le résultat est favorable au trader (dans (8.3.1), on a  $e_T \geq 0$ ) si le Gamma est positif, c'est à dire si le prix est convexe. Nous savons que cette propriété vraie pour les Calls s'étend à tous les payoffs convexes.

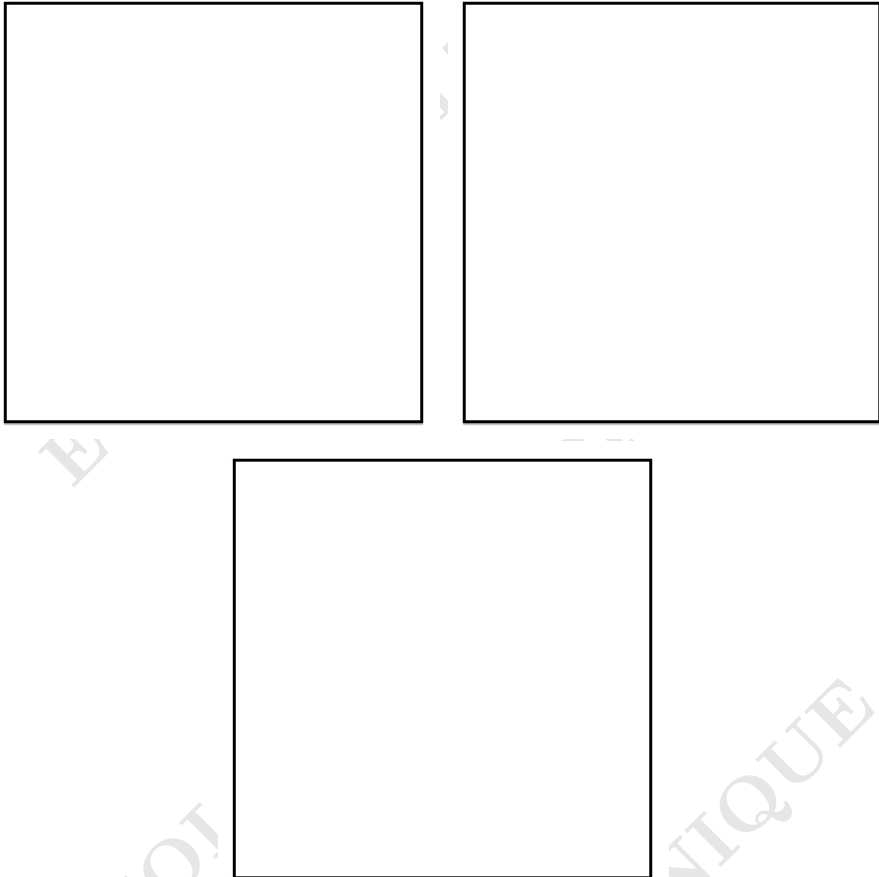


FIGURE 8.2 – Des exemples de surface de volatilité implicite  $(T, K) \mapsto \sigma_{\text{impl}}(0, T, K)$ . En haut à gauche : l'EUROSTOXX50. En haut à droite : le cacao. En bas (Source : Bloomberg) : le taux de change Dollar-Yen.

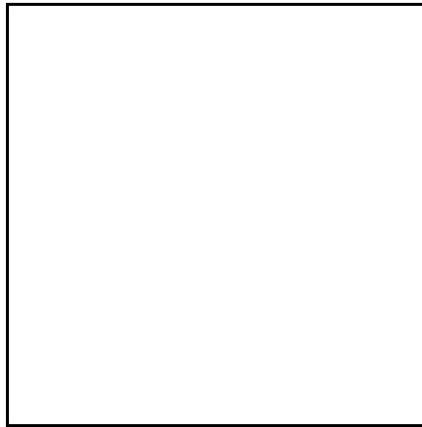


FIGURE 8.3 – Distributions des erreurs de couverture avec re-balancement hebdomadaire (gauche) ou quotidien (droite). L'influence du rendement du titre  $\mu$  est aussi comparée (1ère ligne :  $\mu = -30\% \ll r$ , 2ème ligne  $\mu = r$ , 3ème ligne  $\mu = -30\% \gg r$ ). Les paramètres de l'option sont  $S_0 = K = 100$ ,  $\sigma = 25\%$ ,  $r = 2\%$  et  $T = 1$  an.

## Chapitre 9

# Au delà des options d'achat et de vente

Nous présentons dans ce chapitre quelques morceaux choisis en mathématiques financières, allant des options exotiques jusqu'au risque de crédit en passant par les taux d'intérêt. Là encore, nous privilégions des modélisations à partir du mouvement brownien et nous aboutissons à des formules fermées pour le prix et couverture de produits associés.

### 9.1 Options barrières

#### 9.1.1 Introduction

Les options barrières (*barrier options*) sont des exemples très standards d'options exotiques, c'est-à-dire des contrats financiers dont le flux à échéance dépend de toute la trajectoire du cours du titre entre aujourd'hui et l'échéance. Ces options sont aussi connues sous le nom d'options à déclenchement (*trigger options*). Ces options OTC sont très liquides sur le marché des changes, car les intervenants s'appuient sur l'analyse technique (introduisant des niveaux de support et de résistance, i.e. les barrières) pour développer des anticipations.

- Un *Down-In Call (DIC)* donne le droit à son détenteur d'acheter le titre en  $T$  au prix  $K$  (*Call*) et **son droit est activé** seulement si le titre franchit (*In*) une barrière basse  $D$  (*Down*) pendant la durée de vie du contrat. Son exercice revient à recevoir un flux égal à  $(S_T - K)_+ \mathbf{1}_{\tau_D \leq T}$  où  $\tau_D = \inf\{t \geq 0 : S_t \leq D\}$ .
- C'est un *Down-Out Call (DOC)* si la clause d'activation est de ne pas descendre en dessous de  $D$  (**l'option est alors désactivée**) : le payoff vaut alors  $(S_T - K)_+ \mathbf{1}_{T < \tau_D}$ .
- Le contrat devient *Up-In Call (UIC)* si le titre doit franchir une barrière haute  $U$  (*Up*), avec pour flux équivalent  $(S_T - K)_+ \mathbf{1}_{\tau_U \leq T}$  où  $\tau_U = \inf\{t \geq 0 : S_t \geq U\}$ .
- En combinant les Up/Down, In/Out, Call/Put, on obtient ainsi 8 variantes. On considèrera aussi des options barrières binaires. Par exemple, un *Binary Down-In Call*

(*BinDIC*) a pour flux  $\mathbf{1}_{S_T \geq K} \mathbf{1}_{\tau_D \leq T}$ .

- Parfois, pour les options à barrière désactivante, une prime est versée en compensation, on parle d'option barrière avec *rebate*.
- Enfin, au lieu de constater en temps continu le franchissement de la barrière, cela peut être fait seulement à certaines dates de fixing. Ces options barrières *discrètes* ne bénéficient pas de formules fermées comme leurs analogues continues dans le modèle de Black-Scholes. Dans la suite du chapitre, nous considérons seulement le cas continu.

Une autre manière de classer les options barrières consiste à regarder leur payoff à la barrière.

1. Si celui-ci est nul, ce sont des options barrières dite *regular*. C'est par exemple le cas d'un DOC/DIC avec  $K \geq D$ .
2. Si celui-ci est non nul, elles sont de type *reverse*. C'est par exemple le cas d'un DOC/DIC avec  $K < D$ .

Les options barrières sont des contrats difficiles à couvrir en général, car près de la barrière et de l'échéance, on ne sait pas si le droit va être activé ou pas, et selon les cas, les flux à court terme sont très différents. Dans le cas *reverse*, on peut montrer que le  $\Delta$  de l'option peut tendre vers l'infini (!!), ce qui est très délicat en pratique. Le cas *regular* est plus simple car le  $\Delta$  reste borné.

Les options barrières sont moins chères que les Calls et Puts équivalents sans barrière, car il y a une clause supplémentaire d'activation ou de désactivation.

Pour la valorisation, il est équivalent de valoriser un In ou un Out avec mêmes caractéristiques : en effet, comme  $(S_T - K)_+ \mathbf{1}_{\tau \leq T} + (S_T - K)_+ \mathbf{1}_{T < \tau} = (S_T - K)_+$ , par AOA les prix en  $t$  sont liés par la même relation en faisant intervenir celui d'un Call :

$$\text{DOC}_t + \text{DIC}_t = \text{Call}_t. \quad (9.1.1)$$

Dans la suite, nous donnons des prix explicites à ces options. C'est beaucoup plus délicat que dans le cas des Calls et Puts, car le payoff dépend non seulement de  $S_T$  mais aussi du franchissement ou non de la barrière... Nous autorisons le titre à verser un dividende continu.

### 9.1.2 EDP et espérance risque-neutre

#### **Théorème 9.1.1 (Prix des options barrières : EDP et espérance risque-neutre)**

Considérons une option barrière Down-Out-Call (DOC) de payoff  $(S_T - K)_+ \mathbf{1}_{\tau_D > T}$  sur un titre  $S$  log-normal de tendance  $\mu$ , de volatilité  $\sigma$  et versant un dividende au taux  $q$ .

1) **EDP.** Le prix à l'instant  $t$  du contrat est donné  $V_t = \mathbf{1}_{t < \tau_D} v(t, S_t)$  où  $v$  est solution de l'EDP

$$\begin{cases} \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 v''_{xx}(t, x) + (r - q) x v'_x(t, x) + v'_t(t, x) - r v(t, x) = 0, & t \in [0, T], x \geq D, \\ v(T, x) = (x - K)_+, & x > D, \\ v(t, x) = 0, & t \in [0, T], x \leq D. \end{cases}$$

L'option est couverte par l'achat de  $\delta(t) = \mathbf{1}_{t < \tau_D} v'_x(t, S_t)$  titres  $S$ .

2) **Valorisation risque-neutre.** Notons  $\mathbb{Q}$  la probabilité risque-neutre équivalent à  $\mathbb{P}$ , sous laquelle le titre  $(S_t)_t$  a pour dynamique :

$$\frac{dS_t}{S_t} = (r - q)dt + \sigma dW_t, \quad (9.1.2)$$



(avec  $W$  un  $\mathbb{Q}$ -mouvement brownien). Alors la solution de l'EDP d'évaluation du DOC est donnée par

$$v(t, x) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-r(T-t)}(S_T - K)_+ \mathbf{1}_{T < \tau_D} | S_t = x]$$

où  $\tau_D = \inf\{s \geq t : S_s \leq D\}$ .

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

Par la relation d'arbitrage (9.1.1), on déduit que le prix d'une DIC à l'instant 0 est

$$\text{DIC}(0, x, T, K, D) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT}(S_T - K)_+ \mathbf{1}_{T \geq \tau_D} | S_0 = x]. \quad (9.1.3)$$

Nous nous intéresserons aussi à son analogue digitale, la BinDIC dont le payoff est  $\mathbf{1}_{S_T > K} \mathbf{1}_{T \geq \tau_D}$ . Remarquons que

$$\mathbf{1}_{S_T > K} \mathbf{1}_{T \geq \tau_D} = -\partial_K [(S_T - K)_+ \mathbf{1}_{T \geq \tau_D}],$$

ce qui induit par AOA la même relation sur les prix à toute date intermédiaire, c'est-à-dire

$$\text{BinDIC}(0, x, T, K, D) = -\partial_K \text{DIC}(0, x, T, K, D) \quad (9.1.4)$$

$$\begin{aligned} &= -\partial_K \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT}(S_T - K)_+ \mathbf{1}_{T \geq \tau_D} | S_0 = x] \\ &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}[e^{-rT} \mathbf{1}_{S_T > K} \mathbf{1}_{T \geq \tau_D} | S_0 = x]. \end{aligned} \quad (9.1.5)$$

Le même raisonnement tient aussi pour les Call/Put binaires de payoff  $\mathbf{1}_{S_T > K}$  et  $\mathbf{1}_{S_T < K}$  :

$$\text{BinC}(0, x, T, K) = -\partial_K \text{Call}(0, x, T, K) = e^{-rT} \mathcal{N} \left[ d_0(T, x e^{(r-q)T}, K) \right]. \quad (9.1.6)$$

$$\text{BinP}(0, x, T, K) = \partial_K \text{Put}(0, x, T, K) = e^{-rT} \mathcal{N} [d_1(T, K, x e^{(r-q)T})]. \quad (9.1.7)$$

Dans la suite, nous déterminons des formules fermées pour les prix de DIC et BinDIC. Par AOA, on peut directement déduire celles pour les UICet BinUIC de mêmes caractéristiques. Des formules analogues existent pour les autres options barrières. Les résultats s'expriment en fonction de prix de Call/Put standard et d'un paramètre  $\gamma$  donné par

$$\gamma = 1 - \frac{2\nu}{\sigma^2} \text{ où } \nu = r - q. \quad (9.1.8)$$

Il y a deux approches pour obtenir des formules fermées.

1. Calculer l'espérance sous  $\mathbb{Q}$  du payoff qui dépend de  $S_T = x e^{(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T}$  et  $\{\tau_D \leq T\} = \{\min_{t \in T} S_t \leq D\} = \{x e^{\min_{t \in T} [(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t]} \leq D\}$ . Ainsi, on voit que la connaissance de la loi jointe de  $((r-q-\frac{1}{2}\sigma^2)T + \sigma W_T, \min_{t \in T} [(r-q-\frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t])$  devrait permettre (après un calcul d'intégrale double) d'obtenir des formules explicites (comme pour le Call standard). Dans le cas où  $r - q - \frac{1}{2}\sigma^2 = 0$ , cette loi jointe est reliée directement à celle de la valeur en  $T$  d'un brownien standard et son minimum sur l'intervalle. Nous l'avons obtenue par le principe de symétrie au chapitre 1. Dans le cas  $r - q - \frac{1}{2}\sigma^2 \neq 0$ , il faut en plus faire un changement de dérive/changement de probabilité via le théorème de Cameron-Martin. Ces calculs sont possibles, mais ils sont longs et fastidieux. Nous renvoyons par exemple à [29].
2. Notre présentation suit de près celle de [8], qui exploite des formules de symétrie sur les barrières, développées initialement par Carr, Ellis et Gupta [4].

Au préalable, nous commençons par énoncer quelques propriétés simples des Calls et Puts standards, propriétés qu'il est facile de justifier à partir des formules fermées.

### Lemme 9.1.2 (Propriétés simples des Call/Put standard)

1. **Symétrie Call-Put.** On a

$$\text{Call}(t, x e^{-\nu(T-t)}, T, K) = \text{Put}(t, K e^{-\nu(T-t)}, T, x). \quad (9.1.9)$$

2. **Homogénéité des fonctions prix.** Pour tout  $\lambda > 0$ , on a

$$\text{Call}(t, \lambda x, T, \lambda K) = \lambda \text{Call}(t, x, T, K) \quad \text{et} \quad \text{Put}(t, \lambda x, T, \lambda K) = \lambda \text{Put}(t, x, T, K). \quad (9.1.10)$$

### 9.1.3 Prix des DIC regular ( $D \leq K$ ) dans le cas $\gamma = 1$ ( $r = q$ )

**Proposition 9.1.3** *Considérons la fonction prix du DIC regular ( $D \leq K$ ) dans le cas  $r = q$ .*

1. Si  $x \leq D$ , l'option est activée immédiatement et se transforme en Call :

$$\text{DIC}(t, x, T, K, D) = \text{Call}(t, x, T, K).$$

*La réplication est statique et consiste à acheter un Call de caractéristiques  $(T, K)$ .*

2. Si  $x > D$ , on a

$$\begin{aligned} \text{DIC}(t, x, T, K, D) &= \frac{K}{D} \text{Put}(t, x, T, \frac{D^2}{K}) \\ &= \frac{K}{D} \text{Call}(t, \frac{D^2}{K}, T, x) = \text{Call}(t, D, T, \frac{Kx}{D}). \end{aligned} \quad (9.1.11)$$

La couverture consiste (tant que  $S_u > D$ ) à l'achat de  $\frac{K}{D}$  Puts de caractéristiques  $(T, \frac{D^2}{K})$ , puis à l'instant où l'option est activée, à l'achat d'un Call de caractéristiques  $(T, K)$ .

Preuve:

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

#### 9.1.4 Prix des DIC regular ( $D \leq K$ ) dans le cas général

Lorsque l'option est activée immédiatement ( $x \leq D$ ), le DIC est équivalent à un Call, il n'y a donc rien de plus à justifier par rapport à avant.

Pour  $x > D$ , c'est différent et modifié ainsi.

**Proposition 9.1.4** *Considérons les fonctions prix du DIC et BinDIC regular ( $D \leq K$ ). Pour  $x > D$ , on a*

$$\begin{aligned} \text{DIC}(t, x, T, K, D) &= \left(\frac{x}{D}\right)^{\gamma-1} \text{Call}\left(t, D, T, \frac{Kx}{D}\right), \\ \text{BinDIC}(t, x, T, K, D) &= \left(\frac{x}{D}\right)^{\gamma} \text{BinC}\left(t, D, T, \frac{Kx}{D}\right). \end{aligned}$$

On rappelle que les formules fermées pour les prix des Calls binaires BinC sont donnés en (9.1.6).

Preuve:

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

### 9.1.5 Prix des DIC reverse ( $D > K$ )

Il reste à donner les formules dans le cas *reverse* pour  $x > D$ .

**Proposition 9.1.5** *Considérons les fonctions prix du DIC et BinDIC reverse ( $D > K$ ).*

Pour  $x > D$ , on a

$$\begin{aligned} \text{BinDIC}(t, x, T, K, D) &= \text{BinC}(t, x, T, K) - e^{-r(T-t)} \\ &\quad + \text{BinP}(t, x, T, D) + \text{BinDIC}(t, x, T, D, D), \\ \text{DIC}(t, x, T, K, D) &= \text{Call}(t, x, T, K) - \text{Call}(t, x, T, D) - (D - K)\text{BinC}(t, x, T, D) \\ &\quad + \text{DIC}(t, x, T, D, D) + (D - K)\text{BinDIC}(t, x, T, D, D). \end{aligned}$$

Les options barrières à droite de l'égalité sont de type *regular*, on connaît donc leur prix sous forme fermée.

**Preuve :**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

## 9.2 Taux d'intérêt : modèle de Vasicek

Nous donnons dans ce paragraphe une brève introduction à la modélisation stochastique des taux d'intérêt.

Les instruments de base sont les obligations zéro-coupon de diverses échéances  $T$ . Nous relierons la modélisation de leur dynamique à celle du taux d'intérêt court terme  $(r_t)_t$  (ou **taux spot**). Nous détaillons le modèle de Vasicek [32] pour celui-ci, puis son extension

moderne (modèle de Hull & White). Dans la rubrique POUR EN SAVOIR PLUS, nous abordons la question de la valorisation des Calls sur zéro-coupon.

### 9.2.1 Obligation zéro-coupon

$B(t, T)$  désigne le prix en  $t$  d'un zéro-coupon d'échéance  $T$ , c'est-à-dire le prix à payer en  $t$  pour recevoir 1 € en  $T$ . Si le taux court est  $(r_t)_t$  déterministe, alors on a par AOA :

$$B(t, T) = \exp\left(-\int_t^T r_s ds\right). \quad (9.2.1)$$

En effet, le placement de  $\exp(-\int_t^T r_s ds)$  en cash à la date  $t$  donne après capitalisation 1 € en  $T$ .

Lorsque  $(r_t)_t$  est aléatoire, la quantité  $\exp(-\int_t^T r_s ds)$  dépend du futur après  $t$  et ne peut pas être le prix en  $t$ . Pour satisfaire la propriété d'adaptation à la filtration  $\mathcal{F}_t$  et respecter l'AOA, il est nécessaire de prendre

$$B(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(\exp\left(-\int_t^T r_s ds\right) \middle| \mathcal{F}_t\right) \quad (9.2.2)$$

avec un calcul sous la (une) probabilité risque-neutre  $\mathbb{Q}$ . Nous ne rentrons pas dans une argumentation détaillée de cette relation qui découle de l'arbitrage. Nous l'admettons et mentionnons seulement que cette propriété est en fait analogue à ce qui a été obtenu dans le cadre de la modélisation à la Black-Scholes-Merton. En effet au lemme 7.4.2, nous avons établi que le titre actualisé est une  $\mathcal{F}_t$ -martingale sous  $\mathbb{Q}$ . Dans le cas du zéro-coupon  $S_t = B(t, T)$ , cela s'écrit

$$e^{-\int_0^t r_s ds} B(t, T) = e^{-\int_0^t r_s ds} S_t = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_0^T r_s ds} S_T \middle| \mathcal{F}_t\right) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}\left(e^{-\int_0^T r_s ds} \middle| \mathcal{F}_t\right)$$

puisque  $B(T, T) = 1$ . Le facteur  $\exp(-\int_0^t r_s ds)$  étant  $\mathcal{F}_t$ -adapté, on peut simplifier l'égalité ci-dessus par ce terme et ainsi obtenir la relation (9.2.2).

Cette relation semble donner une importance cruciale à la modélisation du taux d'intérêt court terme. D'autres points de vue (Heath-Jarrow-Morton [14], modèles de marché ...) cherchent à mieux comprendre la structure par termes, en cohérence avec l'AOA, ce qui est fondamental pour la gestion efficace des produits de taux d'intérêt.

### 9.2.2 Le modèle de Vasicek [32] pour le taux court

Sa structure est très simple. Ce modèle rend compte d'un phénomène de retour à la moyenne du taux d'intérêt court terme, en utilisant naturellement un processus d'Ornstein-Uhlenbeck (voir chapitre 3).

On suppose que  $(r_t)_t$  a pour dynamique sous la probabilité risque-neutre  $\mathbb{Q}$

$$dr_t = a(b - r_t) dt - \sigma dW_t \quad r_0 = r \quad (9.2.3)$$

(avec  $W$  un  $\mathbb{Q}$ -mouvement brownien). Cela correspond à un modèle sous la probabilité historique  $\mathbb{P}$  de la forme  $dr_t = a(\hat{b} - r_t) dt - \sigma d\hat{W}_t$  avec  $\hat{b} = b - \frac{\sigma\lambda}{a}$ .

Mettre  $\sigma$  à la place de  $-\sigma$  ne change pas la loi du processus  $(r_t)_t$  car  $-W$  est encore un mouvement brownien. En fait le signe - devant  $\sigma$  est plutôt une convention d'écriture, qui assure par la suite une volatilité positive du zéro-coupon (voir théorème 9.2.3).

### 9.2.3 Propriétés de $(r_t)_t$

Nous résumons dans le résultat suivant les principales propriétés du taux court.

**Proposition 9.2.1** *La solution de l'équation (9.2.3) est donnée par :*

$$r_t = b + (r_0 - b)e^{-at} - \sigma \int_0^t e^{-a(t-s)} dW_s. \quad (9.2.4)$$

1. *C'est un processus gaussien, avec*

$$\begin{aligned} \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(r_t) &= b + (r_0 - b)e^{-at}, & \text{Var}_{\mathbb{Q}}(r_t) &= \frac{\sigma^2}{2a}(1 - e^{-2at}), \\ \text{Cov}_{\mathbb{Q}}(r_s, r_t) &= e^{-a(s-t)} \text{Var}(r_t) \quad (s > t). \end{aligned}$$

2. *La variable  $I(t, T) = \int_t^T r_s ds$  est gaussienne, de moyenne (conditionnellement à  $r_t$ )  $m(T-t)$  et de variance  $\Sigma^2(T-t)$ , où :*

$$\begin{aligned} m(T-t) &= b(T-t) + (r_t - b) \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}, \\ \Sigma^2(T-t) &= -\frac{\sigma^2}{2a^3}(1 - e^{-a(T-t)})^2 + \frac{\sigma^2}{a^2} \left( T-t - \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} \right). \end{aligned}$$

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

### 9.2.4 Prix des zéro-coupons

De l'égalité  $B(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left( \exp(-\int_t^T r_s ds) | r_t \right)$  et des propriétés gaussiennes de  $I(t, T) = \int_t^T r_s ds$  conditionnellement à  $r_t$ , on déduit que  $B(t, T)$  se calcule comme une transformée de Laplace

$$B(t, T) = e^{-m(T-t) + \frac{1}{2}\Sigma^2(T-t)}$$

ce qui conduit à

**Théorème 9.2.2 (Prix des zéro-coupons dans un modèle de Vasicek)** *Dans le modèle de Vasicek, le prix d'un zéro-coupon d'échéance  $T$  est donné par :*

$$B(t, T) = \exp - \left[ R_{\infty}(T-t) - (R_{\infty} - r_t) \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a} + \frac{\sigma^2}{4a^3} (1 - e^{-a(T-t)})^2 \right]$$

où

$$R_{\infty} = b - \frac{\sigma^2}{2a^2}.$$

Une formule d'Itô permet de déduire la dynamique des zéro-coupons et donc leur volatilité.

**Proposition 9.2.3 (Volatilité des zéro-coupons)** *Dans le modèle de Vasicek, on a*

$$\frac{dB(t, T)}{B(t, T)} = r_t dt + \Gamma(t, T) dW_t$$

$$\text{avec } \Gamma(t, T) = \sigma \frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}.$$

Le fait que  $\Gamma(t, T)$  s'annule lorsque  $t \rightarrow T$  traduit qu'à échéance, le prix du zéro-coupon devient déterministe (1 €).

**Preuve :**

Texte supprimé de la version électronique.



Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

### 9.2.5 Courbe des taux

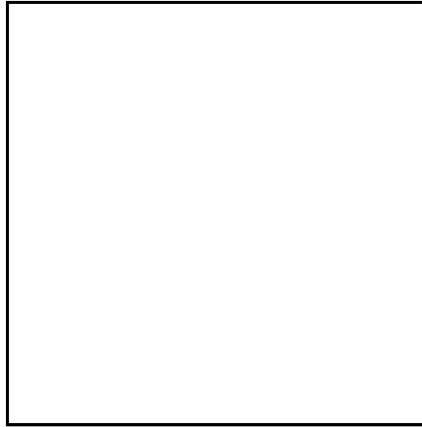


FIGURE 9.1 – Différents types de courbe de taux possibles dans un modèle de Vasicek.

Le zéro-coupon  $B(t, T)$  est relié au taux actuariel  $R(t, T)$  défini par

$$B(t, T) = e^{-(T-t)R(t, T)}.$$

La **courbe des taux** actuariels à la date  $t$  est la fonction

$$\theta \mapsto R(t, \theta) = -\frac{1}{\theta} \ln[B(t, t + \theta)].$$

Par la forme explicite des prix des zéro-coupons, nous déduisons

**Proposition 9.2.4 (Courbe des taux dans un modèle de Vasicek)** *La courbe des taux de la date  $t$  est donnée par :*

$$R(t, \theta) = R_\infty - (R_\infty - r_t) \frac{1 - e^{-a\theta}}{a\theta} + \frac{\sigma^2}{4a^3\theta} (1 - e^{-a\theta})^2$$

avec  $\lim_{\theta \rightarrow \infty} R(t, \theta) = R_\infty$  pour tout  $t$ .

Le graphe 9.1 montre différentes courbes de taux possibles dans un tel modèle. Cela ressemble à bien des configurations de marché, mais ne couvre pas le cas de courbes inversées où un creux apparaît à moyenne maturité : c'est un défaut majeur de ce modèle. Une autre critique du modèle est que la courbe des taux dépend linéairement du taux court, ce qui n'induit au fil du temps que des déplacements parallèles de la courbe des taux. En réalité, il y a aussi des facteurs de pente et courbure. Enfin, le modèle ne prend comme donnée initiale que le taux court aujourd'hui, alors que c'est toute la courbe des taux qui est donnée a priori, pour satisfaire l'absence d'opportunité d'arbitrage. En fait, autoriser le coefficient  $b$  à dépendre du temps permet de répondre de manière satisfaisante aux premières et troisièmes critiques : c'est le modèle de *Hull & White à 1 facteur*. Mais il y a bien d'autres modélisations cohérentes avec l'arbitrage...

### 9.2.6 Modèle de Hull-White à 1 facteur

Nous re-développons brièvement le modèle de Vasicek en autorisant le paramètre  $b$  à dépendre du temps. Il s'agit de spécifier la forme de  $(b(t))_{0 \leq t \leq T}$  pour que la courbe des taux initiale du modèle coïncide avec celle observée sur le marché. Pour bien différencier les valeurs du modèle et celles du marché, nous rajoutons en exposant **Mark.** (pour Market) ou **Mod.** (pour Model) quand nécessaire. Introduisons la famille de taux court forward

$$f^{\text{Mark.}}(t, T) = -\partial_T \ln(B^{\text{Mark.}}(t, T)) \quad \text{ou} \quad B^{\text{Mark.}}(t, T) = \exp\left(-\int_t^T f^{\text{Mark.}}(t, s) ds\right).$$

En particulier, l'observation de la courbe des taux en  $t = 0$  est équivalente à celle de  $(f^{\text{Mark.}}(0, T))_{0 \leq T}$ . Nous définissons alors le modèle de taux court par

$$r_t^{\text{Mod.}} = f^{\text{Mark.}}(0, t) - \sigma e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s + \frac{\sigma^2}{2a^2} (1 - e^{-at})^2. \quad (9.2.5)$$

Reste à justifier que cela conduit bien à des prix de zéro-coupons cohérents avec les prix de marché observés à la date initiale. D'abord, en appliquant la formule d'Itô à  $e^{-at} \int_0^t e^{as} dW_s$ , on obtient la forme différentielle

$$dr_t^{\text{Mod.}} = [\partial_t f^{\text{Mark.}}(0, t) + a f^{\text{Mark.}}(0, t) + \frac{\sigma^2}{2a} (1 - e^{-2at}) - a r_t^{\text{Mod.}}] dt - \sigma dW_t,$$

pourvu que  $t \mapsto f^{\text{Mark.}}(0, t)$  soit dérivable. Cette représentation correspond bien à un modèle de Vasicek généralisé avec coefficients déterministes dépendant du temps. Ensuite, par un calcul de transformée de Laplace de loi gaussienne comme dans le modèle de Vasicek, on obtient une expression explicite de

$$B^{\text{Mod.}}(t, T) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}} \left( \exp\left(-\int_t^T r_s^{\text{Mod.}} ds\right) \middle| \mathcal{F}_t \right).$$

Sans rentrer dans le détail les calculs, cela conduit à l'identité

$$B^{\text{Mod.}}(t, T) = \frac{B^{\text{Mark.}}(0, T)}{B^{\text{Mark.}}(0, t)} \exp\left(-\frac{1 - e^{-a(T-t)}}{a}(r_t^{\text{Mod.}} - f^{\text{Mark.}}(0, t))\right) \\ \times \exp\left(-\frac{\sigma^2}{4a^3}(1 - e^{-2at})(1 - e^{-a(t-t)})^2\right).$$

En prenant  $t = 0$ , et puisque  $r_0^{\text{Mod.}} = f^{\text{Mark.}}(0, 0)$ , on retrouve bien  $B^{\text{Mod.}}(0, T) = B^{\text{Mark.}}(0, T)$  pour toute maturité  $T$ , montrant bien la cohérence du modèle de taux court (9.2.5) avec la courbe des taux du marché. Un calcul d'Itô direct montre que l'équation de la dynamique des zéro-coupons ( $B^{\text{Mod.}}(t, T)_{0 \leq t \leq T}$ ) est identique à celle du modèle de Vasicek (Proposition 9.2.3).

### 9.3 Risque de crédit : modèles structurels

Le risque de crédit peut se définir comme le risque de solvabilité d'un émetteur de dette. Les principales préoccupations sont de mesurer le risque de crédit et de le valoriser à des fins de transfert. Depuis une dizaine d'années, l'activité autour du crédit et des produits dérivés de crédit n'a cessé d'augmenter à une allure exponentielle pour atteindre en 2005 plus de 8000 milliards de dollars d'encours (près de 5 fois le PIB de la France!). La crise des subprimes a été un coup d'arrêt à cette croissance devenue déraisonnable et a révélé de nombreuses faiblesses dans le système de mesure et gestion des risques sous-jacents.

Nous faisons une brève introduction aux modélisations sous-jacentes et renvoyons à [28] pour de nombreuses références et un tour d'horizon sur le sujet. En fait, notre présentation est axée sur les **modèles dits structurels**. Ce sont des modèles de risque de crédit où une entreprise considérée fait défaut (cessation de paiement) lorsque la valeur de ses actifs ne suffit plus à faire face à sa dette. Les modèles de référence sont celui de Merton [22], CreditGrades de JP Morgan ou Moody's KMV. Ces modèles sont aussi appelés modèles de la firme.

Les obligations émises par l'entreprise étant plus risquées que celles émises par l'état, leur rendement est plus élevé. La différence de rendement définit le **spread de crédit**, donnée observable sur le marché que nous cherchons à retrouver à travers un modèle.

#### 9.3.1 Modèle de la firme de Merton

Dans ce modèle simplifié, on suppose que le capital de l'entreprise a été structuré en deux parties<sup>1</sup> :

- une partie action (*equity*);
- une partie dette (*debt*) sous la forme d'un zéro-coupon de nominal  $B$  et d'échéance  $T$ .

On note  $E_t$  la valeur en  $t$  de la partie action et  $D_t$  celle de la dette. On suppose que la valeur totale

$$V_t = E_t + D_t$$

---

1. il n'y a pas de possibilité de convertir la dette en actions (obligations convertibles).

des actifs de l'entreprise suit un modèle log-normal :

$$\frac{dV_t}{V_t} = \mu dt + \sigma dW_t.$$

On suppose que le défaut ne peut intervenir qu'à l'échéance  $T$ , lors du remboursement des obligations à leurs détenteurs. Le défaut a lieu seulement si  $V_T < B$ . Deux cas se produisent :

1. il y a défaut en  $T$  : les actionnaires ne reçoivent rien et les créanciers reçoivent  $V_T$ .
2. il n'y a pas défaut en  $T$  : les détenteurs d'obligations récupèrent le nominal  $B$  et les actionnaires le reliquat  $V_T - B$ .

Du point de vue des créanciers, ils reçoivent à échéance un flux égal à

$$\min(V_T, B) = B - (B - V_T)_+.$$

Pour évaluer la valeur de la dette, nous suivons l'approche de valorisation des options (chapitre 7), en supposant implicitement que la valeur totale des actifs de l'entreprise est un titre négociable sur le marché, ou du moins qu'il est répliquable par des titres négociables. La valorisation de la dette s'effectue par un calcul risque-neutre  $\mathbb{Q}$ . Dans cette perspective, nous supposons que le taux d'intérêt court terme de la banque centrale (non risquée) vaut  $r$ .

**Théorème 9.3.1** *Dans un modèle de la firme de Merton, la valeur de la dette  $D_t$  est la différence d'un zéro-coupon et d'un Put sur  $V$  de prix d'exercice  $B$  :*

$$\begin{aligned} D_t &= \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-r(T-t)} \min(V_T, B) | V_t) \\ &= Be^{-r(T-t)} - \text{Put}(t, S_t, T, B) \\ &= V_t \mathcal{N}(-d_1) + Be^{-r(T-t)} \mathcal{N}(d_0) \end{aligned}$$

avec  $d_1 = \frac{1}{\sigma\sqrt{T-t}} \ln\left(\frac{V_t e^{r(T-t)}}{B}\right) + \frac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}$  et  $d_0 = d_1 - \sigma\sqrt{T-t}$ .

La valeur de la dette peut s'exprimer aussi en fonction du **levier d'endettement** (leverage ratio)  $l_t = \frac{Be^{-r(T-t)}}{V_t}$  :

$$D_t = Be^{-r(T-t)} \left( \frac{\mathcal{N}(-d_1)}{l_t} + \mathcal{N}(d_0) \right).$$

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

Le taux actuariel  $Y(t, T)$  de la dette se définit par  $D_t = B \exp(-Y(t, T)(T - t))$ . Comme  $D_t < B e^{-r(T-t)}$ , on a  $Y(t, T) > r$ . Le spread de crédit  $S(t, T) = Y(t, T) - r$  en mesure la différence.

**Proposition 9.3.2** Dans un modèle de la firme de Merton, le spread implicite<sup>2</sup> de crédit vaut

$$S(t, T) = \frac{1}{T-t} \log\left(\frac{B}{D_t}\right) - r.$$

En particulier, à l'échéance le spread de crédit a deux comportements distincts :

1.  $\lim_{t \rightarrow T} S(t, T) = 0$  si  $V_T > B$  ;
2.  $\lim_{t \rightarrow T} S(t, T) = +\infty$  si  $V_T \leq B$ .

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

---

2. le terme *implicite* fait référence ici au spread obtenu via un modèle et non via des données de marché.

Texte supprimé de la version électronique.

□

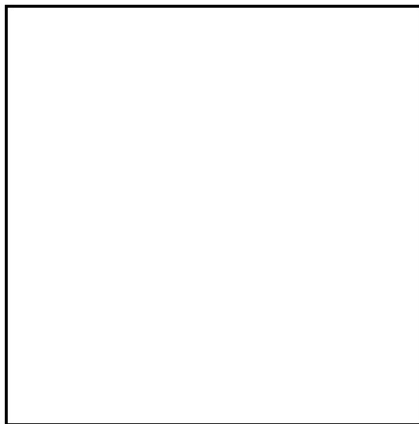


FIGURE 9.2 – Courbe de spread implicite en fonction de la maturité  $T - t$ , pour différentes volatilités. Le spread est croissant avec la volatilité. Paramètres :  $V_0 = 100$ ,  $B = 80$ ,  $r = 2.5\%$ .

On peut aussi déduire la valeur des paramètres usuels en risque de crédit.

**Proposition 9.3.3** *Dans un modèle de la firme de Merton,*

1. la **probabilité de défaut** (probabilité de subir une perte) est

$$p_t = \mathbb{Q}(V_T < B | V_t) = \mathcal{N}(-d_0);$$

2. le **taux de recouvrement** (recovery rate) en cas de défaut est

$$\delta_t = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(V_T \mathbf{1}_{V_T < B} | V_t)}{B \mathbb{Q}(V_T < B | V_t)} = \frac{V_t \mathcal{N}(-d_1)}{B e^{-r(T-t)} \mathcal{N}(-d_0)};$$

3. le **taux de perte en cas de défaut** (Loss Given Default ou LGD) vaut

$$\omega_t = \frac{\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}((B - V_T) \mathbf{1}_{V_T < B} | V_t)}{B \mathbb{Q}(V_T < B | V_t)} = 1 - \delta_t.$$

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

### 9.3.2 Extensions du modèle de la firme

On pourrait aussi considérer que le défaut a lieu *dès que* la valeur des actifs devient inférieure à un certain niveau  $B_t$  défini dans le contrat de la dette (modèle de Black-Cox 1976). Autrement dit, le défaut est le premier temps de passage d'une barrière :

$$\tau = \inf\{t : V_t \leq B_t\}.$$

Le créancier perçoit alors une fraction  $f < 1$  du nominal soit à l'instant de défaut, soit à échéance. Pour le créancier, cela revient à détenir une **option barrière**. En effet, dans le cas de recouvrement à échéance  $T$ , le flux pour le créancier est

$$fB\mathbf{1}_{\tau \leq T} + B\mathbf{1}_{\tau > T}.$$

Le calcul de la valeur de la dette se ramène ainsi à celui du prix des options barrières (voir paragraphe 9.1 et exercice ??).

Ces approches ne sont pas entièrement satisfaisantes car d'une part, il est délicat de déterminer correctement les paramètres définissant la valeur totale des actifs, de prendre

en compte complètement les conditions d'émission de la dette, l'impact de la procédure de liquidation dans le calcul de la perte sachant le défaut... d'autre part, le spread implicite à maturité courte peut s'annuler (voir figure (9.2)), ce qui n'est conforme aux résultats empiriques (qui exhibent plutôt des spreads non nuls, traduisant un défaut possible à horizon très court). En fait, ce dernier point est propre à la modélisation choisie pour les instants de défaut : quand la valeur des actifs s'approche de la barrière, on pressent le défaut. Pour éviter de prévoir le défaut, on peut prendre une barrière aléatoire de loi log-normale. C'est l'approche CreditGrades de JP Morgan.

Une alternative consisterait à ajouter des sauts log-normaux à la dynamique de la valeur totale des actifs  $V$ . On renvoie au modèle à sauts de Merton (voir chapitre 10).

## ◆ ◆ POUR EN SAVOIR PLUS ◆

### 9.4 Options lookback

Ce sont d'autres exemples très standards d'options exotiques. Leur flux à échéance sont fonctions du plus bas ou du plus haut du titre sous-jacent (ou des deux) sur la période de vie du contrat. Pour un Call lookback par exemple, cela permet d'avoir le droit d'acheter le titre au plus bas sur la période ! Le flux terminal est  $S_T - \min_{0 \leq t \leq T} S_t$ . Ce sont des options chères en général. Leur prix peuvent se déduire de celui des options barrières.

Nous appliquons l'étude des prix d'options barrières aux options lookback, de payoff

$$(S_T - Km_T)_+ \text{ avec } m_T = \min_{t \leq T} S_t.$$

Cette section peut être sautée en première lecture. Nous admettons<sup>3</sup> qu'il existe un portefeuille de couverture de ce produit et que le prix du portefeuille de couverture correspondant est l'espérance sous la probabilité risque-neutre du payoff actualisé :

$$\text{MinCall}(0, x, T, K) = \mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-rT}(S_T - Km_T)_+)$$

(la dynamique de  $S$  sous  $\mathbb{Q}$  est donnée par (9.1.2)).

#### **Théorème 9.4.1 (Prix d'une option lookback)**

1. Si  $K \leq 1$ , alors  $\text{MinCall}(0, x, T, K) = (1 - K)xe^{-qT} + K\text{MinCall}(0, x, T, 1)$ .
2. Si  $K \geq 1$ , alors selon le signe de  $\nu = r - q$  on a

$$\begin{aligned} & \text{MinCall}(0, x, T, K) \\ &= x \begin{cases} \text{Call}(0, 1, T, K) + \frac{K\sigma^2}{2\nu} \text{Put}(0, K^{2\nu/\sigma^2}, T, 1; \nu, |2\nu/\sigma|) & \text{si } \nu > 0, \\ \text{Call}(0, 1, T, K) + \frac{K\sigma^2}{2|\nu|} \text{Call}(0, K^{2\nu/\sigma^2}, T, 1; \nu, |2\nu/\sigma|) & \text{si } \nu < 0. \end{cases} \end{aligned}$$

---

3. on peut le montrer comme pour les cas précédents, en passant par un argument d'EDP à réinterpréter comme espérance ensuite.



Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

## 9.5 Call sur zéro-coupon dans un modèle de Vasicek

Nous étendons maintenant les formules de Black-Scholes-Merton au cas où le titre sur lequel on a l'option d'achat d'échéance  $T$ , est un zéro-coupon d'échéance  $T + \theta$ . Le payoff associé est donc  $(B(T, T + \theta) - K)_+$ .

Pour la valorisation, nous suivons la méthodologie par EDP, en incorporant un nouvel ingrédient. Une résolution élégante passe par un changement de référence monétaire (**changement de numéraire**), c'est-à-dire qu'au lieu d'évaluer les portefeuilles en € (de valeur  $V_t$ ), on les évalue en nombre de zéro-coupon d'échéance  $T$  (de valeur  $\frac{V_t}{B(t, T)}$ ).

Réécrivons la contrainte d'autofinancement dans ce cadre, en se restreignant à des stratégies investies uniquement dans les zéro-coupons d'échéance  $T$  et  $T + \theta$ . Les quantités investies correspondantes à la date  $t$  sont  $(\delta^T(t), \delta^{T+\theta}(t))$ . La valeur liquidative du portefeuille est  $V_t = \delta^T(t)B(t, T) + \delta^{T+\theta}(t)B(t, T + \theta) \in \mathbb{E}$ , ou bien dans le nouveau numéraire

$$\frac{V_t}{B(t, T)} = \delta^T(t) + \delta^{T+\theta}(t) \frac{B(t, T + \theta)}{B(t, T)}.$$

La contrainte d'autofinancement conduit à

$$d\left(\frac{V_t}{B(t, T)}\right) = \delta^{T+\theta}(t)d\left(\frac{B(t, T+\theta)}{B(t, T)}\right). \quad (9.5.1)$$

L'objectif de couverture du vendeur du contrat est d'avoir à échéance

$$\frac{V_T}{B(T, T)} = \frac{(B(T, T+\theta) - K)_+}{B(T, T)} = \left(\frac{B(T, T+\theta)}{B(T, T)} - K\right)_+$$

en utilisant que  $B(T, T) = 1$ . On introduit  $X_t$  pour la valeur du zéro-coupon d'échéance  $T + \theta$  dans le nouveau numéraire :

$$X_t = \frac{B(t, T+\theta)}{B(t, T)}.$$

**Proposition 9.5.1 (EDP d'évaluation)** *S'il existe une fonction régulière  $u : (t, x) \in ]0, T[ \times ]0, +\infty[ \mapsto u(t, x)$  solution de l'EDP*

$$\begin{cases} \frac{1}{2}x^2[\Gamma(t, T+\theta) - \Gamma(t, T)]^2 u''_{xx}(t, x) + u'_t(t, x) = 0, \\ u(T, x) = (x - K)_+, \end{cases}$$

alors le flux  $(B(T, T+\theta) - K)_+$  est répliquable par un portefeuille autofinçant dont la valeur à la date  $t$  est  $V_t = u(t, X_t)B(t, T) \in \mathbb{E}$ . La couverture consiste en  $\delta^{T+\theta}(t) = u'_x(t, X_t)$  et  $\delta^T(t) = u(t, X_t) - u'_x(t, X_t)X_t$ .

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

Ce qui est remarquable dans l'approche précédente, c'est qu'avec un bon choix de numéraire, on a pu s'affranchir des problèmes d'actualisation entre  $t$  et  $T$ . Remarquons aussi que les calculs précédents sont également valables pour le modèle Hull-White introduit au paragraphe 9.2.6.

L'EDP précédente est très semblable à l'EDP d'évaluation (7.3.5) du Call sur un titre standard. La différence essentielle est que le paramètre de volatilité  $\Gamma(t, T + \theta) - \Gamma(t, T)$  n'est pas constant mais variable dans le temps (tout en restant déterministe). Toutefois, cela ne change pas la possibilité d'un calcul de la solution sous forme fermée. Il suffit de remplacer dans la formule Black-Scholes le terme  $\sigma$  par  $\Sigma_{t,T} = \sqrt{\frac{1}{T-t} \int_t^T |\Gamma(u, T + \theta) - \Gamma(u, T)|^2 du}$ .

**Théorème 9.5.2 (Prix de Call sur zéro-coupon)** *Le prix d'une option de maturité  $T$ , de prix d'exercice  $K$  sur zéro-coupon de maturité  $T + \theta$  est donné par*

$$\begin{aligned} \text{Call}_{zc}(t, K, T, T + \theta) &= B(t, T + \theta)\mathcal{N}(d_1) - KB(t, T)\mathcal{N}(d_0), \\ d_0 &= \frac{1}{\Sigma_{t,T}\sqrt{T-t}} \text{Log}\left(\frac{B(t, T + \theta)}{KB(t, T)}\right) - \frac{1}{2}\Sigma_{t,T}\sqrt{T-t}, \\ d_1 &= d_0 + \Sigma_{t,T}\sqrt{T-t}, \\ \Sigma_{t,T}^2 &= \frac{1}{T-t} \int_t^T |\Gamma(u, T + \theta) - \Gamma(u, T)|^2 du. \end{aligned}$$

*La couverture consiste à la date  $t$  en l'achat de  $\mathcal{N}(d_1)$  zéro-coupons d'échéance  $T + \theta$  et en la vente de  $K\mathcal{N}(d_0)$  zéro-coupons d'échéance  $T$ .*

## 9.6 Exercices

**Exercice 9.1 Call forward-start.**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**Exercice 9.2** Évaluation et couverture d'options sur moyenne.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**Exercice 9.3** ★ Option asiatique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**Exercice 9.4 Les options barrières : l'EDP et l'interprétation comme espérance.**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**Exercice 9.5**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**Exercice 9.6 ★** Modèle log-normal décalé (*Displaced log-normal diffusion*, d'après M. Rubinstein 1983).

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

## Chapitre 10

# Modèles financiers avec sauts

Nous avons vu au chapitre 8 que, la modélisation des titres par un mouvement brownien géométrique ne permet pas de rendre compte de smile ou skew de volatilité implicite. Une solution partielle consiste à introduire des sauts dans la dynamique de prix. Ce chapitre se concentre sur le cas de modèle mixte brownien-Poisson composé. Nous soulignons les difficultés de réplcation parfaite dans ce cadre avec sauts. Les outils de calcul stochastique associé, de connexion avec les EDP intégro-différentielles et de changement de probabilité sont tirés des chapitres 4 et 5.

### 10.1 Modèle mixte brownien-Poisson géométrique

Nous rappelons la définition d'un processus mixte brownien-Poisson géométrique de caractéristiques  $(\mu, \sigma, \lambda, \nu)$ . Il s'écrit sous la forme

$$S_t = S_0 \exp \left( \left( \mu - \frac{1}{2} \sigma^2 \right) t + \sigma W_t \right) \prod_{i=1}^{N_t} (1 + Y_i) \quad (10.1.1)$$

où

1.  $(W_t)_t$  est un mouvement brownien standard ;
2.  $(\sum_{i=1}^{N_t} \ln(1 + Y_i))_t$  est un processus de Poisson composé avec intensité de saut  $\lambda$  et loi commune  $\nu$  pour les sauts  $(Y_i)_i$ , avec  $Y_i > -1$  p.s. ;
3. les deux processus étant indépendants.

Entre deux instants de sauts, le modèle évolue comme un mouvement brownien géométrique. Puis, à des intervalles de temps de loi exponentielle  $\mathcal{E}(\lambda)$  des sauts se produisent, induisant une variation de  $S$  de  $Y\%$ .

Les propriétés de ses moments sont résumées ainsi (voir chapitre 4).

**Proposition 10.1.1** *Supposons que  $Y$  ait les deux premiers moments finis. Dans un tel modèle, les moyenne et variance de  $S_t$  sont données par*

$$\begin{aligned}\mathbb{E}(S_t) &= S_0 e^{t(\mu + \lambda \mathbb{E}(Y))}, \\ \text{Var}(S_t) &= [\mathbb{E}(S_t)]^2 (e^{t(\sigma^2 + \lambda \mathbb{E}(Y^2))} - 1).\end{aligned}$$

*De plus,  $(e^{-rt} S_t)_t$  est une martingale (dans sa filtration naturelle) si et seulement si  $\mu + \lambda \mathbb{E}(Y) = r$ .*

La propriété de martingales est importante car on a déjà vu que la valorisation de produits financiers se fait à l'aide de nouvelle probabilité sous laquelle le titre actualisé est martingale (quand il n'y a pas de dividende).

### 10.1.1 Modèle de Merton [23]

C'est un modèle standard où les sauts  $(1 + Y_i)_i$  sont des variables log-normales de paramètres  $(\ln(1 + m), \alpha^2)$  ( $m > -1$ ) :  $\ln(1 + Y_i) \stackrel{\text{loi}}{=} \mathcal{N}(\ln(1 + m) - \alpha^2/2, \alpha^2)$ . Ainsi, le paramètre  $m$  s'interprète comme la moyenne des sauts  $Y$  :  $m = \mathbb{E}(Y)$ .

**Proposition 10.1.2** *Dans un modèle de Merton,*

*- conditionnellement à un nombre  $k$  de sauts,  $S_t$  a la loi log-normale avec paramètres :*

$$\text{Loi}(\ln(S_t/S_0) | N_t = k) \stackrel{\text{loi}}{=} \mathcal{N}\left(\left(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2\right)t + (\ln(1 + m) - \alpha^2/2)k, \sigma^2 t + \alpha^2 k\right). \quad (10.1.2)$$

*-  $(e^{-rt} S_t)_t$  est martingale si et seulement si  $\mu + \lambda m = r$ .*

**Preuve :**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.



□

Le cas de sauts constants (et égaux à  $m$ ) est atteint en prenant  $\alpha = 0$

### 10.1.2 Modèle de Kou et Wang [18]

Dans ce modèle, les sauts  $(\ln(1 + Y_i))_i$  ont une loi double exponentielle

$$\nu(dy) = p\eta_1 e^{-\eta_1 y} \mathbf{1}_{y>0} dy + q\eta_2 e^{\eta_2 y} \mathbf{1}_{y<0} dy \quad (10.1.3)$$

avec  $p \geq 0, q \geq 0, p + q = 1, \eta_1 > 1, \eta_2 > 0$ .

**Proposition 10.1.3** *Dans un modèle de Kou-Wang,  $(e^{-rt} S_t)_t$  est martingale si et seulement si  $\mu + \lambda(\frac{p}{\eta_1 - 1} - \frac{q}{\eta_2 + 1}) = r$ .*

Preuve:

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

Ce modèle a été développé plus récemment que le modèle de Merton : il a l'avantage de

conduire à des procédures numériques simplifiées de valorisation, notamment pour les options barrières, et ce, grâce aux bonnes propriétés des lois exponentielles (voir exercice 10.6).

## 10.2 Couverture d'option

### 10.2.1 Les sauts comme nouvelles sources de risque

La méthodologie de couverture par un portefeuille dynamique autofinçant reste valable, indépendamment de la présence ou non de sauts dans les cours des titres. Par contre, alors que dans le chapitre 7 avec un portefeuille investi dans le titre risqué (et le cash), il avait été possible de suivre les fluctuations browniennes du marché de sorte à annuler parfaitement l'erreur de couverture, ce n'est pas plus possible lorsqu'il y a des sauts. Voyons cela en cherchant un portefeuille de couverture d'une option de payoff  $h(S_T)$ , dont la valeur liquidative à la date  $t$  serait de la forme  $V_t = v(t, S_t)$ . L'équation d'autofinancement est à comparer avec la formule d'Itô :

$$\begin{aligned} dV_t &= rV_t dt + \delta(t)S_{t-}((\mu - r)dt + \sigma dW_t + Y_t dN_t), \\ dv(t, S_t) &= \mathcal{A}v(t, S_{t-})dt + \sigma S_{t-}v'_x(t, S_{t-})dW_t + (v(t, S_{t-}(1 + Y_t)) - v(t, S_{t-}))dN_t \end{aligned}$$

en notant

$$\mathcal{A}\phi(t, x) = \partial_t \phi(t, x) + \mu x \partial_x \phi(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 \partial_{xx}^2 \phi(t, x). \quad (10.2.1)$$

Si l'on essaye d'égaliser les parties browniennes d'un côté, et les parties sauts de l'autre, on obtient

$$\begin{aligned} \sigma S_{t-} \delta(t) &= \sigma S_{t-} v'_x(t, S_{t-}), \\ \delta(t) S_{t-} Y_t &= v(t, S_{t-}(1 + Y_t)) - v(t, S_{t-}), \end{aligned}$$

et ce, pour tout scénario de cours  $S_{t-}$  et de saut  $Y_t$ . Les seules solutions  $v(t, S)$  vraisemblables sont les fonctions affines en  $S$ , qui évidemment ne permettent pas d'obtenir à échéance n'importe quelle fonction flux, comme  $h(S)$  par exemple.

Ce petit calcul informel montre que chaque saut possible est un risque à part entière qui nécessiterait une couverture spécifique.

### 10.2.2 Couverture parfaite dans le cas d'un nombre fini de sauts possibles

Supposons ici que les sauts  $Y_i$  ne prennent qu'un nombre  $M$  fini de valeurs possibles  $y_1, \dots, y_M : \nu(\{y_1, \dots, y_M\}) = 1$ . Pour couvrir ces  $M$  sources de risque supplémentaires, l'idée est d'avoir recours à  $M$  autres instruments négociables  $(\Phi_t^i)_{1 \leq i \leq M}$ . Ce sont par exemple des options (Call et Put) écrites sur le titre  $S$ . Supposons que leur prix est une fonction régulière de  $(t, S_t)$  :

$$\Phi_t^i = \phi^i(t, S_t).$$

Leur dynamique est

$$d\Phi_t^i = \mathcal{A}\phi^i(t, S_{t-})dt + \partial_x \phi^i(t, S_{t-})\sigma S_{t-}dW_t + [\phi^i(t, S_{t-} + Y_t) - \phi^i(t, S_{t-})]dN_t.$$

Considérons un portefeuille autofinçant de valeur  $V_t$  investi en nombre  $\delta(t) = \begin{pmatrix} \delta^1(t) \\ \vdots \\ \delta^{M+1}(t) \end{pmatrix}$  de titres  $\begin{pmatrix} \Phi_t^1 \\ \vdots \\ \Phi_t^{M+1} \end{pmatrix}$  (et le reste en cash). Par convention, le titre  $M + 1$  est simplement le titre risqué initial :  $\Phi_t^{M+1} = S_t$  ( $\phi(t, x) = x$ ). La dynamique du portefeuille<sup>1</sup> est

$$\begin{aligned} V_t &= rV_t dt + \sum_{i=1}^{M+1} \delta^i(t)(d\Phi_t^i - r\Phi_t^i dt) \\ &= rV_t dt + \delta(t) \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{A}\phi^1(t, S_t) - r\Phi_t^1 \\ \vdots \\ \mathcal{A}\phi^{M+1}(t, S_t) - r\Phi_t^{M+1} \end{pmatrix} dt + \delta(t) \cdot \begin{pmatrix} \partial_x \phi^1(t, S_{t-}) \\ \vdots \\ \partial_x \phi^{M+1}(t, S_{t-}) \end{pmatrix} \sigma S_{t-} dW_t \\ &\quad + \delta(t) \cdot \begin{pmatrix} \phi^1(t, S_{t-}(1 + Y_t)) - \phi^1(t, S_{t-}) \\ \vdots \\ \phi^{M+1}(t, S_{t-}(1 + Y_t)) - \phi^{M+1}(t, S_{t-}) \end{pmatrix} dN_t. \end{aligned}$$

**Point de vue EDP de valorisation.** Cherchons un portefeuille dont la valeur serait une fonction  $v$  de  $(t, S_t)$ , soit

$$dv(t, S_t) = \mathcal{A}v(t, S_{t-})dt + v'_x(t, S_{t-})\sigma S_{t-}dW_t + (v(t, S_{t-}(1 + Y_t)) - v(t, S_{t-}))dN_t.$$

Pour que les termes browniens et sauts soient les mêmes pour tout  $S_{t-}$  et  $Y_t \in \{y_1, \dots, y_M\}$ , il suffit de prendre  $\delta(t) = \delta(t, S_{t-})$  avec la fonction (vectorielle) de couverture  $\delta(t, x)$  définie par

$$\begin{aligned} &\begin{pmatrix} \partial_x \phi^1(t, x) & \cdots & \partial_x \phi^{M+1}(t, x) \\ \phi^1(t, x(1 + y_1)) - \phi^1(x) & \cdots & \phi^{M+1}(t, x(1 + y_1)) - \phi^{M+1}(x) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \phi^1(t, x(1 + y_M)) - \phi^1(x) & \cdots & \phi^{M+1}(t, x(1 + y_M)) - \phi^{M+1}(x) \end{pmatrix} \delta(t, x) \\ &= \begin{pmatrix} v'_x(t, x) \\ v(t, x(1 + y_1)) - v(t, x) \\ \vdots \\ v(t, x(1 + y_M)) - v(t, x) \end{pmatrix}. \end{aligned}$$

1. il s'agit ici simplement de l'extension de (7.3.3) pour 1 titre risqué au cas de  $M + 1$  titres risqués.

Pour peu que la matrice de gauche soit inversible (ce qui signifie d'une certaine manière que les titres  $(\Phi_t^i)_{1 \leq i \leq M+1}$  ne sont pas redondants entre eux), on obtient

$$\begin{aligned} \delta(t, x) &= \alpha(t, x)v'_x(t, x) + \sum_{i=1}^M \alpha^i(t, x)(v(t, x(1+y_i)) - v(t, x)) \\ &= \alpha(t, x)v'_x(t, x) + \int_{\mathbb{R}} \beta(t, x, y)(v(t, x(1+y)) - v(t, x))\nu(dy) \end{aligned}$$

pour certaines pondérations vectorielles  $\alpha, \alpha^i, \beta$  provenant de la résolution du système. Les valeurs exactes nous importent peu ici mais plutôt la forme. L'égalisation des termes en  $dt$  de

$$dv(t, S_t) \text{ et } dV_t \text{ conduit enfin à } \mathcal{A}v(t, x) = rv(t, x) + \delta(t, x) \cdot \begin{pmatrix} \mathcal{A}\phi^1(t, x) - r\phi^1(t, x) \\ \vdots \\ \mathcal{A}\phi^{M+1}(t, x) - r\phi^{M+1}(t, x) \end{pmatrix},$$

ce qui équivaut à

$$\begin{aligned} v'_t(t, x) + (\mu x - \bar{\alpha}(t, x))v'_x(t, x) + \frac{1}{2}\sigma^2 v''_{xx}(t, x) \\ = rv(t, x) + \int_{\mathbb{R}} \bar{\beta}(t, x, y)(v(t, x(1+y)) - v(t, x))\nu(dy) \end{aligned}$$

pour certaines fonctions  $\bar{\alpha}$  et  $\bar{\beta}$ . Si on ajoute une condition terminale  $v(t, x) = h(x)$ , on obtient une EDP intégro-différentielle bien posée : la fonction  $v$  solution fournit alors une stratégie de couverture optimale (il suffit de remonter les calculs).

*Conclusion.* La construction d'une stratégie de couverture parfaite a été possible car nous avons cherché une couverture du risque avec autant d'instruments négociables (ici  $M+1$ ) que de sources de risque (à savoir un brownien et  $M$  différentes valeurs possibles de saut). **Si en revanche il y a une infinité de sauts possibles** (modèle de Merton ou Kou-Wang), **alors le vendeur du contrat ne peut pas couvrir parfaitement sa position.** On parlera de **marché incomplet**<sup>2</sup>.

**Point de vue valorisation risque-neutre.** Si on admet que le corollaire (4.3.6) reste valable pour des coefficients  $\mu, \lambda, \nu$  dépendant de  $(t, x)$ , on voit que l'EDP intégro-différentielle ci-dessus s'interprète comme l'espérance de  $e^{-rT}h(S_T)$  pour un certain processus  $S$  mélangeant une partie brownienne et une partie sauts. Avec les outils vus jusqu'à maintenant, il n'est pas possible de définir correctement le processus en question : il aurait une tendance locale et une mesure de sauts locale (i.e. dépendant de la valeur courante de  $S$ ). Ce calcul s'interprète aussi comme un changement de probabilité et on pourrait vérifier que la probabilité de valorisation est risque-neutre (les titres actualisés  $(e^{-rt}\Phi_t^i)_{1 \leq i \leq M+1}$  sont martingales). Tout ceci va au delà de cet ouvrage. Nous renvoyons à [17] pour de plus amples détails.

2. tout contrat financier raisonnable n'est pas répliquable parfaitement.

### 10.2.3 Couverture imparfaite en moyenne quadratique

Une alternative à la couverture parfaite (générant une tracking error nulle) consiste à minimiser (dans un certain sens) l'erreur de réplication. On propose de regarder ici le cas d'un Call avec un critère quadratique pour la minimisation :

$$\mathbb{E}(V_T - (S_T - K)_+)^2.$$

Pour que les calculs soient plus simples, on suppose que la probabilité historique est risque-neutre (ce qui n'a pas raison d'être vraie en pratique), c'est-à-dire que  $\mu - r + \lambda \mathbb{E}(Y) = 0$  (voir proposition 10.1.1). Nous suivons la présentation de [19].

On commence par introduire une certaine EDP intégro-différentielle de valorisation.

**Proposition 10.2.1** *Soit  $v$  la fonction définie pour  $t \leq T$  et  $x > 0$  par  $v(t, x) = \mathbb{E}(e^{-r(T-t)}(S_T - K)_+ | S_t = x)$ . Alors  $v$  est de classe  $C^\infty([0, T[ \times ]0, \infty[)$  et est solution de l'EDP*

$$\begin{cases} v'_t(t, x) + \mu x v'_x(t, x) + \frac{1}{2} \sigma^2 x^2 v''_{xx}(t, x) - r v(t, x) \\ \quad + \lambda \int_{\mathbb{R}} (v(t, x(1+y)) - v(t, x)) \nu(dy) = 0 & \text{pour } (t, x) \in ]0, T[ \times ]0, \infty[, \\ v(T, x) = (x - K)_+ & \text{pour } x \in ]0, \infty[. \end{cases}$$

De plus,  $v$  est croissante convexe en  $x$  et  $v'_x$  est bornée par 1.

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

**Théorème 10.2.2** *Considérons un portefeuille autofinçant de valeur initiale  $V_0$ , investi seulement dans le cash et le titre  $S$ , la stratégie  $(\delta(t))_t$  étant  $\mathcal{F}_t$ -adaptée continue à gauche et bornée. Alors l'erreur quadratique de couverture du Call de caractéristiques  $(T, K)$  par ce portefeuille vaut*

$$\begin{aligned} & \mathbb{E}[e^{-rT}V_T - e^{-rT}(S_T - K)_+]^2 \\ &= [V_0 - v(0, S_0)]^2 + \mathbb{E}\left(\int_0^T e^{-2rs} S_{s-}^2 \sigma^2 [v'_x(s, S_{s-}) - \delta(s)]^2 ds \right. \\ & \quad \left. + \int_0^T \lambda \int_{\mathbb{R}} e^{-2rs} [v(s, S_{s-}(1+y)) - v(s, S_{s-}) - \delta(s)yS_{s-}]^2 \nu(dy) ds\right). \end{aligned}$$

Preuve:

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

**Corollaire 10.2.3 (Couverture en moyenne quadratique)** *Le portefeuille optimal de*

couverture d'un Call en moyenne quadratique a pour valeur initiale  $V_0 = v(0, S_0)$  et stratégie

$$\delta(t) = \frac{1}{\sigma^2 + \lambda \int_{\mathbb{R}} y^2 \nu(dy)} \left( \sigma^2 v'_x(t, S_{t-}) + \lambda \int_{\mathbb{R}} y \frac{v(t, S_{t-}(1+y)) - v(t, S_{t-})}{S_{t-}} \nu(dy) \right).$$

Preuve:

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

Nous remarquons que s'il n'y a pas de sauts ( $\lambda = 0$ ), nous retrouvons bien la couverture en  $\Delta$  usuelle. Par contre, la présence de sauts modifie la couverture. Par exemple si les sauts sont tous positifs ( $Y \geq 0$  p.s.), on peut s'attendre à couvrir avec plus de titres qu'en  $\Delta$  standard. C'est effectivement le cas, car  $v(t, x)$  étant convexe en  $x$ , on a

$$\int_{\mathbb{R}} y \frac{v(t, S_{t-}(1+y)) - v(t, S_{t-})}{S_{t-}} \nu(dy) \geq v'_x(t, S_{t-}) \int_{\mathbb{R}} y^2 \nu(dy),$$

et donc  $\delta(t) \geq v'_x(t, S_{t-})$ .

### 10.3 Formule de Merton pour les Calls

Dans le cas de sauts log-normaux (modèle de Merton [23]), il est possible de donner des formules quasi-explicites aux prix de Call. Nous admettons pour cela (voir la discussion du paragraphe précédent) que le prix est donné par l'espérance du payoff  $(S_T - K)_+$  actualisé,

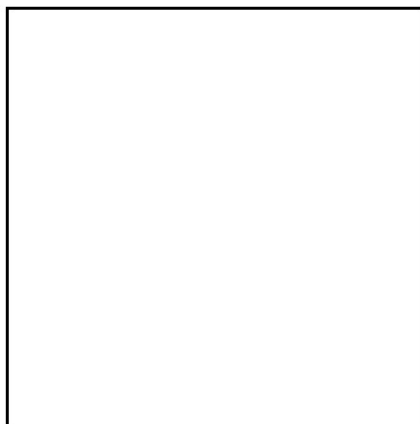


FIGURE 10.1 – Une surface de volatilité implicite dans le modèle de Merton, montrant un smile.

calculée sous une probabilité neutre au risque  $\mathbb{Q}$  rendant le titre actualisé martingale. On supposera que sous  $\mathbb{Q}$ , le titre suit encore un modèle de Merton : en particulier (en supposant qu'il n'y a pas de dividende) on a

$$\mu + \lambda m = r$$

(voir Proposition 10.1.2).

**Théorème 10.3.1 (Formule de Merton pour les Calls)** *Dans un modèle de Merton risque-neutre sans dividende, le prix d'un Call à la date 0 est*

$$\mathbb{E}_{\mathbb{Q}}(e^{-rT}(S_T - K)_+) = \sum_{k \geq 0} e^{-\lambda T} \frac{[\lambda T]^k}{k!} \text{Call}(0, S_0(1+m)^k e^{-m\lambda T}, T, K; \sigma_{BS}^2 = \sigma^2 + \frac{\alpha^2 k}{T})$$

où Call est la formule de Black-Scholes avec volatilité  $\sqrt{\sigma^2 + \alpha^2 k/T}$ .

Preuve :

Texte supprimé de la version électronique.



Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

□

Sur la figure (10.1), nous représentons la volatilité implicite dans un tel modèle. On observe que la présence de sauts dans la dynamique permet de reproduire un smile, comme on peut en observer dans le marché.

## 10.4 Exercices

### Exercice 10.1

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

### Exercice 10.2

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

### Exercice 10.3

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

### Exercice 10.4

LES OUTILS STOCHASTIQUES DES MARCHÉS FINANCIERS

**Exercice 10.5 ★ Quelques formules dans un modèle de Merton.**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**Exercice 10.6 ★ Suite de l'exercice 7.7.**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**Exercice 10.7 ★ Stratégie du coussin.**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

## Quelques mots de conclusion

Cette visite guidée se termine et nous espérons que le lecteur aura apprécié ce tour d'horizon introductif. Bien sûr, beaucoup reste à être dit sur le calcul stochastique, dans sa version traditionnelle (nous renvoyons par exemple au livre de Revuz et Yor [27]), et sur ses applications à la valorisation et couverture d'options. Ce domaine est très actif au niveau de la recherche académique.

Mais cela ne concerne pas uniquement, comme nous l'avons traité dans cet ouvrage, l'évaluation et la gestion de produits dérivés. Ce qui est important (et impulsé sous les recommandations du Comité de Bâle), c'est une vision globale des risques au niveau bancaire, c'est-à-dire l'agrégation des risques au niveau le plus haut. Ainsi, le trader va gérer le risque du produit dérivé échangé, puis le risque et la couverture vont être agrégés au niveau de son portefeuille, puis au niveau de la salle de marché où il travaille, puis enfin au niveau de la banque. Cette vision globale a été adoptée dès 1998, avec la *Value At Risk* ( $V@R$ ), indicateur de risque mesurant le seuil de pertes potentielles à un horizon donné et pour un quantile donné. Cet indicateur réglementaire est relié au montant de fonds propres à immobiliser en regard des risques pris, pour faire face à des pertes a priori rares. Il est crucial alors de bien appréhender et modéliser les dépendances complexes entre les différentes activités.

La crise a montré l'existence de nouveaux risques, laissés longtemps de côté. Comme expliqué au chapitre 6, le risque de liquidité doit être intégré dans la modélisation de la gestion des risques. Quand les praticiens et les marchés s'organisent autour d'une même vision des risques à travers un même modèle (copule gaussienne pour le risque de crédit par exemple), il devient aussi crucial d'analyser le risque de modèle. Le nombre limité de banques de financement et d'investissement, chacune ayant les autres comme contrepartie, induit un risque systémique (effet domino de contagion). La modélisation et l'analyse de tous ces risques sont de vrais défis à relever, pour mieux guider les prochaines évolutions réglementaires et permettre de nouveau aux marchés financiers de faire jouer à plein leur rôle de financement du monde économique.

ECOLE POLYTECHNIQUE

ECOLE POLYTECHNIQUE

ECOLE POLYTECHNIQUE

## Annexe A

# Appendices

### A.1 A propos des gaussiennes

Nous commençons par rappeler quelques propriétés élémentaires des v.a. gaussiennes.

#### A.1.1 Variables gaussiennes

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

### A.1.2 Vecteurs gaussiens

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

### A.1.3 Processus gaussien

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.



## A.2 Quelques rappels de théorie de l'intégration

Nous donnons dans cet appendice quelques rappels sur la théorie de l'intégration abstraite et les tribus. Fondamentalement, l'introduction des espaces probabilisés donne un cadre et un formalisme rigoureux, pour rendre compte de certains phénomènes complexes. Bien que d'un accès assez rébarbatif, les rappels qui suivent se proposent d'énoncer les propriétés fondamentales dans une forme qui permet leur application directe dans le cadre de cet ouvrage.

### A.2.1 Tribus et variables aléatoires

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

### A.2.2 Mesures et distributions de probabilité

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

### **A.2.3 Indépendance et conditionnement**

#### **INDÉPENDANCE**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

#### **ESPÉRANCE CONDITIONNELLE**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

#### A.2.4 Fonctions aléatoires et loi temporelle

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

### A.3 Formule de Lévy-Khintchine

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

### A.4 Simulation

Ce paragraphe est destiné à donner quelques notions sur la simulation de processus en lien avec les applications en finance. L'évaluation et la couverture des produits financiers peuvent se ramener à évaluer des espérances ou leurs dérivées : rapidement, l'utilisateur se retrouve en dehors du cadre des formules exactes et doit avoir recours aux méthodes numériques. Les méthodes de Monte-Carlo, qui s'offrent à lui, présentent l'avantage d'être flexibles et faciles d'implémentation. En contrepartie, elles sont connues pour converger lentement. Dans ce chapitre, nous faisons le point sur quelques méthodes de simulation et d'accélération de convergence. Un panorama plus complet est donné dans [11].

#### A.4.1 Simulation de variables aléatoires

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

### MÉTHODE D'INVERSION

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

### MÉTHODE DE REJET

Texte supprimé de la version électronique.

LES OUTILS STOCHASTIQUES DES MARCHÉS FINANCIERS

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

### SIMULATION D'UNE V.A. GAUSSIENNE

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

#### A.4.2 Calcul d'espérance par méthode de Monte Carlo

Nous cherchons à évaluer  $\mathbb{E}(X)$ , où  $X$  est une v.a. réelle satisfaisant pour simplifier  $\text{Var}(X) < +\infty$ .

**LE PRINCIPE**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

**LA MÉTHODE DES VARIABLES DE CONTRÔLE**

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

LES OUTILS STOCHASTIQUES DES MARCHÉS FINANCIERS

## LA MÉTHODE DE L'ÉCHANTILLONNAGE PRÉFÉRENTIEL

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.



## Annexe B

# Correction des exercices

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

Texte supprimé de la version électronique.

# Bibliographie

- [1] L. Bachelier. *Théorie de la spéculation*. PhD thesis, Ann. Sci. École Norm. Sup., 1900.
- [2] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *J. Polit. Econ.*, 81 :637–654, 1973.
- [3] L. Breiman. *Probability*. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, PA, 1992. Corrected reprint of the 1968 original.
- [4] P. Carr, K. Ellis, and V. Gupta. Static hedging of path dependent options. *Journal of Finance*, 53 :1165–1190, 1998.
- [5] P. Chabardes and F. Delcaux. *Les produits dérivés*. Gualino éditeur, 1996.
- [6] L. Devroye. *Nonuniform random variate generation*. Springer-Verlag, New York, 1986.
- [7] R. Durrett. *Brownian motion and martingales in analysis*. Wadsworth Mathematics Series. Wadsworth International Group, Belmont, CA, 1984.
- [8] N. El Karoui and M. Jeanblanc. Options exotiques. *Finance*, pages 49–67, Sept. 1999.
- [9] P. Eto and E. Gobet. Stochastic expansion for the pricing of Call options with discrete dividends. *Preprint*, 2010.
- [10] H. Föllmer. Calcul d'Itô sans probabilités. In *Seminar on Probability, XV (Univ. Strasbourg, Strasbourg, 1979/1980) (French)*, pages 143–150. Springer, Berlin, 1981.
- [11] P. Glasserman. *Monte Carlo Methods in Financial Engineering*. Springer, 2003.
- [12] J. Harrison and S. Pliska. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Process. Appl.*, 11(3) :215–260, 1981.
- [13] J. Harrison and S. Pliska. A stochastic calculus model of continuous trading : complete markets. *Stochastic Process. Appl.*, 15(3) :313–316, 1983.
- [14] D. Heath, R. Jarrow, and A. Morton. Bond pricing and the term structure of interest rates : a new methodology for contingent claims valuation. *Econometrica*, 60, 1992.
- [15] J. Hull. *Options, futures et autres actifs dérivés, traduit par P. Roger*. Pearson Education France, 5ème édition, 2004.
- [16] K. Itô. On stochastic differential equations. *Mem. Amer. Math. Soc.*, 1951(4), 1951.
- [17] M. Jeanblanc and M. Pontier. Optimal portfolio for small investor in a market model with discontinuous prices. *Applied Mathematics and Optimization*, 22(287–310), 1990.

- [18] S. Kou and H. Wang. Option pricing under a double exponential jump diffusion model. *Management Science*, 50(9) :1178–1192, 2004.
- [19] D. Lamberton and B. Lapeyre. *Introduction au calcul stochastique en Finance*. Collection Mathématiques et Applications 9 - Ellipses, 1991.
- [20] P. Lévy. Sur certains processus stochastiques homogènes. *Compositio Math.*, 7 :283–339, 1939.
- [21] R. Merton. Theory of rational option pricing. *Bell J. Econom. and Management Sci.*, 4 :141–183, 1973.
- [22] R. Merton. On the pricing of corporate debt : the risk structure of interest rates. *Journal of Finance*, 29 :449–470, 1974.
- [23] R. Merton. Option pricing when underlying stock returns are discontinuous. *Journal of Financial Economics*, 3 :125–144, 1976.
- [24] E. Nelson. *Dynamical theories of Brownian motion*. Princeton University Press, Princeton, N.J., 1967.
- [25] Y. Perez. An invitation to sample paths of Brownian motion. Lectures notes edited by V. Balint and M. Elchanan, Stanford, 2000.
- [26] W. Press, S. Teukolsky, W. Vetterling, and B. Flannery. *Numerical recipes in C*. Cambridge University Press, Cambridge, second edition, 1992. The art of scientific computing.
- [27] D. Revuz and M. Yor. *Continuous martingales and Brownian motion*. 3rd ed. Grundlehren der Mathematischen Wissenschaften. 293. Berlin : Springer, 2005.
- [28] T. Roncalli. *Gestion des risques financiers*. Econometrica, 2004.
- [29] M. Rubinstein and E. Reiner. Breaking down the barriers. *Risk*, 4(8) :28–35, 1991.
- [30] P. Samuelson. Proof that properly anticipated prices fluctuate randomly. *Industrial Management Review*, 6 :42–49, 1965.
- [31] Y. Simon. *Les marchés dérivés*. Economica, 1997.
- [32] O. Vasicek. An equilibrium characterisation of the term of structure. *Journal of Financial Economics*, 5 :177–188, 1977.
- [33] P. Wilmott. *Derivatives, the theory and practice of financial engineering*. John Wiley&Sons, 1998.