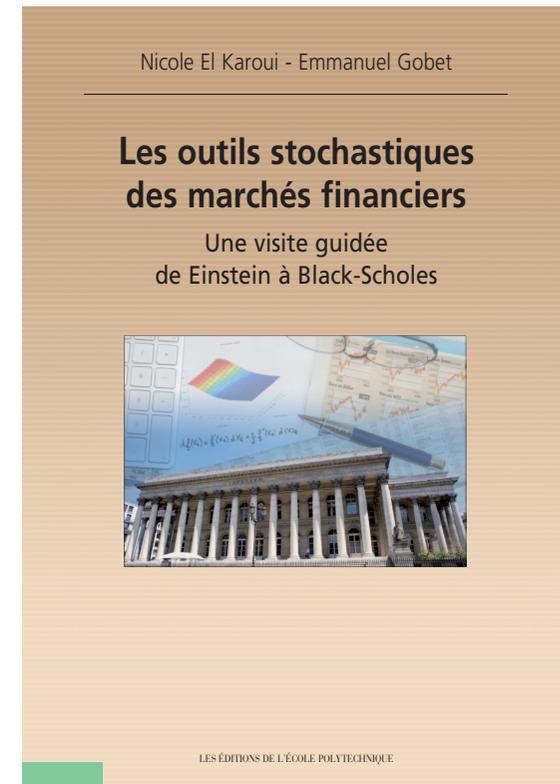
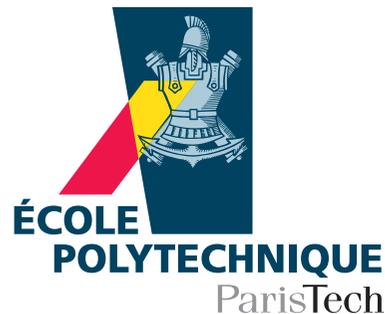


# Mathématiques appliquées et finance

[emmanuel.gobet@polytechnique.edu](mailto:emmanuel.gobet@polytechnique.edu)

Centre de Mathématiques Appliquées  
Ecole Polytechnique and CNRS



Creative Commons Attribution-NonCommercial-NoDerivs 3.0 Unported License

## PLAN

1. Un peu d'histoire des produits dérivés en finance
2. Modélisation et résolution mathématique du problème de couverture des risques, le paradigme de Black-Scholes-Merton
3. Retour sur les hypothèses... les dérives de la finance :
  - crise des subprimes
  - trading haute fréquence
4. Comprendre et gérer les risques
5. Rôle des mathématiques

## 1) UN PEU D'HISTOIRE DES PRODUITS DÉRIVÉS (CONTRATS FINANCIERS)

- Au **XIV<sup>e</sup> siècle av. JC** (sous le pharaon Akhénaton) : **achat et vente à terme de blés**.
- Au **VII<sup>e</sup> siècle av. JC** : Thalès de Millet **premier "grand spéculateur"** en anticipant sur les récoltes abondantes d'olive.
- Les **Romains** finançaient les grands travaux par la **vente d'obligations** (*dette souveraine*).
- Au **XVII<sup>e</sup> siècle** en Hollande : commerce actif de bulbes de tulipe. **Contrats garantissant le prix de vente des tulipes** au printemps suivant.
- Au **XVII<sup>e</sup> siècle**, **marchés à terme** sur le riz au Japon, ou sur le blé et le bétail aux USA dès le **XIX<sup>e</sup> siècle**.
- Jusque dans la fin des années 60, essentiellement **produits dérivés sur matières premières et agricoles**.

## Bouleversement des années 70

**1971. Abandon du système Bretton Woods** (parité or et \$ US, stabilité des changes).

↪ Déséquilibres macro-économiques

↪ Grandes variations des taux d'intérêt et taux de change

**Déréglementation des marchés financiers**, volonté de mondialisation, chocs pétroliers...

↪ Risques accrues des entreprises.

**1973. Création des marchés d'options** à Chicago en 1973, contrats à terme sur taux d'intérêt en 1977, LIFFE (Londres) en 1982, MATIF (Paris) en 1986...

**Définition.** Un *produit dérivé* est un *produit financier*, défini à partir d'un autre produit financier plus simple appelé *sous-jacent* (une action, un indice, une devise, une matière première ou un taux d'intérêt ...).

**Exemples dans notre quotidien :** prêt à taux fixe ou variable, placements proposés par les banques de détail, Plan d'Épargne Logement...

 Depuis 15 ans, les sous-jacents ont été choisis comme des indices météo, des défaillances d'entreprise, diverses créances (prêts, cartes bancaires ...)

Deux grandes catégories de produit dérivé :

– **contrat à terme** : acheteur et vendeur s'entendent pour échanger à une date fixée un sous-jacent à un prix fixé. Exemples : *forwards, futures, swaps*.

**Risques symétriques.**

– **contrat optionnel** ou **option** : assurance contre les mouvements défavorables du prix du sous-jacent. **Risques dissymétriques.**

Quelle utilisation, quelle utilité ?

- couverture du risque, transfert de risques, économie de fonds de propre, spécialisation.
- spéculation, fort effet de levier (utilisés par les sociétés de gestion).

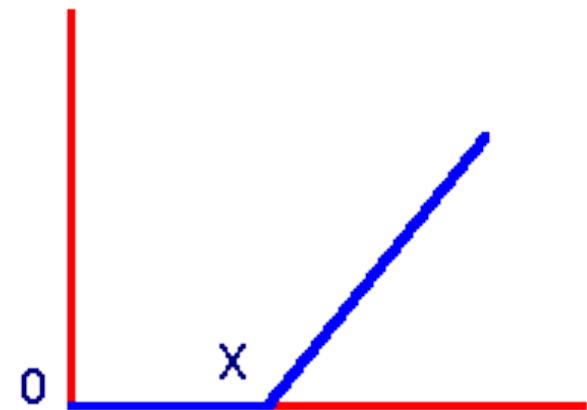
**Exemple : option d'achat (Call).** Air France-KLM a des recettes en € et des dépenses en \$, et un bilan en € .

❓ Comment **se protéger contre** l'appréciation du Dollar par rapport à l'Euro au 31 décembre 2011 ?

⇒ La banque lui vend une **assurance = option d'acheter le \$ à  $K = 0.7$  € , à exercer à  $T=31/12/2011$** . Que se passe t'il au 31/12/2011 ?

1. Si Dollar/Euro  $< 0.7$ , pas d'intérêt à exercer l'option.
2. Sinon, exercice et équivalent d'un gain Dollar/Euro  $- K$ .

En résumé, si  $X$  = taux de change Dollar/Euro, option donne un gain  $\max(X_T - K, 0)$ .



❓ Quel est le cout (la **prime**) de cette assurance ?

❓ AF-KLM transfère le risque vers la banque. **Comment gérer ce risque ?**

⚠️ A la différence des assurances, pas de diversification sur les nombreux assurés.

# Montant des notionnels des produits dérivés (OTC) par marchés et par instruments

SOURCE : [www.bis.org](http://www.bis.org) (Bank for International Settlements)

En Milliards de \$

Pour comparaison, PIB 2010

- France  $\approx$  2600 Milliards de \$
- USA  $\approx$  14600 Milliards de \$
- Europe  $\approx$  16100 Milliards de \$
- Monde  $\approx$  62000 Milliards de \$

SOURCE : FMI.

Risk Category / Instrument	Notional amounts outstanding				
	Jun 2006	Dec 2006	Jun 2007	Dec 2007	Jun 2008
<b>Total contracts</b>	<b>370,178</b>	<b>414,845</b>	<b>516,407</b>	<b>595,341</b>	<b>683,725</b>
<b>Foreign exchange contracts</b>	<b>38,127</b>	<b>40,271</b>	<b>48,645</b>	<b>56,238</b>	<b>62,983</b>
Forwards and forex swaps	19,407	19,882	24,530	29,144	31,966
Currency swaps	9,696	10,792	12,312	14,347	16,307
Options	9,024	9,597	11,804	12,748	14,710
<b>Interest rate contracts</b>	<b>262,526</b>	<b>291,582</b>	<b>347,312</b>	<b>393,138</b>	<b>458,304</b>
Forward rate agreements	18,117	18,668	22,809	26,599	39,370
Interest rate swaps	207,588	229,693	272,216	309,588	356,772
Options	36,821	43,221	52,288	56,951	62,162
<b>Equity-linked contracts</b>	<b>6,782</b>	<b>7,488</b>	<b>8,590</b>	<b>8,469</b>	<b>10,177</b>
Forwards and swaps	1,430	1,767	2,470	2,233	2,657
Options	5,351	5,720	6,119	6,236	7,520
<b>Commodity contracts</b>	<b>6,394</b>	<b>7,115</b>	<b>7,567</b>	<b>8,455</b>	<b>13,229</b>
Gold	456	640	426	595	649
Other commodities	5,938	6,475	7,141	7,861	12,580
Forwards and swaps	2,188	2,813	3,447	5,085	7,561
Options	3,750	3,663	3,694	2,776	5,019
<b>Credit default swaps</b>	<b>20,352</b>	<b>28,650</b>	<b>42,580</b>	<b>57,894</b>	<b>57,325</b>
Single-name instruments	13,873	17,879	24,239	32,246	33,334
Multi-name instruments	6,479	10,771	18,341	25,648	23,991
<b>Unallocated</b>	<b>35,997</b>	<b>39,740</b>	<b>61,713</b>	<b>71,146</b>	<b>81,708</b>

## 2) LÀ OÙ LES MATHÉMATIQUES RENTRENT EN JEU

- Ont toujours été utilisées dans les banques (comme dans bien des domaines...)
  - Inévitables **depuis longtemps en économie et économie mathématique** : modèle d'équilibre, de croissance, de prévision de chômage... Voir les prix Nobel d'économie de Kantorovich (*Théorie de l'allocation optimale des ressources*), Debreu (*Théorie de l'équilibre général et partiel*), Allais ...
- 1973.** Résolution surprenante d'un problème de cible aléatoire par les économistes **Black-Scholes-Merton** (Nobel en 1997).  
Puis développement spectaculaire des marchés, soutenus par l'informatique.

### Zoom sur la gestion des risques associée à la vente d'un produit dérivé sur une action

Supposons que le produit dérivé donne un flux (*payoff*) final en  $T$  de la forme  $g(S_T)$ , c'est-à-dire une fonction de l'action  $S_T$  (non connue à  $t = 0$ ).

**Point de vue de la banque** : comment investir dynamiquement dans l'action pour être en mesure d'avoir le flux  $g(S_T)$  en  $T$  ?

## Réécriture du problème

*Portefeuille d'investissement de la banque* : valeur liquidative  $(V_t)_t$  au cours du temps.

### Schéma idéal :

1. **Le client** achète une option et **verse une prime**  $V_0$  à la banque.
2. **La banque investit**  $V_0$  : comment ?  
     **en achetant une quantité**  $\delta_t$  **d'action à chaque instant**  $t$ .

Choix de  $(\delta_t)_t$  ?

3. A échéance de l'option,  $\mathbf{V_T = g(S_T)}$ .

**Condition d'autofinancement** (équation de conservation) : *les variations du portefeuille sont dues uniquement aux variations du cours de l'action*

$$d\mathbf{V_t} = \delta_t d\mathbf{S_t}, \quad \text{équivalent à} \quad \mathbf{V_t} = \mathbf{V_0} + \int_0^t \delta_s d\mathbf{S_s}.$$

Problème de cible stochastique.

Nécessité de décrire un modèle d'évolution aléatoire de l'action  $(S_t)_t$ .



## Des cours erratiques et imprévisibles

❓ Quel sens mathématique donner à l'intégrale  $\int_0^T [\dots] dS_t$  ?

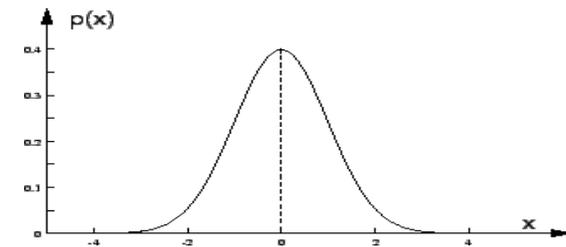
↪ calcul stochastique (Itô en 1948, Doebelin en 1940).

Maintenant enseigné dans de nombreux Masters 1 et 2 de mathématiques à l'université, dans de nombreuses écoles d'ingénieur et écoles de commerce.

## La loi gaussienne (ou loi normale) : brique de base

### Variable gaussienne centrée réduite

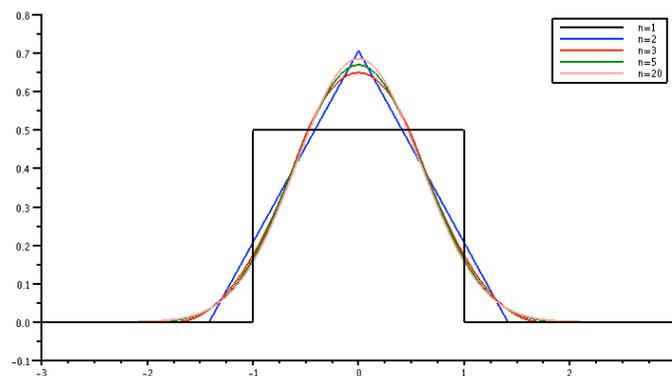
- (notée  $\mathcal{N}(0, 1)$ ) :  $p(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp(-\frac{1}{2}x^2)$ .



- Si  $Y$  de loi  $\mathcal{N}(m, \sigma^2)$ , alors  $Y = m + \sigma X$  avec  $X$  de loi  $\mathcal{N}(0, 1)$ .

Ne dépend que de deux paramètres (choix parcimonieux, facilité d'estimation).

- Le rôle central des gaussiennes comme **loi d'attraction universelle** : *la somme (renormalisée) de v.a. indépendantes (de même loi et de variance finie) ressemble à une variable gaussienne lorsque le nbre de termes est grand.*



*Somme de variables  
de loi uniforme*

↪ Naturellement, **perturbations aléatoires** sont modélisées par des **variables gaussiennes**.

↪ Dans les marchés financiers, les **achats/ventes des nombreux intervenants** produisent des cours ayant **localement des comportements gaussiens**.

# Vers une modélisation des trajectoires aléatoires erratiques (avec allure fractale)

Un point de départ possible : la fonction de **[Weierstrass, 1872]**

$$W(x) = \sum_{m \geq 1} a^{-m} \cos(b^m x) \quad (a > 1).$$

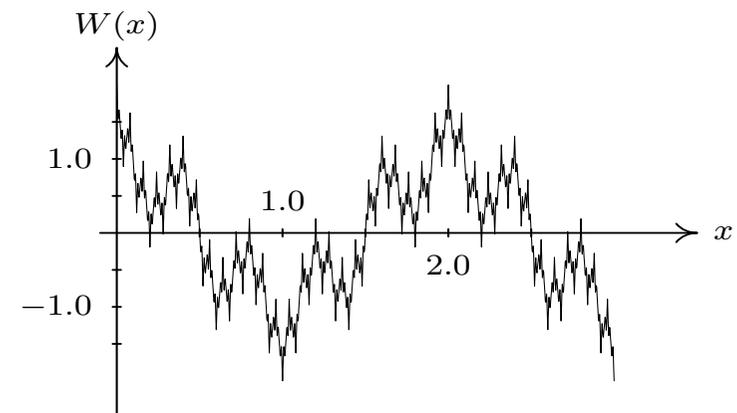
Prototype de *série lacunaire*.

Quelques propriétés :

1.  $W$  est continue.
2. Si  $b < a$ ,  $W$  est continûment différentiable.
3. Si  $b \geq a$ , alors  $W$  n'a aucun de points de différentiabilité **[Hardy, 1916]**.

Fonction de Weierstrass pour  $a = 2$  et  $b = 5$

(SOURCE : Thim 2003) :



## Séries de Fourier randomisées

$(G_m)_m$  variables gaussiennes centrées réduites indépendantes :

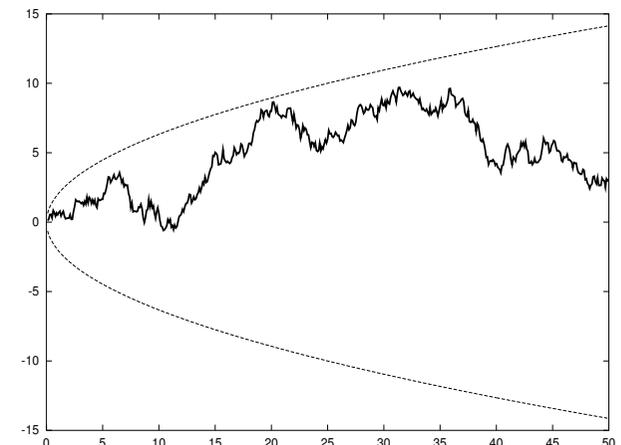
$$\mathbf{W}_t = \frac{t}{\sqrt{\pi}} \mathbf{G}_0 + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \sum_{m \geq 1} \frac{\sin(mt)}{m} \mathbf{G}_m.$$

### Propriétés.

- la loi de  $W_t$  est gaussienne et d'espérance nulle.
- Fonction de covariance :  $\text{Cov}(\mathbf{W}_t, \mathbf{W}_s) = \frac{ts}{\pi} + \frac{2}{\pi} \sum_{m \geq 1} \frac{\sin(mt)}{m} \frac{\sin(ms)}{m} = \min(s, t)$ .
- $W_t$  a la loi  $\mathcal{N}(0, t)$  et les accroissements de  $W$  sont indépendants.
- La fonction aléatoire  $(W_t)_{0 \leq t \leq \pi}$  est continue.

**Définition.** La fonction  $W$  est appelé **mouvement brownien** : c'est une fonction aléatoire continue, dont les accroissements sont indépendants, stationnaires et de loi gaussienne.

Ici, notation **W** pour **W**iener et non **W**eierstrass.



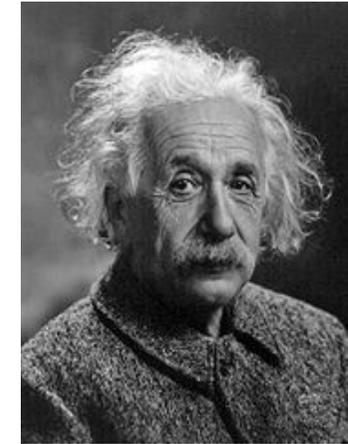
**Le mouvement brownien** traditionnellement associé à l'analyse de mouvements désordonnés imprévisibles.



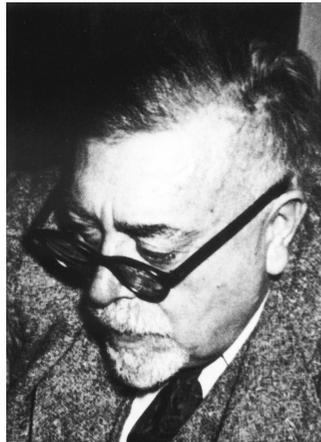
Brown (1773-1858)



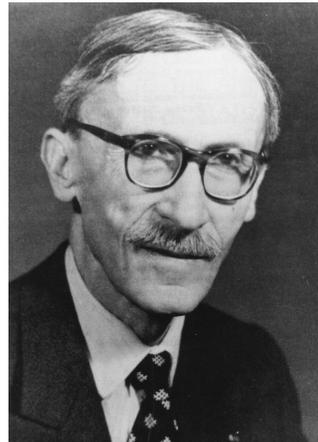
Bachelier (1870-1946)



Einstein (1879-1955)



Wiener (1894-1964)



Lévy (1886-1971)

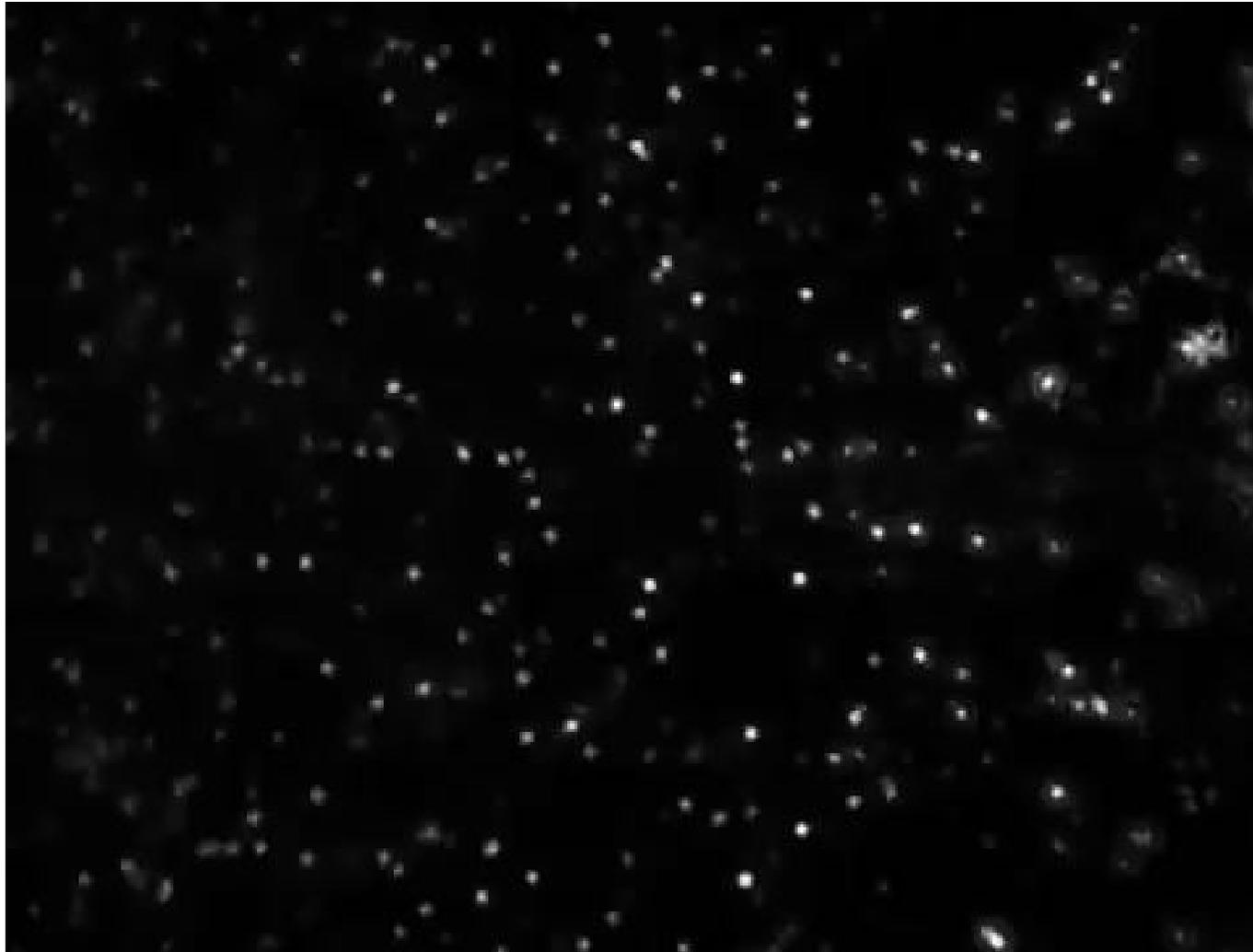


Itô (1915-2008)

SOURCE (Itô, Lévy, Wiener) : archives du "Mathematisches Forschungsinstitut Oberwolfach".

## Brownian Motion nanoparticles in water

<http://www.youtube.com/watch?v=cDcprgWiQEY>



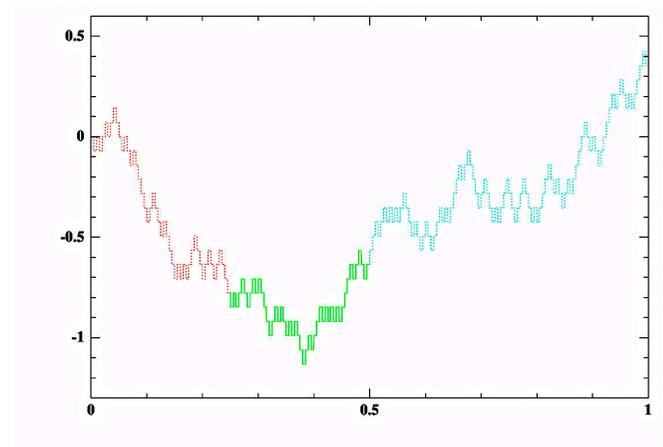
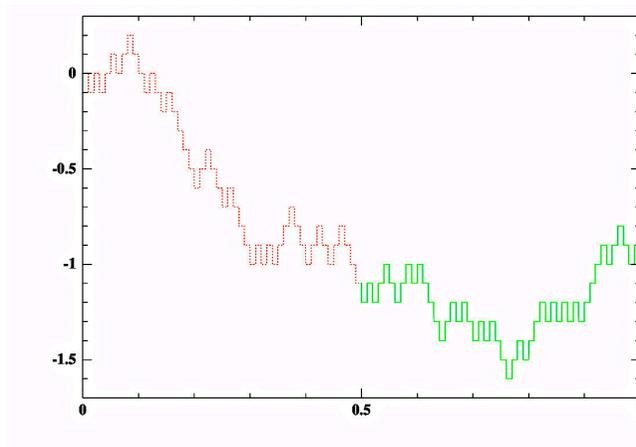
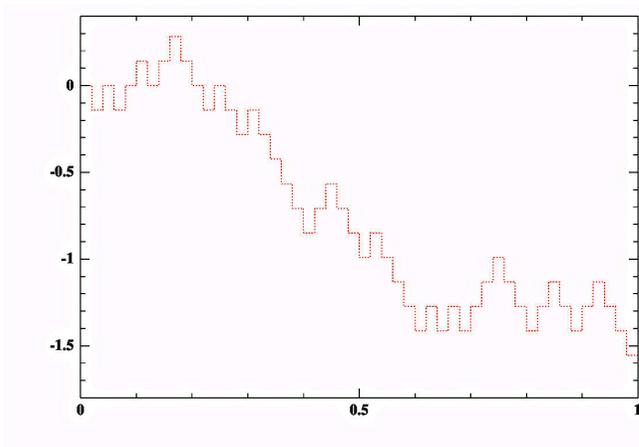
## Un autre point de vue : limite de marches aléatoires

On considère des variables indépendantes  $(X_i)_{i \geq 1}$  valant  $\pm 1$  avec probabilité  $\frac{1}{2}$ .

On définit la marche aléatoire (renormalisée)

$$W_t^n = \frac{1}{\sqrt{n}} \sum_{i \leq \lfloor nt \rfloor} X_i.$$

**Théorème de Donsker.**  $(W_t^n)_{t \geq 0}$  "converge" vers un mouvement brownien.



## Quelques propriétés étonnantes du brownien

Trajectoires continues mais

1. le **mouvement brownien n'est monotone sur aucun intervalle** (non réduit à un point)

$$\mathbb{P}(W \uparrow \text{ sur } ]a, b[) \leq \mathbb{P}(W \uparrow \text{ sur } ]a, a + \frac{b-a}{n}[, \dots, W \uparrow \text{ sur } ]b - \frac{b-a}{n}, b[) = \left(\frac{1}{2}\right)^n \rightarrow 0.$$

2. le **mouvement brownien n'est nulle part différentiable !**
3. il possède bien d'autres propriétés fascinantes...
4. sa **variation quadratique est finie** :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} \sum_{0=t_0 < \dots < t_N=t} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})^2 = t$$

avec probabilité 1.

## Lien crucial avec les Equations aux Dérivées Partielles

La densité au point  $y$  de la variable  $x + W_t$  est

$$p_t(y - x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} \exp\left(-\frac{(y - x)^2}{2t}\right)$$

et satisfait l'équation de la chaleur

$$\partial_t p_t(y - x) = \frac{1}{2} \partial_{x,x}^2 p_t(y - x).$$

**Conséquence clé :** la fonction  $u(t, x) = \mathbb{E}(g(x + \mathbf{W}_t)) = \int_{\mathbb{R}} g(y) p_t(y - x) dy$  est solution de l'équation de la chaleur

$$\begin{cases} \partial_t u(t, x) &= \frac{1}{2} \partial_{x,x}^2 u(t, x), & t > 0, \\ u(0, x) &= g(x) \text{ pour } x \in \mathbb{R}. \end{cases}$$

↪ **Interprétation probabiliste (Feynman-Kac) d'équation déterministe.**

## Du brownien à un modèle stochastique de cours d'action

Modèle de Black-Scholes-Samuelson (1965). *Hypothèse fondatrice* :

- Les rendements infinitésimaux  $\frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t}$  sont indépendants et gaussiens :
  - sous forme différentielle :  $\frac{dS_t}{S_t} = \mu dt + \sigma dW_t$
  - sous forme intégrée :  $S_t = S_0 e^{(\mu - \frac{1}{2}\sigma^2)t + \sigma W_t}$ .

**Retour au problème de gestion des risques :**  
**définir les intégrales stochastiques  $\int_0^T [\dots] dS_t$  ?**

**Cas simple :**  $\mathcal{I}_T = \int_0^T W_t dW_t = ?$  Réponse  $\neq \frac{W_T^2}{2}$  

 Règle des trapèzes à droite :  $\mathcal{I}_T^{N,d} = \sum_{i=1}^N \mathbf{W}_{t_{i+1}} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$

 Règle des trapèzes à gauche :  $\mathcal{I}_T^{N,g} = \sum_{i=1}^N \mathbf{W}_{t_i} (W_{t_{i+1}} - W_{t_i})$

 Ne peut-être équivalent car  $\mathcal{I}_T^{N,d} - \mathcal{I}_T^{N,g} \rightarrow \mathbf{T}$ .

- On retient la règle à gauche qui préserve le centrage de l'espérance + d'autres bonnes propriétés. Interprétation intuitive de non-anticipation.

- Il en découle  $\mathcal{I}_T = \int_0^T \mathbf{W}_t d\mathbf{W}_t = \frac{W_T^2}{2} - \frac{\mathbf{T}}{2}$ .

## Formule d'Itô

Décomposition infinitésimale de  $v(t, S_t)$  :

$$dv(t, \mathbf{S}_t) = \partial_t v(t, \mathbf{S}_t) dt + \partial_S v(t, \mathbf{S}_t) dS_t + \frac{1}{2} \partial_{S,S}^2 v(t, \mathbf{S}_t) \underbrace{\sigma^2 S_t^2}_{\text{variation quadratique de } S} dt.$$

**La solution au problème de gestion des risques :**

$$dV_t = \delta_t dS_t \text{ et } V_T = g(S_T)$$

Cherchons une solution sous la forme  $\mathbf{V}_t = \mathbf{v}(t, \mathbf{S}_t)$ .

$$\text{Identification : } \begin{cases} \partial_t v(t, S) + \frac{1}{2} \sigma^2 S^2 \partial_{S,S}^2 v(t, S) = 0, \\ v(T, S) = g(S). \end{cases} \quad \text{stratégie : } \delta_t = \partial_S v(t, \mathbf{S}_t).$$

- 😊 Transfert de risque idéal : la banque peut trouver une stratégie d'immunisation parfaite aux évolutions de  $S$ .
- 😊 Les règles de décision ne dépendent pas du rendement de  $S$  mais seulement de sa volatilité  $\sigma$ .

Dans le cas où

$$g(\mathbf{x}) = \max(\mathbf{x} - \mathbf{K}, 0),$$

résolution explicite de l'EDP pour obtenir la **formule de Black-Scholes** :

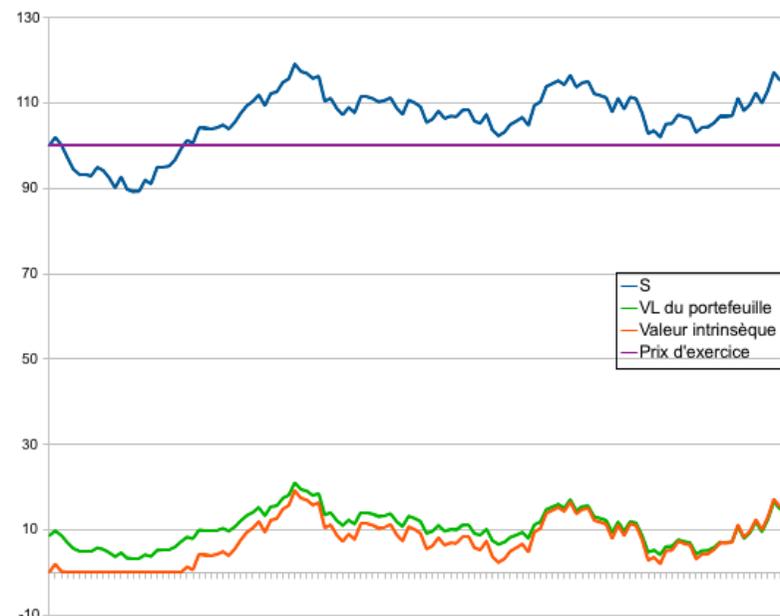
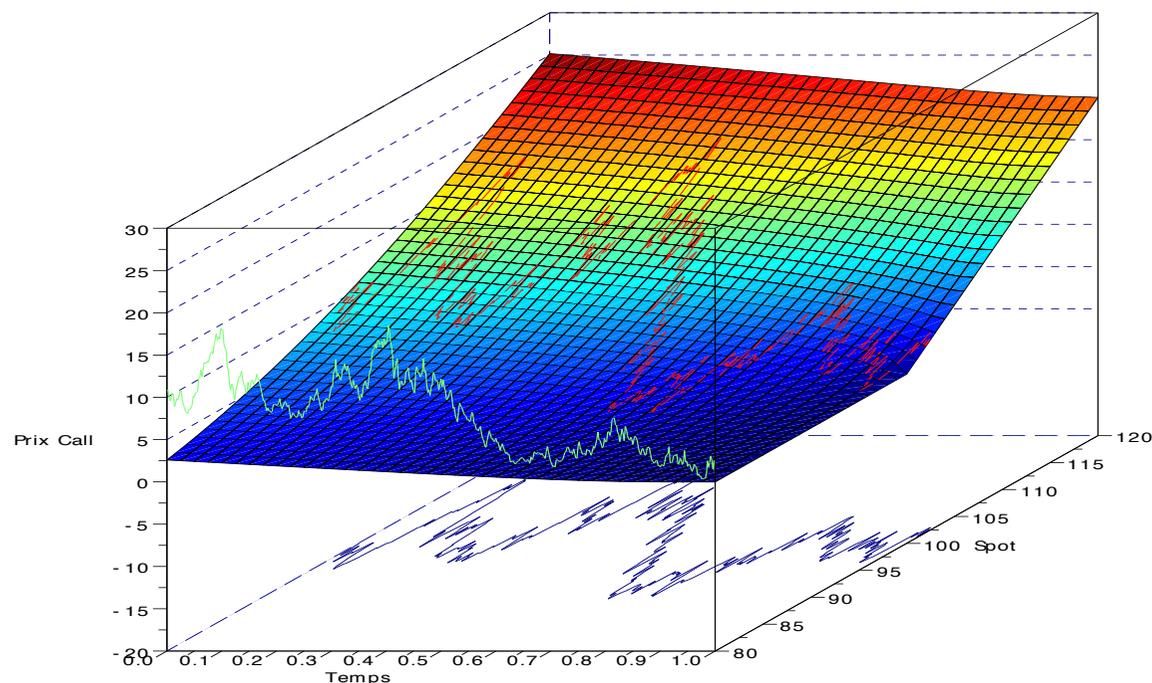
$$v(t, S) = S \mathcal{N}[d_+(T - t, S, K)] - K \mathcal{N}[d_-(T - t, S, K)]$$

avec

$$d_{\pm}(\tau, x, y) = \frac{1}{\sigma\sqrt{\tau}} \ln\left(\frac{x}{y}\right) \pm \frac{1}{2}\sigma\sqrt{\tau}$$

où

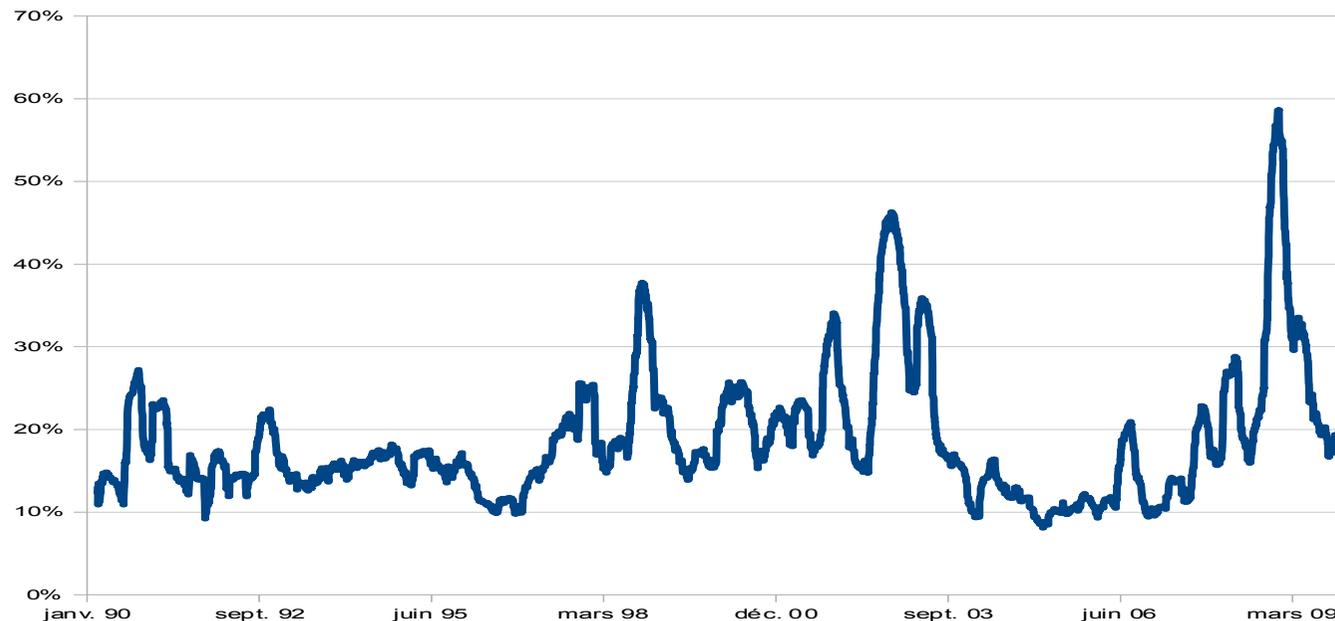
$$\mathcal{N}(x) = \int_{-\infty}^x \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left(-\frac{1}{2}y^2\right) dy.$$



## Mise en pratique

### 1) Détermination de la volatilité

#### Volatilité historique



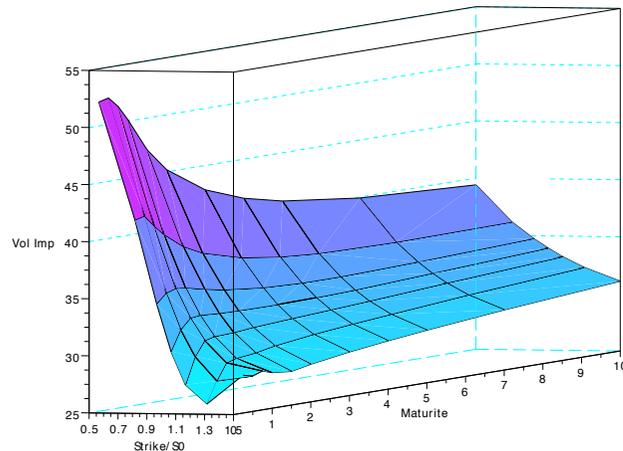
Volatilité historique annualisée du CAC40 calculée à partir des cours de clôture des 60 derniers jours.

⇒ Manque de stationnarité. Fragilité des méthodes statistiques 🤔

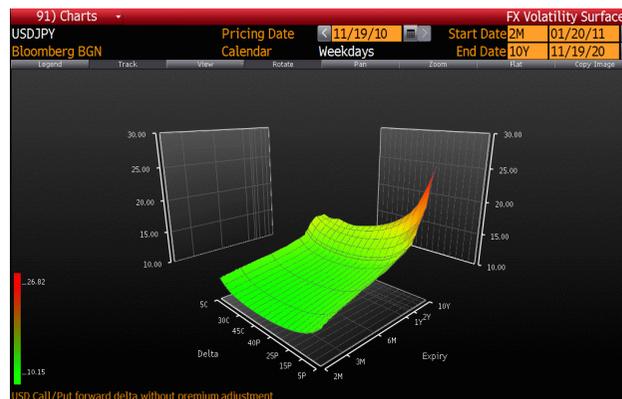
## Volatilité implicite par les prix d'options cotés

**Volatilité implicite** = paramètre à mettre dans la formule de Black-Scholes pour retrouver les prix cotés sur le marché.

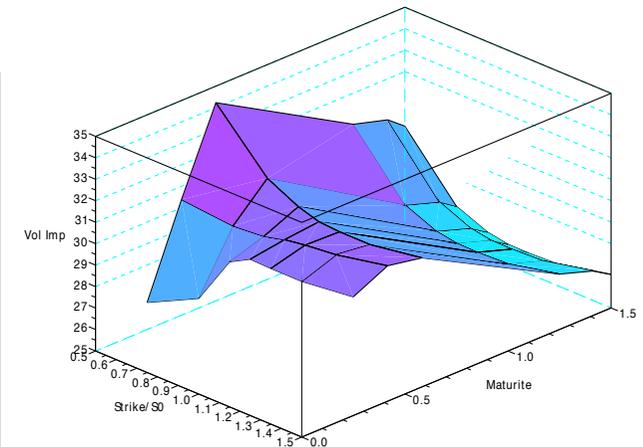
- Grille de lecture de prix, qui est adimensionnelle et intrinsèque.
- A priori,  $\sigma_{\text{impl}}$  dépend de  $T$  et  $K$ .



EUROSTOXX50



Dollar-Yen (SOURCE : Bloomberg)



Cacao

- Le modèle de Black-Scholes n'est pas valable (connu depuis le Krack de 1987).
- Toutefois, depuis très longtemps toutes les conventions de marché font référence à ces paramètres Black-Scholes.

- Conceptuellement, il faut appréhender comment des surfaces aléatoires (multi-paramétriques) font se déformer au cours du temps.

**Requiert un bon niveau d'abstraction.**

- ☹️ A la différence de la physique/mécanique, les cours boursiers n'obéissent pas à des lois physiques.

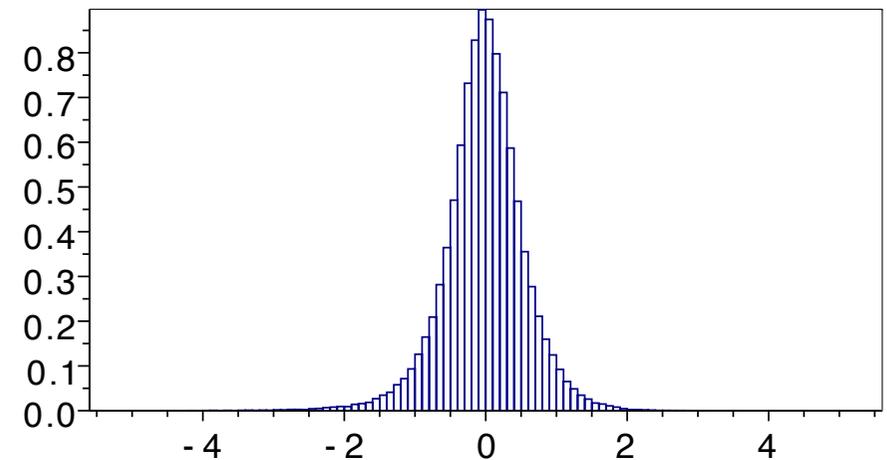
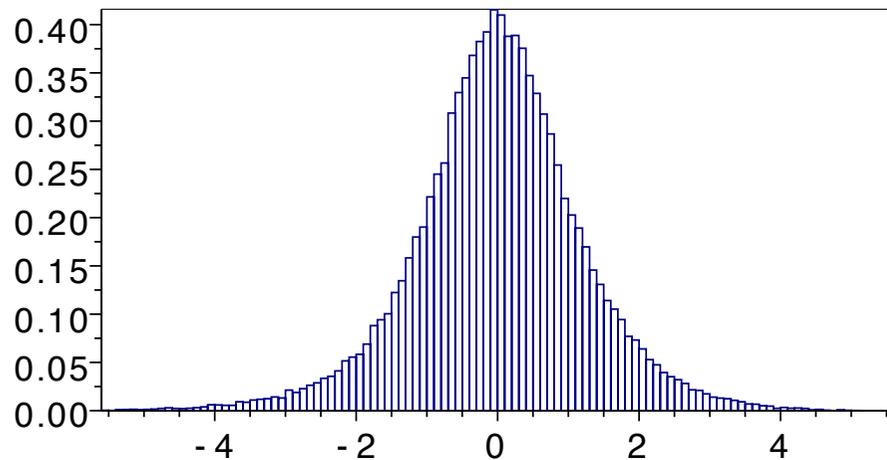
**Illusoire de chercher un modèle parfait.**

- 😊 Pour couvrir les risques, on a des **résultats de robustesse % modèle.**

- On connaît un nombre limité de modèles (Heston, SABR, CEV...) qui rendent bien compte de ceux qu'on observe.

En déterminer c'est le problème de calibration de modèle (algorithmes d'optimisation de critères non convexes, parfois multi-critères...)

## 2) Stratégie suivie en "temps discret"



Distributions des erreurs de couverture avec re-balancement hebdomadaire (gauche) ou quotidien (droite) pour un call 1 an.

**3) Nombreuses améliorations/extensions** concernant la modélisation, la prise en compte d'imperfections, de contraintes, le calcul efficace...

Toujours très actifs, même si certains problèmes sont maintenant matures.

## Les mathématiques appliquées utilisées en finance

Un domaine d'application stimulant la recherche mondiale dans plusieurs domaines des mathématiques appliquées. Pose de nouvelles questions de modélisation et calcul, apporte de nouveaux points de vue.

- **Probabilité** (calcul et analyse stochastique, théorie des processus et martingales, méthodes de Monte Carlo, simulations probabilistes, processus non-linéaires, contrôle stochastique...)
- **Statistique** (données haute fréquence, statistique des processus, théorie des extrêmes, processus à longue mémoire, cointégration...)
- **Analyse et Equations aux Dérivées Partielles** (résolution en grande dimension, analyse asymptotique, calcul parallèle...)
- **Optimisation** (robustesse, semi-définie positive...)

### A créé/renforcé/stimulé les passerelles entre disciplines

Probabilité/Analyse, Optimisation/Stat, Méthodes numériques probabilistes et déterministes ...

### 3) RETOUR SUR LES HYPOTHÈSES... LES DÉRIVÉS DE LA FINANCE

## Une solution parfaite à la couverture des risques de marché mais sous quelles hypothèses ?

Démarche nécessaire pour les précautions d'usage de ces outils.

Hypothèses dites de **marché sans friction** :

#### 1) Pas de coûts de transaction.

- Faux pour les particuliers.
- Vrai pour les professionnels de salle de marché (via des accords globaux entre eux), concernant les marchés liquides.

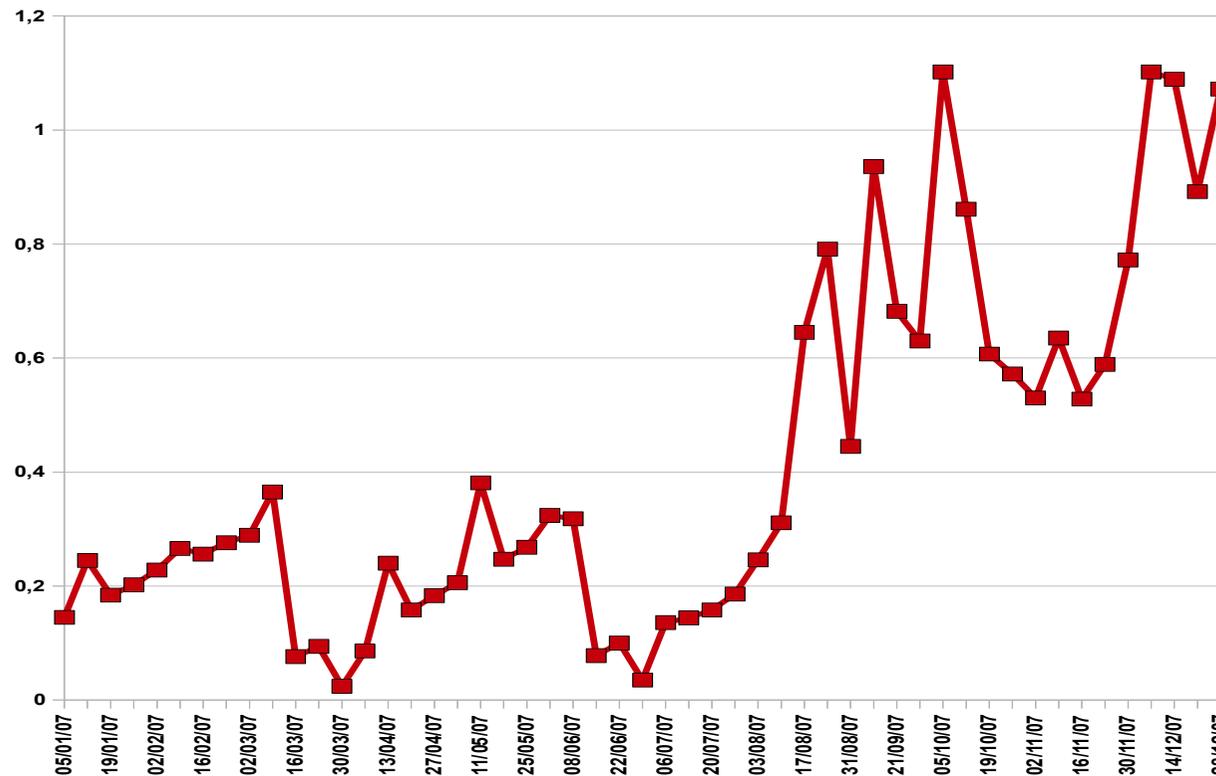
#### 2) Pas d'impôts ou taxes (sur les transactions, ou les plus values).

- Peut-être relâché concernant les taxes sur les plus-values.
- Si concernent les transactions, problème similaire au point 1).

#### 3) Pas d'écart entre prix d'achat et prix de vente des titres (fourchette de prix nulle).

- Traduit une grande liquidité du marché.
- Satisfait en situation normale sur les changes, taux d'intérêt...

## Crise de liquidité des banques à l'été 2007



Différence hebdomadaire entre

- le taux EURIBOR 3 mois (taux de prêt moyen à 3 mois, entre banques zone euro)
- le taux EONIA (taux de prêt interbancaire sur 24 heures).

SOURCE : [www.euribor-ebf.eu](http://www.euribor-ebf.eu)

#### 4) Les transactions sont instantanées.

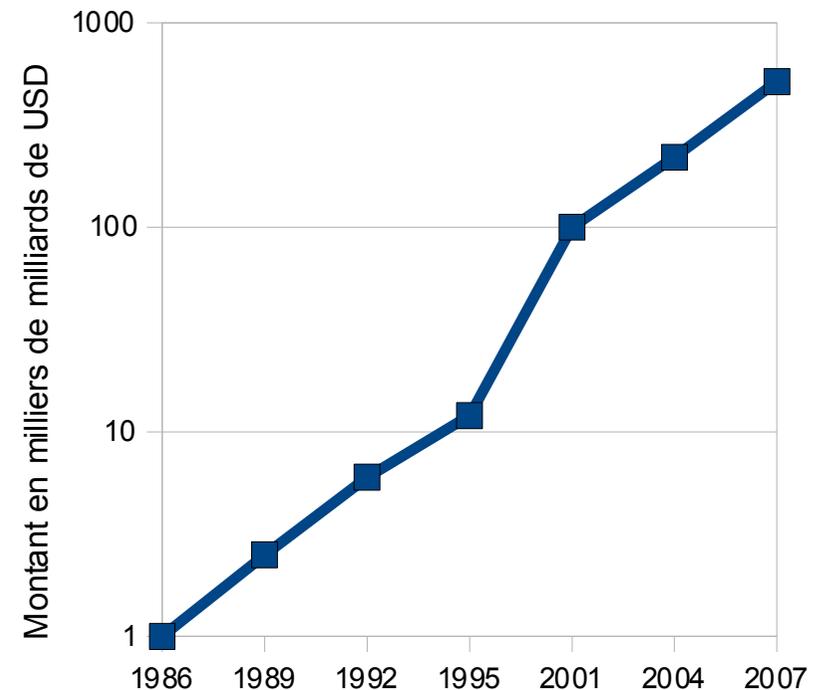
- Délai très court entre la prise de décision d'achat/vente et l'achat/vente lui-même.
- De plus en plus vrai du fait des marchés électroniques.

#### 5) Les titres négociables sont très liquides et indéfiniment fractionnables.

- 😊 *Indéfinie fractionnabilité* : approximation réaliste.
- 😞 *Liquidité* : linéarité du prix indépendamment de la taille.

Évolution des positions (en milliers de milliards de dollars US) sur les marchés des produits dérivés de gré à gré.

SOURCES : [Chabardes-Delcaux, 1996] et [www.bis.org](http://www.bis.org)



## 6) Pas de restriction sur les ventes à découvert.

- Assure une cohérence des prix et des stratégies de couverture. Règle de prix unique (**absence d'opportunité d'arbitrage**).
- Pour couvrir une option de vente, nécessaire de vendre l'action pour s'immuniser contre l'éventuelle future baisse.
- 🙄 Interdire la vente à découvert enrayer la chute des cours, mais limite la couverture des risques.

## 7) Les intervenants du marché sont preneurs de prix.

- Vrai si petit investisseur.
- Faux si taille d'intervention trop importante.

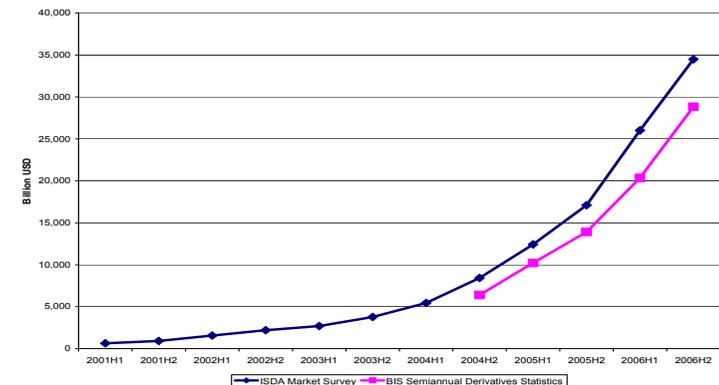
**Ces hypothèses sont réalistes et assez bien satisfaites sur les marchés standard en situation normale.**

Relaxer les hypothèses fait l'objet de recherches actuelles.

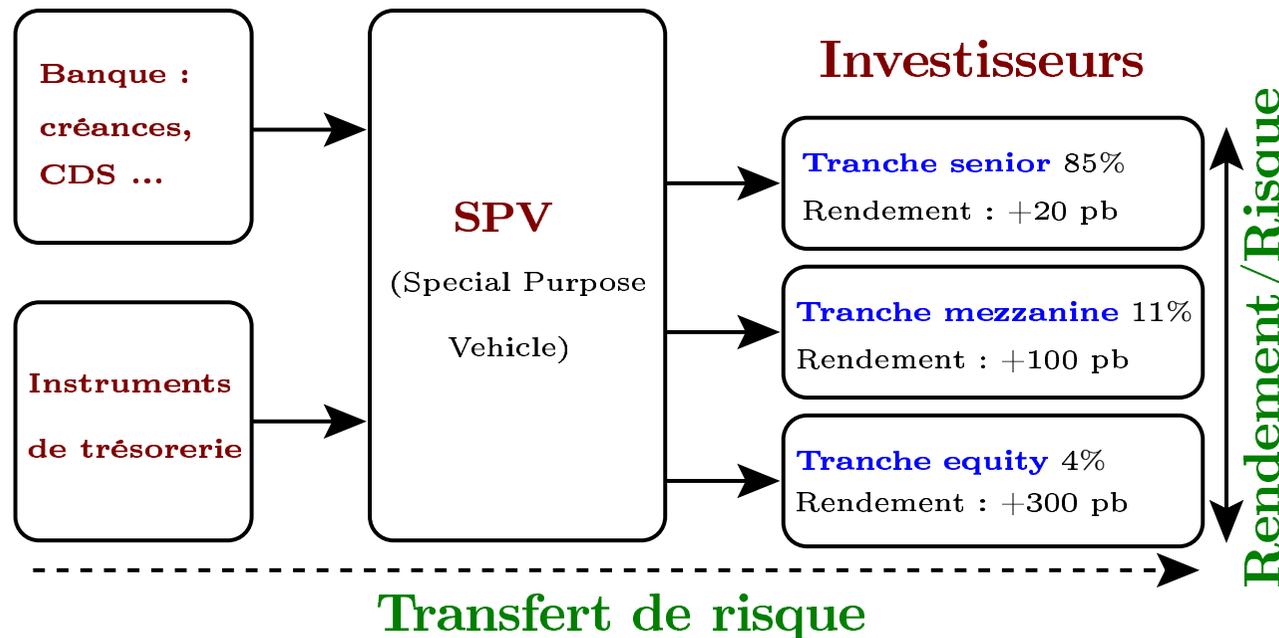
## LE RISQUE DE CRÉDIT

- Nouveau marché développé à la fin des années 90, aux USA puis en Europe.
- Besoin de transfert et de couverture des **risques de défaillance**.
- **Comment couvrir une défaillance ? impossible.**  
Paradigme Black-Scholes-Merton difficilement adaptable.
- **Produits de base :**
  - **CDS** (*Credit Default Swap*) : échange du paiement d'un taux fixe contre un montant en cas de défaillance d'entreprise ou ...  
**Une histoire de pompiers pyromanes ?**
  - *Collateralized Debt Obligations, Asset Back Securities, Credit Link Notes*, etc...

Montant notionnel des dérivés de crédit :  
**évolution spectaculaire et rapide du marché.**



## Développement rapide grâce à un mécanisme sophistiqué de titrisation



- 🙄 Permet de passer de la défaillance d'entreprise à tout type de défaut ou incident de paiement.
- 😞 Redistribue le risque en dehors de la sphère financière vers des investisseurs non spécialistes.
  - La notation des tranches incombe aux agences de notations...
- ⚠️ Asymétrie d'information.

## **Le Monde** (5 novembre 2005) : **Axa se décharge d'une partie de ses risques sur l'assurance automobile**

*"... Jusqu'ici, les assureurs recouraient à ce type de pratiques pour les seules catastrophes naturelles. Le rôle traditionnellement dévolu aux banquiers et aux assureurs consiste à financer et à assurer l'économie, donc à prendre leur part de risque, contre une rémunération. Or, depuis déjà quelques années, **ces acteurs ont tendance à se décharger de ces risques de défaut de solvabilité sur les marchés financiers, en les transformant en titres négociables (notamment dans des montages dits de "titrisation")**. L'opération d'Axa, annoncée jeudi 3 novembre, en est une illustration spectaculaire. Et innove dans le monde de l'assurance..."*

## **Le Monde** (1 juin 2006) : **L'Unedic "titrise" 1.5 milliard d'euros pour améliorer ses finances**

"... Cette technique sophistiquée permettra de **transformer les futures cotisations d'assurance-chômage en titres financiers vendus aux investisseurs. C'est une première dans l'histoire des finances publiques.** L'Unedic, le régime d'assurance-chômage géré paritairement par les syndicats et le patronat, a mis en place, le 22 mai, une opération de titrisation de 1.5 milliard d'euros, un montant très élevé sur le marché français. Derrière le terme barbare de titrisation, se cache un mode de financement moderne, habituellement prisé par les grandes entreprises privées, notamment les assureurs. Il consiste à transformer des créances en titres financiers, vendus aux investisseurs privés sur les marchés.

**Qui détient le risque in fine ?**

## Les subprimes

Crédit hypothécaire *subprime* = l'emprunteur est à risque.

SOURCE : Conseil d'Analyse Economique

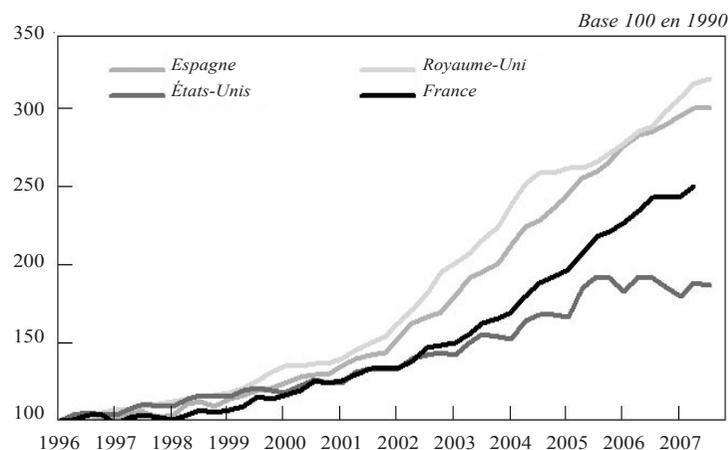
<http://www.cae.gouv.fr/spip.php?article24>

### Bulle immobilière ?

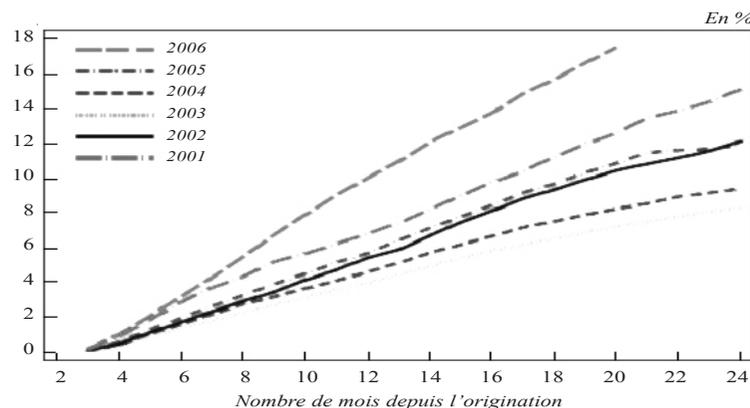
Pour maintenir le volume d'activité de crédit hypothécaire, relâchement des conditions d'attribution des prêts.

Augmentation du taux de défaut des crédits subprimes aux États-Unis

b. Évolution des prix de l'immobilier



Sources : Datastream et Crédit agricole.



# La crise des subprimes et la contagion planétaire

## Le contexte de l'investissement et du risque

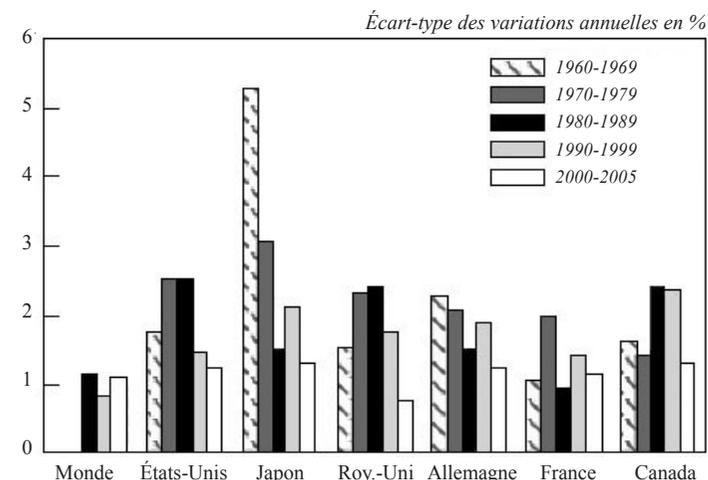
Stabilité de l'inflation, moindre fluctuation du PIB et de ses composantes

⇒ Favorise la confiance.

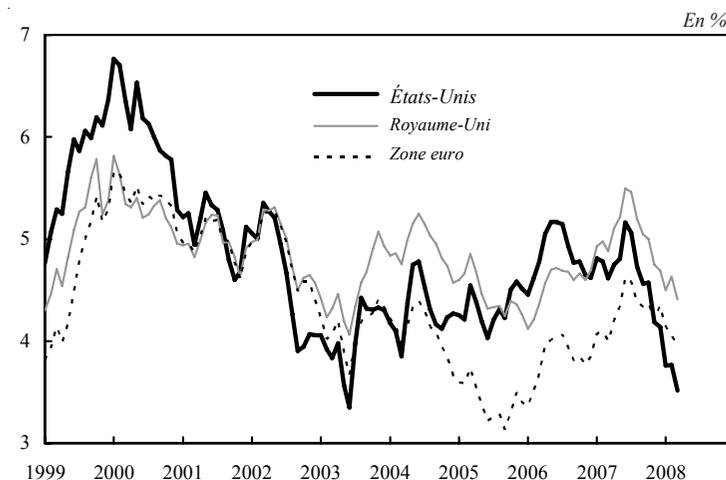
Comparaison des taux d'intérêt à 10 ans.

Moindre rentabilité des placements.

1.3. Volatilité du PIB



Sources : FMI et calculs Banque de France.



Sources : Datastream et Natixis.

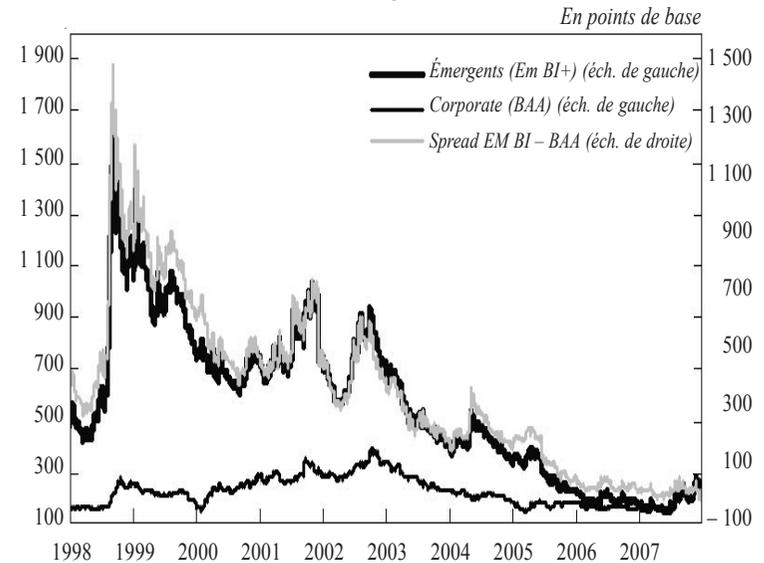
Baisse généralisée des primes de risque.

Diminution de l'aversion au risque.

~> **Titrisation massive des sub-primes.**

**Et distribution mondiale !**

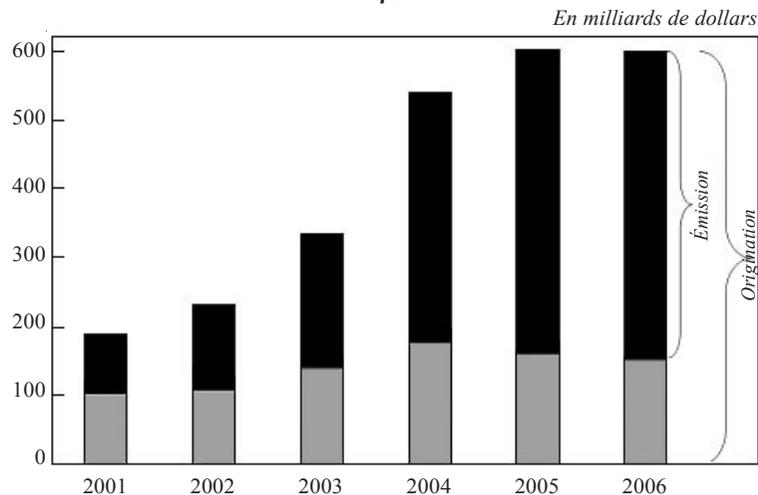
b. Spreads sur obligations risquées



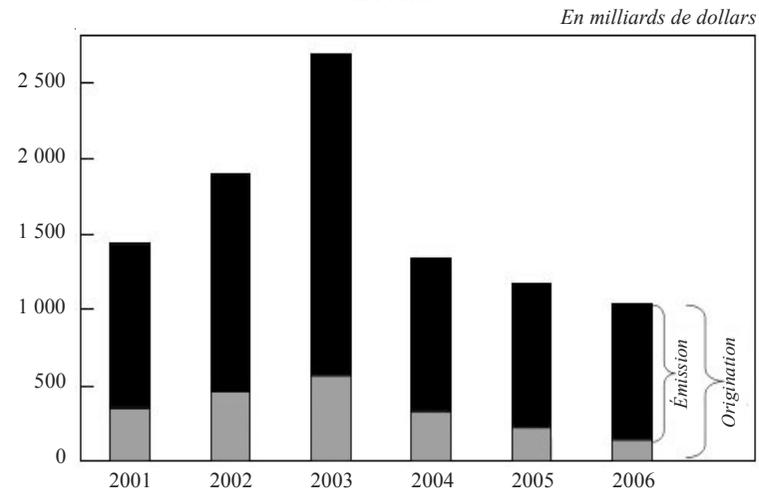
Sources : Bloomberg et calculs Crédit agricole.

**Part des crédits hypothécaires primes et subprimes titrisés**

b. Subprime



a. Prime



## Les agences de notation et la notation des dettes

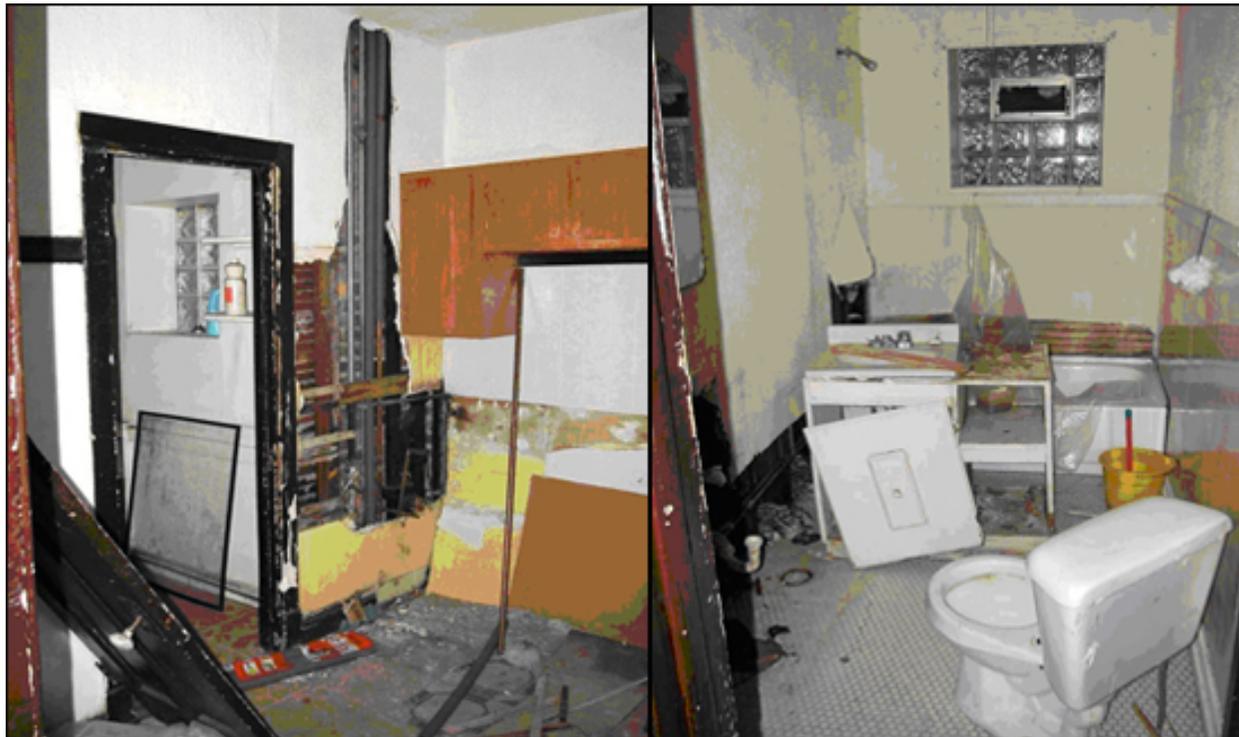
- Forte concentration de l'industrie du rating : 90 % du marché mondial tenu par trois agences (Moody's, Standard & Poors, Fitch).
- Faible concurrence et manque de contestabilité de leurs notations.
- Sur les subprimes, collusion entre le service commercial et l'analyse financière.
- Ont tendance à surnoter les pays occidentaux industrialisés par rapport aux pays émergents.
- Agence européenne pour rééquilibrer la puissance américaine ?
- Concentration des risques, négligence du risque systémique ("*too big to fail*").
- Rôle clé de l'information.

## Vous avez dit "actifs mal-évalués" ?

SOURCE : FBI Mortgage fraud report, 2007.

[http://www2.fbi.gov/publications/fraud/mortgage\\_fraud07.htm](http://www2.fbi.gov/publications/fraud/mortgage_fraud07.htm)

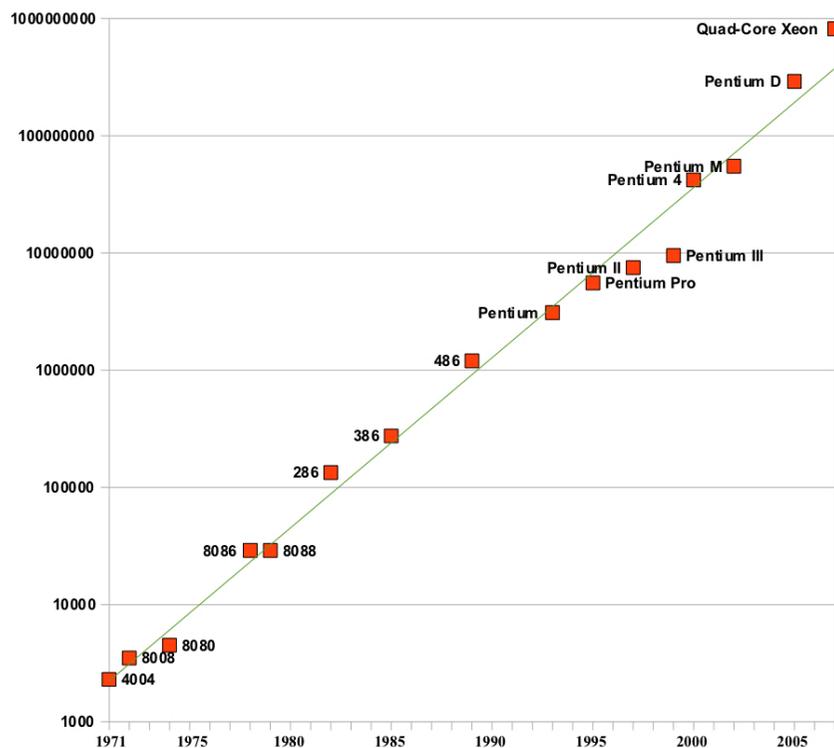
*The above photos are from condos that were involved in a mortgage fraud. The appraisal described recently renovated condominiums to include Brazilian hardwood, granite countertops, and a value of \$275,000.*



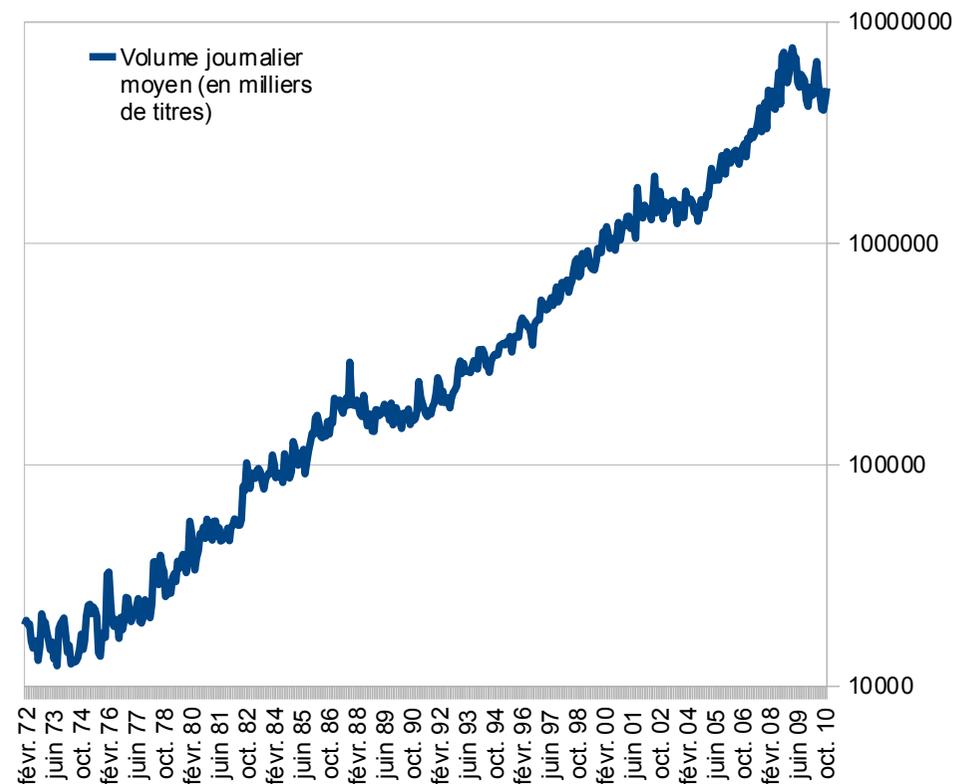
## LE RISQUE TECHNOLOGIQUE

Développement des marchés : impossible sans celui de la puissance de calculs des ordinateurs, des capacités de stockage et des échanges d'information.

### Nbre de transistors des processeurs Intel



### Volume journalier des titres du Dow Jones



# Marchés électroniques

Rapidité et automatisation des transactions

SOURCE : [www.bis.org](http://www.bis.org)

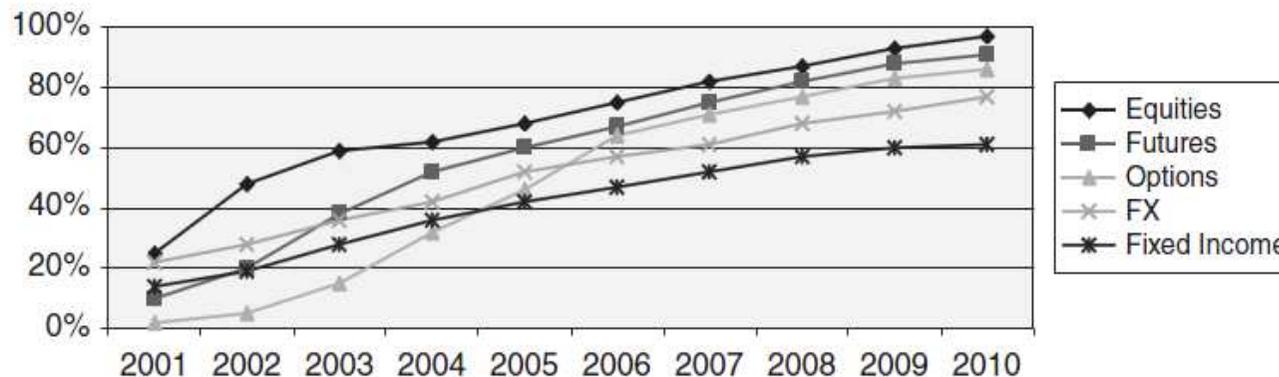
Global OTC derivatives market turnover by instrument<sup>1</sup>  
Average daily turnover in April, in billions of US dollars

Instrument	1998	2001	2004	2007
<b>A. Foreign exchange instruments</b>	<b>97</b>	<b>67</b>	<b>140</b>	<b>291</b>
Cross-currency swaps	10	7	21	80
Options	87	60	117	212
Other	0	0	2	0
<b>B. Interest rate instruments<sup>2</sup></b>	<b>265</b>	<b>489</b>	<b>1,025</b>	<b>1,686</b>
FRAs	74	129	233	258
Swaps	155	331	621	1,210
Options	36	29	171	215
Other	0	0	0	1
<b>C. Estimated gaps in reporting</b>	<b>13</b>	<b>19</b>	<b>55</b>	<b>113</b>
<b>D. Total</b>	<b>375</b>	<b>575</b>	<b>1,220</b>	<b>2,090</b>

<sup>1</sup> Adjusted for local and cross-border double-counting. <sup>2</sup> Single currency interest rate contracts only.

% de transactions électroniques par types d'instruments

SOURCE : [Aldridge, 2010]



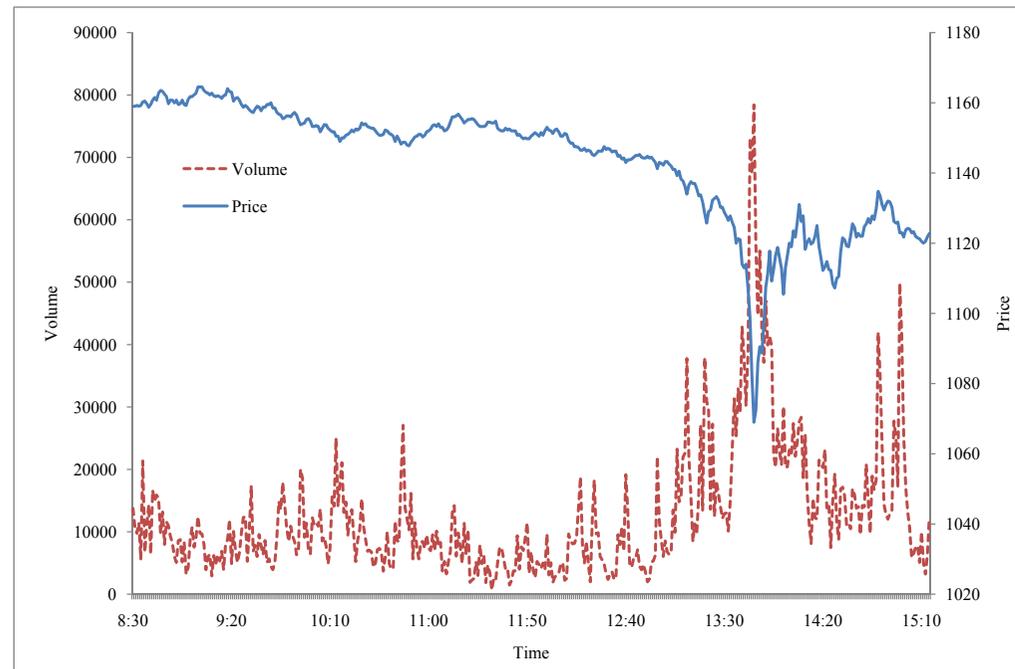
## Les dérives du High Frequency Trading

HFT = algorithmes + ordres électroniques rapides (co-location) + temps de portage court.

### Le Flash Crash du 6 mai 2010

Prix et volumes (par minute) du contrats futures sur E-Mini S&P futures

SOURCE : [Kirilenko *etal.* 2011]



A quand les transactions à la nanoseconde ? quelle utilité ?

## 4) COMPRENDRE ET GÉRER LES RISQUES

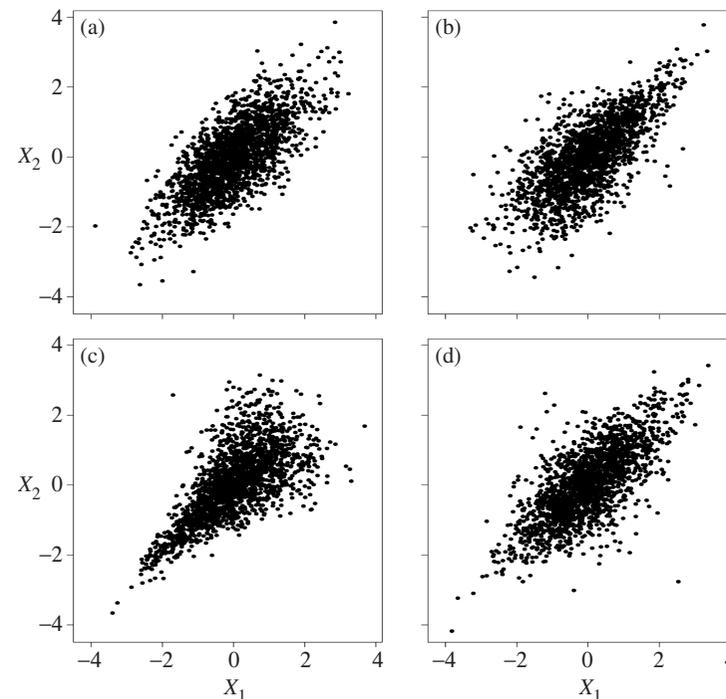
Quelques exemples qui montre la complexité de la tâche, et où les maths peuvent aider

Dépendance : notion très délicate.

SOURCE : Embrechts, Frey, McNeil "*Quantitative Risk Management : Concepts, Techniques and Tools*"

**Différents jeux de données avec corrélation 70%.**

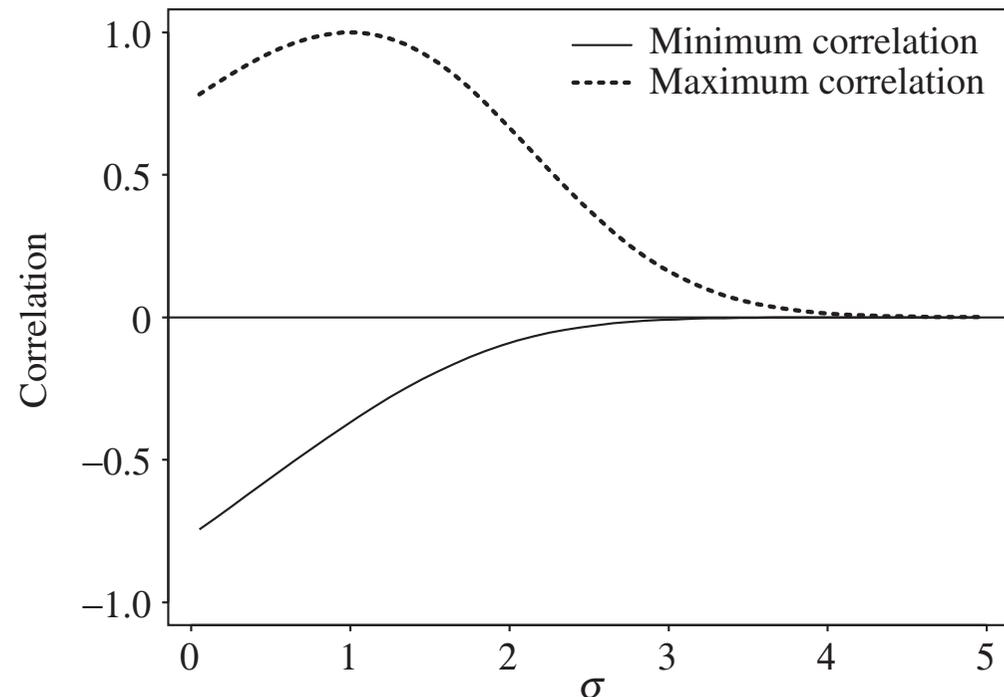
Chaque composante a la loi gaussienne centrée réduite.



## Dépendance maximale

**Question :** si  $X$  et  $Y$  sont deux variables gaussiennes, quelle est la corrélation maximale de  $\exp(X)$  et  $\exp(Y)$  ?

**Réponse :**  $\neq 1!$



⚠ La corrélation (coefficient de Pearson) est une mesure de dépendance linéaire adaptée au cas gaussien.

Sinon, utiliser taux de Kendall ou Spearman (corrélation de rang).

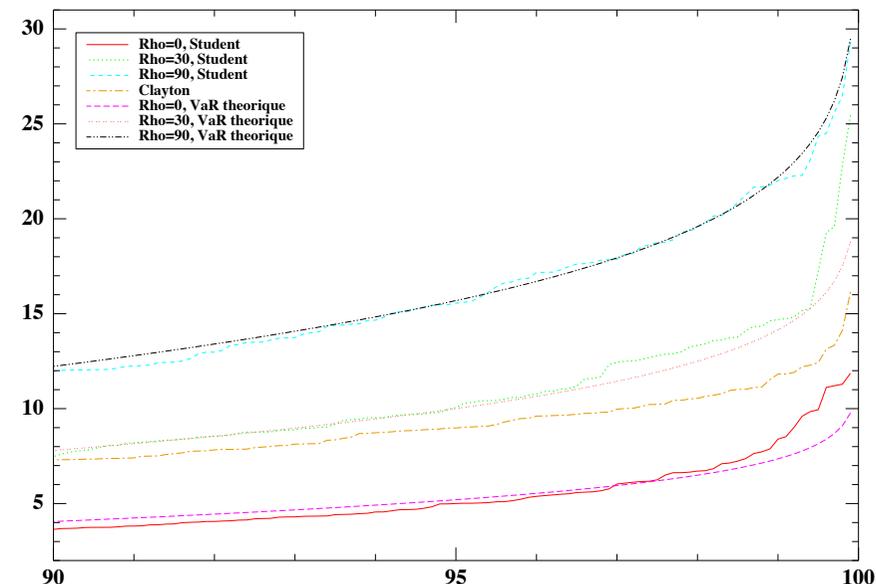
## La mesure des risques (extrêmes)

La **valeur en risque**  $\text{VaR}(\alpha)$  (ou *Value at Risk*) est un indicateur réglementaire, servant à calculer les fonds propres à immobiliser en cas de pertes extrêmes.

- La **valeur en risque** au niveau  $\alpha = 99\%$  est le seuil de pertes potentielles dépassées avec probabilité 1%.
- Ex : risque de marché :  $\alpha = 99\%$  à horizon 10j
- Comment mesurer la VaR ? dans les queues de distribution, peu de données.

Dépend fortement du modèle.

Exemple :  $L = \sum_{i=1}^{10} X_i$  avec  
 $X_i = \mathcal{N}(0, 1)$ .



- ☹️ Etre plus prudent, est-ce choisir  $\alpha$  plus près de 100% ?
- ☹️ La VaR n'encourage pas la diversification (non sous-additif).

## **Le Monde** (7 mai 2005) : **En dégradant sa notation sur General Motors et Ford, l'agence Standard & Poor's fait plonger leurs cours**

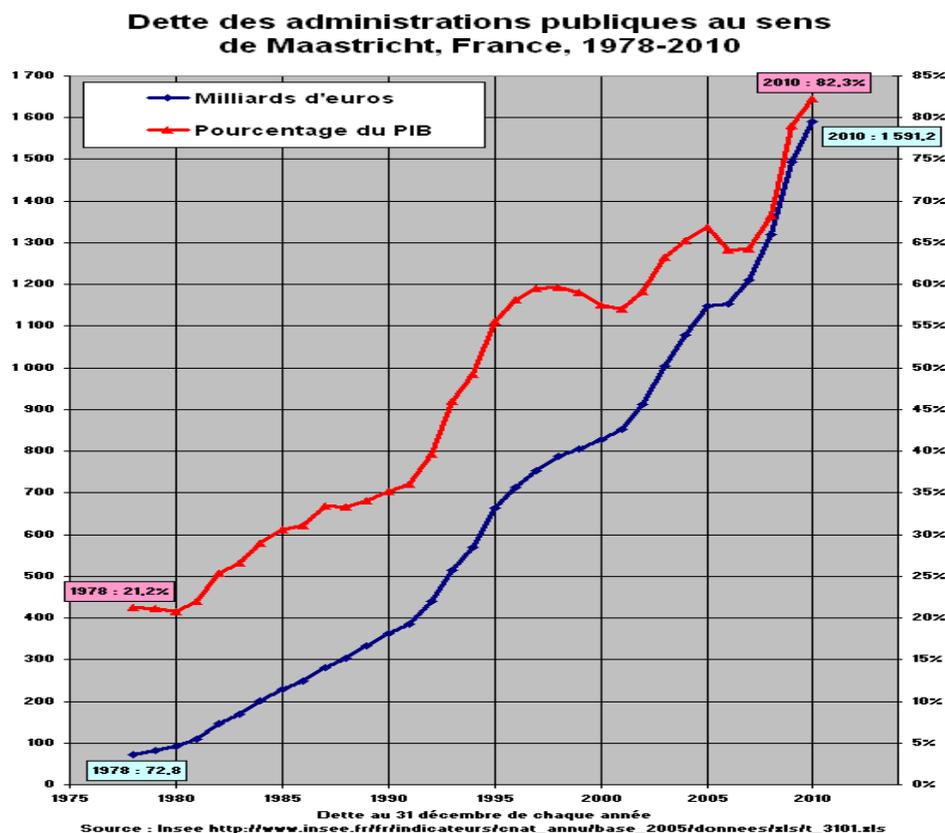
*"... Les constructeurs automobiles américains n'inspirent plus confiance : jeudi 5 mai, l'agence de notation Standard & Poor's a abaissé la dette de General Motors et celle de Ford, respectivement, à BB et BB+, les faisant passer dans la catégorie des valeurs spéculatives (junk)..."*

## **Le Monde** (25 mai 2005) : **Les fonds spéculatifs menacent-ils les marchés financiers ?**

*"... Depuis que les emprunts de General Motors et de Ford ont été jugés risqués par les agences de notation, certains fonds spécialisés auraient perdu des sommes importantes.[..] L'un d'eux serait même au bord de la faillite..."*

## 5) RÔLE DES MATHÉMATIQUES

- Pas de besoin de math pour anticiper les problèmes



- Mathématiques (et informatique) font partie des métiers des produits dérivés : les maths sont nécessaires pour comprendre comment couvrir les risques, les mesurer sous toutes leurs formes (risque de modèle, risque systémique...).

- Les maths devraient davantage rappeler les limites d'applicabilité des méthodologies développées.
- Mieux expliquer et communiquer ce que veulent dire les résultats mathématiques, les hypothèses et les limitations. Démarche appuyée par la simulation aléatoire.
- Travailler avec les régulateurs pour un meilleur cadre de *Risk Management*.
- Proposer des scénarios de tests vraisemblables et invraisemblables, développer des outils robustes aux modèles/hypothèses.
- Remettre en question les outils, les adapter aux évolutions incessantes et aux périodes de crise.
- Détecter les bulles, l'impact du HFT...
- Responsabilité implicite dans l'utilisation des mathématiques.
- Les maths posent des questions, demandent des *définitions claires et rigoureuses*... c'est un des aspects cruciaux de la formation en math.