# Mathématiques et Finance

Emmanuel Gobet* Gilles Pagès† Marc Yor‡

**Abstract**

La grande importance prise dans l'industrie bancaire et les métiers de l'assurance, depuis le début des années 90, par l'utilisation des mathématiques, et plus particulièrement de la théorie des probabilités a suggéré aux auteurs de présenter ici quelques unes de ces interactions entre Mathématiques et Finance et leurs répercussions au niveau de la recherche et la formation en France dans ces domaines.

## 1 Un peu d'histoire

Les origines de la mathématisation de la finance moderne remontent à la thèse de Louis Bachelier [Bac00], intitulée *Théorie de la spéculation* et soutenue à la Sorbonne en 1900. Ces travaux marquent la naissance d'une part des processus stochastiques à temps continu en probabilités, et d'autre part des stratégies à temps continu pour la couverture de risque en finance. Du côté mathématique, sa thèse influença grandement les recherches de A.N. Kolmogorov sur les processus à temps continu dans les années 20 et ceux de K. Itô, père du calcul stochastique, dans les années 50. En revanche, du côté finance, son approche fut oubliée pendant près de trois quarts de siècle, jusqu'en 1973 avec les travaux de Black, Scholes et Merton[1] [BS73] [Mer73].

Revenons à cette époque des années 70 pour mieux cerner le contexte. À ce moment-là, émerge la volonté politique de déréglementer les marchés financiers, rendant ainsi volatiles les taux d'intérêt et instables les taux de change. Dans cet environnement dérégulé, les entreprises industrielles et commerciales sont soumises à des risques accrus, liés par exemple aux taux de change très variables: cette situation est inconfortable, tout particulièrement lorsque recettes et dépenses sont libellés dans des monnaies différentes (disons Dollar et Euro). Pour les aider et plus généralement pour permettre aux compagnies d'assurance et aux banques de couvrir ces nouveaux risques, ont été créés des marchés organisés, les autorisant à intervenir massivement pour échanger des produits assurant contre les variations des taux de change par exemple. C'est la naissance de nouveaux instruments financiers, dits produits dérivés. L'option d'achat (ou *Call*) est le prototype de ces produits financiers et reste aujourd'hui l'un des instruments des plus utilisés: dans l'exemple précédent, elle protège

*CMAP, UMR 7641, École polytechnique, F-91128 Palaiseau Cedex. E-mail: emmanuel.gobet@polytechnique.fr

†Laboratoire de Probabilités et Modèles aléatoires, UMR 7599, Université Paris 6, case 188, 4, pl. Jussieu, F-75252 Paris Cedex 5. E-mail:gpa@ccr.jussieu.fr

‡Laboratoire de Probabilités et Modèles aléatoires, UMR 7599, Université Paris 6, case 188, 4, pl. Jussieu, F-75252 Paris Cedex 5.

[1]pour cela, les deux derniers ont reçu le Prix Nobel d'Économie en 1997 (Black est mort en 1995).

l'entreprise contre la hausse du taux de change Euro/Dollar. L'option d'achat qu'elle va acquérir aujourd'hui, va lui conférer le droit (mais pas l'obligation) d'acheter 1 Dollar à $K$ Euros (le *prix d'exercice* ou *strike* $K$ est une caractéristique fixe du contrat) à la date future $T$ fixée (appelée *maturité* ou *échéance*). Si le taux de change en question vaut $S_t$ à la date $t$, cette assurance revient pour elle à percevoir un montant $\max(S_T - K, 0)$ Euros à maturité.

Deux questions se sont posées aux intervenants de ces marchés : quel est le prix de tel contrat optionnel et quelle attitude adopter lorsqu'on a vendu un tel produit et ainsi endossé le risque – hausse du dollar contre l'euro à maturité – à la place de l'acheteur ? Si Bachelier avait établi dès 1900 dans sa thèse la connexion entre le prix de ce type d'instruments financiers et des calculs probabilistes associés à certains processus stochastiques, la question de la couverture du risque n'a été vraiment résolue qu'avec les travaux de Black, Scholes et Merton en 1973. À l'époque, l'idée de diversification du risque est déjà dans l'air du temps, grâce aux travaux pionniers de Markovitz[2] en 1952 sur l'optimisation de portefeuille : il propose une diversification du risque statique, fondée sur le nombre d'actifs. La problématique est encore différente en assurance de sinistres : la diversification s'appuie sur le nombre d'assurés. Le point de vue novateur de Black, Scholes et Merton, qui constitue encore aujourd'hui la clé de voûte de la finance moderne, consiste à diversifier le risque *sur le temps* (entre aujourd'hui et la maturité), c'est-à-dire à mettre en œuvre une stratégie d'investissement dynamique. Pour le Call sur le taux de change, cela se réalise en achetant ou en vendant des Dollars à chaque instant. Le miracle est complet lorsque Black, Scholes et Merton aboutissent à l'existence d'une stratégie dynamique optimale, qui supprime tous les risques possibles dans tous les scénarii de marché.

Ce pas de géant a rendu possible l'explosion de ces nouveaux marchés sous forme organisée. Le premier d'entre eux s'ouvre à Chicago en 1973 (le CBOT, Chicago BOard of Trade), suivi rapidement par bien d'autres, aux États-Unis d'abord (Philadelphie, ...), puis partout. La France emboîte le pas et crée le MATIF en 1985 (MArché à Terme International de France) puis le MONEP en 1987 (Marché des Options NÉgociables de Paris). Les progrès technologiques (informatique, communications...) et théoriques (mathématiques) ont aussi largement favorisé ces développements spectaculaires, comme nous allons maintenant le montrer.

## 2 Le monde de Black, Scholes et Merton

Pour formaliser la notion de couverture dynamique, conservons l'exemple du taux de change. Le vendeur reçoit de l'acheteur la prime $C_0$ (le prix du produit dérivé), qu'il va investir au cours du temps en dollars. Plus précisément, il en achète une quantité $\delta_t$ à chaque instant $t$, le reste étant non investi (nous supposons ici pour simplifier le raisonnement que le taux d'intérêt, qui rémunère l'argent non investi, c'est-à-dire les liquidités en euro, est nul). Aucun apport extérieur d'argent ne doit intervenir dans sa gestion dynamique : on dira que son portefeuille est autofinancé. Si sa valeur au cours du temps est $(V_t)_{0 \leq t \leq T}$, alors sa variation infinitésimale doit satisfaire

$$V_{t+dt} - V_t = \delta_t \ (S_{t+dt} - S_t) \tag{1}$$

[2]Prix Nobel d' Économie en 1990.

avec la contrainte d'obtenir à maturité ce à quoi il s'est engagé auprès de l'acheteur, à savoir

$$V_T = \max(S_T - K, 0). \tag{2}$$

Arrivé à ce point de l'analyse, il devient important de préciser le modèle stochastique d'évolution du taux de change $(S_t)_{t\geq 0}$. Sans perdre en généralité, il est assez naturel de décomposer son rendement instantané comme la superposition d'une tendance locale et d'un bruit. Samuelson (1960), puis Black, Scholes et Merton (1973) proposent une modélisation de ce dernier à l'aide d'un mouvement brownien $(W_t)_t$, ce qui conduit à une dynamique *infinitésimale* du type

$$\frac{S_{t+dt} - S_t}{S_t} = \mu_t dt + \sigma(W_{t+dt} - W_t). \tag{3}$$

L'amplitude locale du bruit est donnée par le paramètre $\sigma \neq 0$, appelée *volatilité*.

L'idée d'introduire le mouvement brownien pour modéliser l'aléa dans les cours de bourse remonte en fait aux travaux de Bachelier en 1900. Ce processus permet de rendre compte de manière simple de propriétés attendues, comme l'indépendance des accroissements ou l'invariance par changement d'échelle. Enfin, son comportement trajectoriel est très similaire à celui observé en pratique (voir la figure 1).
En fait, la justification rigoureuse des écritures infinitésimales (1) et (3) n'est pas simple, puisque $(W_t)_t$ n'est pas à variation bornée, mais seulement à variation quadratique finie. Le calcul stochastique développé dans les annés 50 par K. Itô permet de résoudre ces questions techniques. Un calcul différentiel peut aussi être développé, avec pour base la formule d'Itô: pour toute fonction $f$ suffisamment régulière, on a

**Encadré 1**. DÉFINITION DU MOUVEMENT BROWNIEN. Le mouvement brownien est un processus gaussien, à accroissements indépendants et stationnaires: son accroissement $W_t - W_s$ $(0 \leq s < t)$ suit une loi gaussienne centrée, de variance $(t - s)$.
BREF HISTORIQUE. C'est en 1827 que le mouvement brownien est associé aux trajectoires très irrégulières (en fait non dérivables dans le temps) de fines particules dans un fluide par le botaniste Robert Brown; en 1900, Louis Bachelier l'utilise pour modéliser la dynamique des cours boursiers, puis Einstein en 1905, pour décrire une particule qui diffuse. Ce n'est qu'en 1923 que Wiener formalise sa construction. C'est le début de recherches mathématiques intensives qui se poursuivent toujours aujourd'hui et irriguent une large part des probabilités modernes.

$$f(t+dt, S_{t+dt}) - f(t, S_t) = \partial_t f(t, S_t)dt + \partial_x f(t, S_t)(S_{t+dt} - S_t) + \frac{1}{2}\sigma^2 S_t^2 \partial^2_{x,x} f(t, S_t)dt. \tag{4}$$

La présence d'un terme supplémentaire faisant apparaître la dérivée seconde de $f$ provient de la variation quadratique finie du mouvement brownien. C'est en quelque sorte la marque de fabrique du calcul différentiel stochastique puisque cette dérivée seconde n'intervient pas dans le calcul différentiel *ordinaire*.

À l'aide de ces outils mathématiques, Black, Scholes et Merton résolvent le problème de couverture de l'option d'achat. En effet, si la valeur du portefeuille associée s'écrit $V_t = C(t, S_t)$, alors en identifiant les équations (1), (2) et (4), on a nécessairement d'une part $\delta_t = \partial_x C(t, S_t)$ et

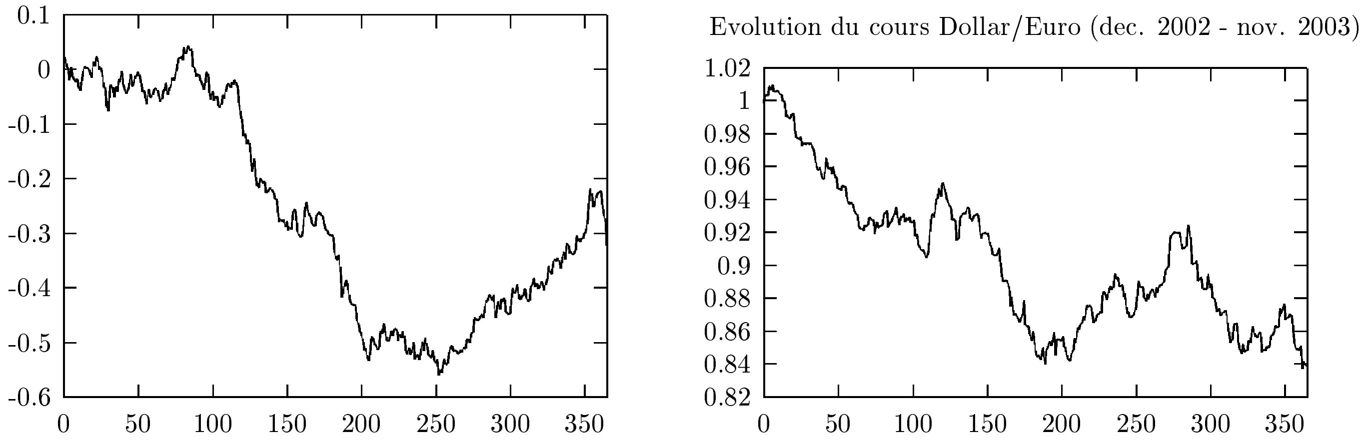


Figure 1: Simulation de trajectoire brownienne (à gauche) et évolution du taux de change Dollar/Euro (à droite): plus que des ressemblances, comme un air de famille...

d'autre part $\partial_t C(t,x) + \frac{1}{2}\sigma^2 x^2 \partial^2_{x,x} C(t,x) = 0, C(T,x) = \max(x-K,0)$. Cette dernière équation aux dérivées partielles se ramène par changement de variables à l'équation de la chaleur dont la solution, bien connue depuis longtemps, est explicite : on obtient ainsi la célèbre formule de Black & Scholes utilisée dans toutes les salles de marché du monde, donnant la valeur $V_0 = C(0, S_0)$ de l'option aujourd'hui. Il est alors remarquable qu'avec la stratégie ci-dessus, le vendeur de l'option parvienne dans tous les scénarii de marché à générer la *cible aléatoire* $\max(S_T - K, 0)$. Il est aussi surprenant de constater que le prix ne dépende du modèle (3) que par l'intermédiaire de la volatilité $\sigma$, et non du rendement local $(\mu_t)_t$.

**Encadré 2**. FORMULE DE BLACK & SCHOLES. Le prix de l'option d'achat de maturité $T$ et de prix d'exercice $K$ est donné par la fonction

$$\begin{cases} C(t,x) = & x\,\mathcal{N}[d_1(x/K,t)] - K\mathcal{N}[d_0(x/K,t)], \\ d_0(y,t) & = \dfrac{1}{\sigma\sqrt{T-t}}\ln(y) - \dfrac{1}{2}\sigma\sqrt{T-t}, \\ d_1(y,t) & = d_0(y) + \sigma\sqrt{T-t}, \end{cases}$$

où $\mathcal{N}$ est la fonction de répartition de la loi normale, centrée réduite. La stratégie de couverture associée est donnée à l'instant $t$ par la proportion $\delta_t = C'_x(t, S_t) = \mathcal{N}[d_1(S_t/K, t)]$ de l'actif risqué.

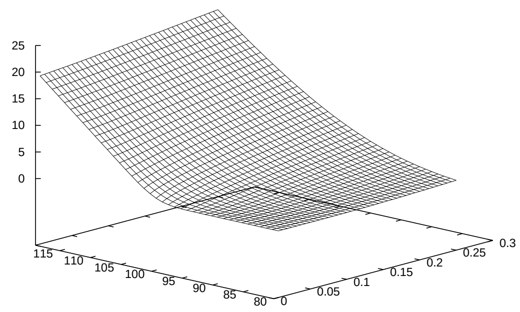


Figure 2: La surface de prix en fonction de $x$ et $T-t$

Reste enfin à comprendre pourquoi le prix de l'option est unique. L'hypothèse d'absence d'opportunité d'arbitrage, fondamentale en finance, va donner la réponse à ce problème : cette hypothèse exprime qu'il n'est pas possible de gagner de l'argent à coup sûr à partir d'un investissement nul. Ainsi pour l'option d'achat évoquée précédemment, si son prix était $V'_0 > V_0$, il suffirait de vendre un tel contrat, puis, avec la prime, de suivre la stratégie $(\delta_t = \partial_x C(t, S_t))_{0 \le t \le T}$ pour finalement générer à coup sûr un profit $V_0' - V_0 > 0$ à partir de rien. Un raisonnement analogue vaut pour $V_0' < V_0$, ce qui montre finalement qu'il y a un prix unique, équitable. Pour cette raison la stratégie $\delta_t$ est appelée stratégie $\delta$-neutre.

Signalons pour terminer que le prix $V_0$ peut s'écrire aussi sous forme d'espérance mathématique, en utilisant la formule de Feynman-Kac liant la solution de l'équation de la chaleur et le mouvement brownien. Cette mise sous forme d'espérance de la valeur de la prime a ouvert la voie à de nombreux calculs explicites dans le cadre du modèle de Black & Scholes, mettant en évidence l'efficacité du calcul stochastique.

## 3 La pratique des marchés

La démarche décrite dans la section précédente, fondée sur la construction d'un portefeuille dynamique $(\delta_t)_{t \in [0,T]}$ *simulant* ou *répliquant* la valeur de l'option à sa maturité, à savoir $\max(S_T - K, 0)$ est au cœur de la modélisation en finance. On montre que ce type de situation se retrouve dans une classe beaucoup plus générale de modèles appelés marchés complets. Pour autant, on pourrait en première analyse s'interroger sur l'intérêt même de cette démarche : à quoi bon déployer tant d'efforts pour établir une formule donnant la valeur d'un contrat d'option à chaque instant de son existence, alors qu'il existe un marché négociable dont la raison d'être est précisément de fixer cette valeur par le jeu de l'offre et de la demande ? La réponse se cache en fait dans l'approche adoptée pour établir la formule. En effet, sans entrer dans le détail du fonctionnement d'un tel marché, il est clair qu'il existe à la maturité des gestionnaires (ou *contreparties*) des contrats d'option, qui *in fine* vont se trouver en face des détenteurs d'options et devront leur livrer la fameuse *cible stochastique* $\max(S_T - K, 0)$ Euros (lorsque $S_T > K$ évidemment). Or que vont faire ces gestionnaires entre la date à laquelle ils ont encaissé la prime (en ayant vendu un contrat d'option) et sa maturité $T$ ? Ils vont tout naturellement gérer en $\delta$-neutre au fil du temps un portefeuille autofinancé constitué de $\delta_t$ actifs risqués $S$ à chaque instant $t$ afin de disposer de façon certaine (donc *sans risque*) de la cible stochastique $\max(S_T - K, 0)$ Euros à la maturité : on parle aussi de portefeuille de couverture. (On fait abstraction ici des coûts de transaction qui constituent la rémunération des acteurs du marché.) Ils s'appuient pour ce faire sur la formule explicite donnant $\delta_t$ dans le modèle de Black & Scholes (cf. encadré 2) La formule précise importe peu ici, en revanche le point essentiel est la présence du paramètre de volatilité $\sigma$. Ce paramètre n'est pas observable instantanément sur le marché, il faut donc l'en "extraire" par une voie ou une autre. L'une, naturelle mais ignorée par les financiers, est d'estimer $\sigma$ statistiquement à partir de l'observation des cours. Cela a sûrement à voir avec leur culture. Mais pas seulement : en fait les financiers ont beaucoup plus confiance dans le marché que dans le modèle. Forts de cette conviction, ils *inversent* le problème. La formule de Black & Scholes donnant le prix de l'option d'achat est (cf. encadré 2) fonction de paramètres connus à l'instant $t$ – *i.e.* $t$, $S_t$, $K$, $T$ – et d'un paramètre inconnu : la volatilité $\sigma$. On vérifie sans peine que la formule de Black & Scholes est une fonction strictement croissante et continue de $\sigma$, bijective sur l'ensemble des valeurs *a priori* possibles de l'option. Les gestionnaires utilisent alors le prix de marché pour extraire numériquement la *volatilité implicite*, unique solution à l'instant $t$ de l'équation

$$C(t, S_t, T, K, \sigma_{\text{impl}}) = \text{Prime cotée}(t, K, T) \qquad \text{(pour une cotation de l'actif } S_t).$$

Si le modèle de la dynamique de l'action était adéquat, $\sigma_{\text{impl}}$ vaudrait toujours $\sigma$ au fil du temps, pour tous les prix d'exercice $K$. En pratique, il n'en est rien : la volatilité implicite varie non seulement avec le temps $t$, mais aussi selon les prix d'exercice $K$ ! Ce phénomène est connu sous le nom de <u>smile de volatilité</u>, la courbe

$$K \mapsto \sigma_{\text{impl}}(t, K)$$

ayant dans certaines configurations de marchés la forme vaguement parabolique d'un sourire(voir la figure ci-contre).

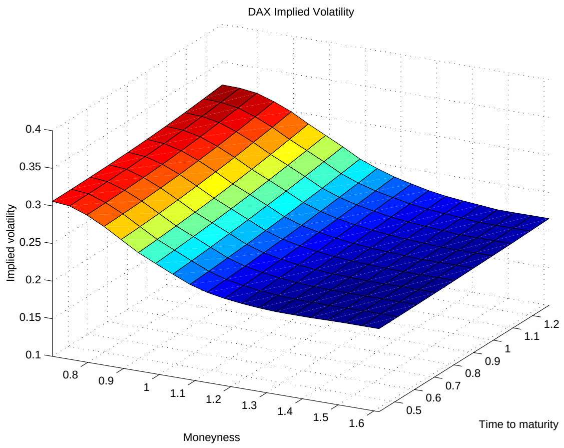


Figure 3: Surface de volatilité implicite en fonction de $K/S_0$ et $T - t$.

Une fois extraite $\sigma_{\text{impl}}(t, K)$ du prix de marché par inversion numérique de la formule de Black & Scholes, le gestionnaire ayant vendu des options va ajuster son portefeuille de couverture en acquérant de l'actif sous-jacent sur le marché, pour chacune des options de sous-jacent $S$, de prix d'exercice $K$ et de maturité $T$ dont il est contrepartie, exactement $\delta_t(S_t, \sigma_{\text{impl}}(t, K))$ actifs risqués.

Vu sous cet angle, on constate qu'un marché d'options négociables est donc un marché de la volatilité de l'actif sous-jacent à l'option. On observe là le comportement très pragmatique des agents face à l'inadéquation d'un modèle, plébiscité par ailleurs dès sa naissance pour sa maniabilité calculatoire. Dans un premier temps divers travaux ont confirmé le caractère qualitativement *robuste* du modèle de Black & Scholes : si le paramètre de volatilité $\sigma$ est non plus constant mais aléatoire tout en restant compris entre deux bornes $\sigma_{\min}$ et $\sigma_{\max}$, alors les modèles de Black & Scholes de paramètres $\sigma_{\min}$ et $\sigma_{\max}$ encadrent les primes d'options du modèle général [KJPS98]. Mais de telles considérations qualitatives ne pouvaient satisfaire longtemps des utilisateurs que le krach de 1987 puis la crise asiatique de 1997 avaient rendu à chaque fois plus sensibles aux risques inhérents à la gestion des produits dérivées. L'idée a donc germé de mettre en place des modèles plus riches en paramètres, essentiellement en considérant la volatilité $\sigma$ non plus comme un paramètre déterministe, mais comme un processus aléatoire lui-même régi par un certain nombre de paramètres (voir plus bas). Les financiers entreprennent ensuite de caler – ils préfèrent l'anglicisme *calibrer* – sur les prix de marchés les plus liquides en tirant partie du plus grand nombre de degrés de liberté du modèle. Cela se fait généralement *via* la *nappe de volatilité implicite* $(K, T) \mapsto \sigma_{\text{impl}}(t, K, T)$ (juxtapositions de smiles de volatilité pour les maturités présentes dans le portefeuille), toujours par inversion de la formule de Black & Scholes : on détermine ainsi les paramètres du modèle “enrichi” permettant de reproduire au mieux cette nappe. C'est une façon de caler les paramètres à partir des primes d'option cotées sur le marché dans un univers compatible avec l'intuition et le mode de communication des praticiens, essentiellement fondés sur la volatilité. Une fois ces paramètres déterminés, il ne reste plus qu'à calculer les couvertures attachées aux options contenues dans le portefeuille et, si nécessaire, les prix d'options non cotées, généralement exotiques (voir plus bas). Il est alors également possible de se projeter plus avant dans l'avenir en calculant par simulation informatique ou par des méthodes d'équations aux dérivées partielles, la structure probabiliste du portefeuille, dans une semaine ou dans un mois, notamment la probabilité de sortir d'une certaine épure fixée à l'avance : c'est l'objet de la value at risk (calcul de risque) [ADEH99].

Pour enrichir le modèle de dynamique de l'actif risqué, tout l'arsenal probabiliste est appelé à la rescousse: ajout d'une composante de sauts à la dynamique de l'actif, dépendance de la volatilité en la valeur de l'actif ($\sigma = \sigma(S_t)$), modélisation de la dynamique de la volatilité par un processus de diffusion plus ou moins décorrélé au mouvement brownien $W$ qui régit le cours de l'actif, adjonction de sauts au processus de volatilité, etc. L'escalade semble sans fin et sans espoir de fin. À ceci près que si le calage d'un modèle est d'autant plus aisé qu'il dépend de nombreux paramètres, sa stabilité est, elle, inversement proportionnelle à ce foisonnement. Une règle que certains apprennent à leurs dépens lorsque d'un jour à l'autre, les paramètres de calage de la nappe de volatilité varient du tout au tout, entamant quelque peu la confiance en le modèle.

Jusqu'à maintenant, par souci de simplicité nous nous sommes cantonnés au cas très particulier d'une option d'achat sur un actif risqué (ne distribuant pas de dividende). Si ce cadre est historiquement celui qui a vu naître la théorie, il n'est aujourd'hui qu'un exemple parmi d'autres – particulièrement simple – de produit dérivé. En concomitance avec les options d'achat sont nées les options de vente (*Put*), puis diverses combinaisons des deux (options *spread*, *saddle*, *straddle*, *butterfly*, ...) bientôt rejointes par d'innombrables *droits conditionnels* dépendant non plus seulement de la valeur de l'actif risqué à la maturité mais de toute sa trajectoire de cotations entre 0 et $T$ : citons pour mémoire l'option (d'achat) asiatique qui n'est autre qu'une option d'achat sur la moyenne $\frac{1}{T}\int_0^T S_t dt$ des cours entre 0 et $T$, les options barrière(s), sans regret, les cliquets, digitales, etc. Après des années d'euphorie technologique qui ont assuré le bonheur des virtuoses du mouvement brownien et de leurs étudiants, cette déferlante d'*options exotiques* semble se tarir quelque peu depuis le milieu des années 90, l'estimation et la gestion du risque (*value at risk*, etc) prenant peu à peu le pas sur la complicité aussi féconde qu'inattendue entre probabilistes et commerciaux en produits dérivés. Signalons que ces options exotiques ne donnent généralement pas lieu à un marché négociable, mais plutôt à des transactions de gré à gré, y compris en direction des particuliers à travers les grands réseaux de banques de détail.

Si la nature des produits dérivés varie (presque) à l'infini, celle des supports (ou sous-jacents) de ces produits n'est pas en reste, chacun d'entre eux introduisant une spécificité plus ou moins importante dans l'approche générale. Aux taux de change, sont venus se joindre les actions (versant des dividendes), les indices boursiers, les contrats *futures*[3] sur les matières premières. Terminons cette énumération avec une mention toute particulière pour les produits dérivés sur obligations et taux d'intérêt dont l'actif sous-jacent commun est en quelque sorte la courbe des taux aux diverses échéances. Il s'agit d'un domaine d'une importance économique capitale de par les volumes qui s'y échangent et d'une grande complexité en termes de modélisation puisqu'il s'agit de rendre compte

[3]Contrats à terme négociables autrefois très en vogue sur le MATIF parisien jusqu'au milieu des années 90 et aujourd'hui négociés à Francfort (BUND) et à Londres (LIFFE).

des variations non pas d'une action ou d'un panier d'actions mais bien d'un (quasi-)continuum de taux d'intérêt (à 1 jour, 1 mois, 3 mois, 1 an, 3 ans , ..., 30 ans) variant aléatoirement entre eux et dans le temps, de façon plus ou moins corrélée : une sorte de processus aléatoire à valeurs dans un espace de fonctions. Parmi les domaines ayant émergé ou en développement, citons notamment les questions liées à l'optimisation de portefeuille, aux coûts de transaction, aux *hedge funds*,.... Récemment le risque de crédit ou risque de défaut et les différents produits associés ont pris une importance déterminante: il s'agit de se protéger contre le risque associé à des obligations – non paiement des coupons, perte du capital – émises par une entreprise susceptible de faire faillite.

Autre "variable qualitative" propre au monde des options, l'étendue des droits d'exercice; jusqu'ici nous avons évoqué les contrats dits *européens* accordant à leur détenteur le droit de recevoir *à la date* $T$ un flux monétaire égal à $\max(S_T - K, 0)$. Si ce droit est étendu à tout l'intervalle de temps $[0, T]$, c'est-à-dire si l'on peut exercer une et une seule fois à une date $t$ de son choix le droit de recevoir $\max(S_t - K, 0)$, on parle alors d'option américaine. Il s'agit là d'un problème dit d'arrêt optimal induisant pour le détenteur du contrat une prise de décision en environnement aléatoire. La plupart des marchés organisés d'options sur actions, indices ou taux d'intérêt traitent des options américaines.

## 4 Développements mathématiques

Le développement des marchés de produits dérivés dans les années 70 et 80, mais aussi les crises qui les ont secouées à plusieurs reprises ont puissamment contribué à l'épanouissement et au développement de diverses branches des mathématiques appliquées, et en premier lieu des probabilités et du calcul stochastique; le fait le plus marquant à ce jour reste sans doute le basculement brutal du mouvement brownien, de la formule d'Itô et des équations différentielles stochastiques du cénacle des probabilistes les plus purs... aux amphis des écoles de commerce ! L'exemple n'est pas unique mais, à l'époque récente, il est particulièrement spectaculaire. Une autre spécificité notable est liée à la nature même des marchés financiers; activité humaine menée dans l'urgence, en permanente mutation, la modélisation y tient une place à la fois centrale et volatile : ce qui est vrai aujourd'hui peut ne plus l'être demain. Le mathématicien, par nature avide de problèmes, peut y trouver son compte : tout financier est avide de solutions ! Mais l'un et l'autre ne sont pas à l'abri parfois de quelques désillusions car là où le mathématicien s'attachera avant tout à une résolution rigoureuse et exhaustive du problème posé, le financier privilégiera la calculabilité (formules explicites, performances numériques,... ) seule à même de préserver sa réactivité lors de transactions délicates (unité de temps : la seconde).

Les domaines où l'interaction avec la finance a été la plus forte sont clairement les probabilités : calcul stochastique et mouvement brownien dans un premier temps, notamment lors de l'émergence des options exotiques. Puis, peu à peu, la complexité croissante des produits, l'escalade des modèles, la multiplication des indicateurs à calculer pour cerner le risque, ont conduit à des situations où les calculs explicites doivent au moins partiellement céder le pas à des méthodes numériques. Deux grandes familles de méthodes sont disponibles, l'analyse numérique et les probabilités numériques. Chacune de ces deux disciplines peut se résumer en un mot ou presque : équations aux dérivées partielles pour l'une, méthode de Monte Carlo pour l'autre (calcul d'une moyenne par simulation informatique massive de scenarii aléatoires). Si l'analyse numérique, pilier historique des mathématiques appliquées en France, a trouvé là une nouvelle source de problèmes où mettre en œuvre des méthodes à l'efficacité souvent éprouvée, il est clair que les probabilités numériques ont connu avec la finance un essor sans précédent, notamment en ce qui concerne les méthodes de discrétisation de processus (sous l'impulsion de Talay à l'INRIA). La plupart des grands domaines des probabilités sont mis à contribution, jusques et y compris le calcul de Malliavin, venu récemment y jouer un rôle important, et à certains égards inattendu. D'autres champs des probabilités ont connu un véritable bain de jouvence comme toute la théorie de l'arrêt optimal *via* les options américaines, ou l'optimisation, omniprésente de la couverture moyenne-variance à la Föllmer-Sondermann aux innombrables algorithmes de calibration. Le développement des probabilités numériques et de la simulation ne s'est pas fait au détriment d'aspects plus théoriques puisque depuis quelques années, les processus à sauts, plus communément associés aux problèmes de file d'attente et de réseaux, sont aujourd'hui eux aussi utilisés massivement en modélisation financière, généralement dans leurs aspects les plus sophistiqués (*processus de Lévy*).

Enfin, comme c'est souvent le cas dans ce type d'interaction, la modélisation financière en retour a fait émerger des problématiques nouvelles qui se développent de façon essentiellement autonome au sein des probabilités : c'est notamment le cas de questions soulevées par la généralisation de la notion d'arbitrage, soit à des espaces de processus de plus en plus généraux, soit à des modélisations plus réalistes des activités de marché (prise en compte de fourchettes d'achat-vente sur les cotations, bornes diverses sur les marges d'action des gestionnaires, etc).

# 5 Formation

Le développement des mathématiques financières dans les années 80 a eu un impact fort en termes de formation en mathématiques appliquées, essentiellement en probabilités, sous l'impulsion initiale de Nicolas Bouleau, Nicole El Karoui, Laure Elie, ainsi que de Helyette Geman, Jean Jacod, Monique Jeanblanc, Damien Lamberton, Bernard Lapeyre entre autres[4]. Dès la fin des années 80, les premiers cours de calcul stochastique orientés vers la finance sont créés, notamment à l'École Nationale des Ponts et Chaussées. Les universités ne sont pas en reste, notamment sur le campus de Jussieu, et, à la même époque, s'ouvrent des cursus spécialisés en Finance au sein des DEA probabilistes de Paris 6 et de Paris 7. Le succès est foudroyant et ne se dément pas : la première promotion de la filière *Probabilités & Finance* du DEA de Probabilités de Paris 6 comptait cinq diplômés en 1991, celle de 2003 plus de 80. Une dynamique similaire est observée à Paris 7. Aujourd'hui, rien qu'en Ile-de-France, et en se cantonnant spécifiquement à des formations de 3ème cycle universitaire, trois autres formations orientées vers les mathématiques financières se sont développées avec succès : les DEA *Mathématiques Appliquées aux Sciences Économiques* de Paris 9 et *Analyse & Systèmes aléatoires* à Marne-la-Vallée, le DESS *Ingénierie financière* à Évry-Val-d'Essonne. Toutes font bénéficier les étudiants des points forts reconnus de leurs équipes de recherche locales (modélisation, calcul stochastique, probabilités numériques, économétrie, statistique...). On peut évaluer à plus de 150

[4] la liste n'est pas exhaustive et nous nous excusons auprès de ceux que nous ne citons pas.

les étudiants diplômés chaque année par ces seules formations franciliennes. Du côté des écoles d'ingénieurs, outre l'École Polytechnique, l'ENPC, l'ENSAE ou Sup'Aéro, très en pointe dans ce domaine, de nombreuses filières spécialisées en mathématiques financières fleurissent et l'on peut ainsi évaluer à environ 15% la proportion de polytechniciens accédant chaque année aux métiers de la Finance *via* leurs compétences mathématiques.

L'impact des mathématiques financières s'observe aussi au sein de filières non prioritairement mathématiques. Notamment dans les programmes de formations plus anciennes couronnant généralement des études en Économie ou en gestion (DEA *Banques & Finance* à Paris 1, *203* à Paris 9, les formations d'actuariat comme celle de Lyon 2 ou de l'ENSAE,...) ou dans celui d'écoles de commerce comme HEC ou l'ESSEC. À des degrés divers, parfois élevés, parfois plus utilitaires, les mathématiques (pour la Finance s'entend...) y prennent une place significative.

En conclusion, signalons que l'on observe de plus en plus d'étudiants de second cycle qui poursuivent – voire parfois qui s'échinent à poursuivre – des études de mathématiques dans l'unique but d'accéder ainsi aux métiers de la Finance. Que l'on s'en réjouisse ou qu'on le déplore, le calcul stochastique et, par extension, les probabilités et les mathématiques appliquées sont devenues la voie d'accès de la filière scientifique aux métiers de la finance de marché. À l'heure actuelle, c'est une autoroute, l'avenir dira ce qu'il en est.

## References


[ADEH99] P. Artzner, F. Delbaen, J.M. Eber, and D. Heath. Coherent measures of risk. *Math. Finance*, 9(3):203–228, 1999.

[AP91] F. Aftalion and P. Poncet. *Les futures sur taux d'intérêt :le MATIF*. P.U.F., 1991.

[Bac00] L. Bachelier. *Théorie de la spéculation*. PhD thesis, Ann. Sci. École Norm. Sup., 1900.

[BK98] N.H. Bingham and R. Kiesel. *Risk-neutral valuation*. Springer Finance. Springer-Verlag London Ltd., London, 1998. Pricing and hedging of financial derivatives.

[BS73] F. Black and M. Scholes. The pricing of options and corporate liabilities. *J. Polit. Econ.*, 81:637–654, 1973.

[CR85] J. Cox and M. Rubinstein. *Options Markets*. Prentice Hall, 1985.

[CRR79] J.C. Cox, S.A. Ross, and M. Rubinstein. Option pricing: a simplified approach. *Journal of Financial Econmics*, 7:229–263, 1979.

[DJ03] R.A. Dana and M. Jeanblanc. *Financial markets in continuous time*. Springer Finance. Springer-Verlag, Berlin, 2003. Translated from the 1998 French original by Anna Kennedy.

[DS98] F. Delbaen and W. Schachermayer. The fundamental theorem of asset pricing for unbounded stochastic processes. *Math. Ann.*, 312(2):215–250, 1998.

[Duf94] D. Duffie. *Modèles dynamiques d'évaluation*. P.U.F., 1994.

[FS02] H. Föllmer and A. Schied. *Stochastic finance*, volume 27 of *de Gruyter Studies in Mathematics*. Walter de Gruyter & Co., Berlin, 2002. An introduction in discrete time.

[HK79] J.M. Harrison and D.M. Kreps. Martingales and arbitrage in multiperiod securities markets. *J. Econom. Theory*, 20(3):381–408, 1979.

[HP81] J.M. Harrison and S.R. Pliska. Martingales and stochastic integrals in the theory of continuous trading. *Stochastic Process. Appl.*, 11(3):215–260, 1981.

[Hul03] J.C. Hull. *Options, futures, and other derivatives. 5th ed.* Prentice-Hall International Editions. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall., 2003.

[KJPS98] N. El Karoui, M. Jeanblanc-Picqué, and S.E. Shreve. Robustness of the Black and Scholes formula. *Math. Finance*, 8(2):93–126, 1998.

[KS91] I. Karatzas and S.E. Shreve. *Brownian motion and stochastic calculus.* Second Edition, Springer Verlag, 1991.

[KS98] I. Karatzas and S.E. Shreve. *Methods of mathematical finance.* Springer-Verlag, New York, 1998.

[Lip01] A. Lipton. *Mathematical methods for foreign exchange.* World Scientific Publishing Co. Inc., River Edge, NJ, 2001. A financial engineer's approach.

[LL97] D. Lamberton and B. Lapeyre. *Introduction au calcul stochastique appliqué à la finance.* Ellipses Édition Marketing, Paris, second edition, 1997.

[Mer73] R.C. Merton. Theory of rational option pricing. *Bell J. Econom. and Management Sci.*, 4:141–183, 1973.

[MP02] D. Madan and S.R. Pliska, editors. *Mathematical finance—Bachelier Congress 2000.* Springer Finance. Springer-Verlag, Berlin, 2002. Selected papers from the 1st World Congress of the Bachelier Finance Society held in Paris, June 29–July 1, 2000.

[MR98] M. Musiela and M. Rutkowski. *Martingale methods in financial modelling.* Springer Verlag, 1998.

[PPH96] P. Poncet, R. Portait, and S. Hayat. *Mathématiques financières.* Dalloz, 1996. 2nd édition.

[RT97] L. C. G. Rogers and D. Talay, editors. *Numerical methods in finance.* Publications of the Newton Institute. Cambridge University Press, Cambridge, 1997.

[SAB04] W.F. Sharpe, G.J. Alexander, and J.V. Baley. *Investments. 6th ed.* Prentice-Hall International Editions. Upper Saddle River, NJ: Prentice Hall., 2004.

[Sch03] W. Schachermayer. *Lectures on probability theory and statistics. École d'été de probabilités de Saint-Flour XXX – 2000.*, chapter Introduction to the mathematics of financial markets. Lecture Notes in Mathematics. 1816. Berlin: Springer., 2003.