 Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Devoir maison

À rendre individuellement le vendredi 6 novembre à 14h (rendu papier ou rendu électronique). Les questions ne sont pas classées par ordre croissant de difficulté.

Exercice 1.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires réelles intégrables sur le même espace de probabilité.

(1) Montrer que si pour toute extraction ϕ il existe une extraction ψ telle que $(X_{\phi\circ\psi(n)})_{n\geq 1}$ converge dans L_1, alors $(X_n)_{\geq 1}$ est uniformément intégrable.

(2) La réciproque est-elle vraie ?

Exercice 2.

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires définies sur le même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$ et à valeurs dans un espace polonais (E, d).

(1) (a) Montrer que si la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi, alors pour toute extraction ϕ, pour presque tout $\omega \in \Omega$ il existe une extraction ψ_ω telle que la suite $(X_{\phi(\psi_\omega(n))}(\omega))_{n\geq 1}$ converge.

(b) La réciproque est-elle vraie ?

(2) On suppose que la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ est à valeurs dans un compact K et que les variables aléatoires $(X_n)_{n\geq 1}$ sont indépendantes. Montrer qu'il existe un élement (déterministe) $x \in K$ tel que pour presque tout $\omega \in \Omega$, il existe une extraction ϕ_ω telle que la suite $(X_{\phi_\omega(n)}(\omega))_{n\geq 1}$ converge vers x.

(3) Est-il vrai que si la suite $(X_n)_{n\geq 1}$ converge en loi, alors pour toute extraction ϕ, il existe une extraction ψ telle que la suite $(X_{\phi(\psi(n))})_{n\geq 1}$ converge presque sûrement ?

Problème

Dans tout le problème, il est possible d'admettre le résultat d'une question pour l'utiliser dans une question ultérieure.

Première partie. Si μ et ν sont deux mesures de probabilité sur un espace métrique E muni de sa tribu borélienne $\mathcal{B}(E)$, leur distance en variation totale est définie par

$$\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(\mu, \nu) = \sup_{A\in\mathcal{B}(E)} |\mu(A) - \nu(A)|.$$

(1) Montrer que si $\mathrm{d}_{\mathrm{VT}}(\mu_n, \mu) \to 0$, alors $\mu_n \Rightarrow \mu$. La réciproque est-elle vraie ?

(2) Soit ρ une mesure finie sur $(E, \mathcal{B}(E))$ telle que μ et ν soient absolument continues par rapport à ρ. On note $f = \frac{d\mu}{d\rho}$ et $g = \frac{d\nu}{d\rho}$, $\lambda = \mu - \nu$ et $h = f - g$.

(a) Montrer que pour tout $A \in \mathcal{B}(E)$ on a $|\lambda(A)| = \frac{1}{2}\left(\left|\int_A h d\rho\right| + \left|\int_{A^c} h d\rho\right|\right)$.

(b) Montrer que $\mathrm{d_{VT}}(\mu,\nu) = \frac{1}{2}\int_E |f-g| d\rho$.

(3) Montrer que
$$\mathrm{d_{VT}}(\mu,\nu) = \frac{1}{2}\sup\{|\mu(F)-\nu(F)| : F : E \to \mathbb{R},\ \text{mesurable}, \|f\|_\infty \leq 1\}.$$

Dans la suite, (E,d) est un espace polonais et $\mathcal{M}_1(E)$ est muni de la topologie de la convergence étroite (par exemple avec la distance d_{LP}) qui en fait un espace polonais.

Deuxième partie.

(4) Montrer qu'un ensemble $\mathcal{A} \subset \mathcal{M}_1(\mathcal{M}_1(E))$ est tendu si et seulement si pour tout $\varepsilon > 0$, il existe un compact $K \subset E$ tel que
$$\forall \Pi \in \mathcal{A}, \qquad \Pi(\{\mu \in \mathcal{M}_1(E) : \mu(K^c) > \varepsilon\}) < \varepsilon.$$

Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires à valeurs dans E. On dit que le vecteur $(X_1,\ldots,X_n)$ est échangeable si pour toute bijection $f : \{1,2,\ldots,n\} \to \{1,2,\ldots,n\}$ les vecteurs $(X_1,\ldots,X_n)$ et $(X_{f(1)},\ldots,X_{f(n)})$ ont même loi.

(5) On pose
$$M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \delta_{X_k}.$$
Vérifier que M_n est bien une variable aléatoire (c'est-à-dire $(\mathcal{M}_1(E),\mathcal{B}(\mathcal{M}_1(E)))$ mesurable) et montrer que la suite $(M_n)_{n\geq 1}$ est tendue.

Troisième partie. Pour une suite $x = (x_i)_{i\geq 1}$ à valeurs dans E, on considère les mesures
$$\mu_{n,k}(x) = \frac{1}{n^k}\sum_{i_1,\ldots,i_k=1}^{n} \delta_{x_{i_1},\ldots,x_{i_k}}, \qquad \nu_{n,k}(x) = \frac{(n-k)!}{n!}\sum_{\substack{i_1,\ldots,i_k=1 \\ \#\{i_1,\ldots,i_k\}=k}}^{n} \delta_{(x_{i_1},\ldots,x_{i_k})}$$
sur E^k.

(6) Montrer que
$$\mathrm{d_{VT}}(\mu_{n,k}(x),\nu_{n,k}(x)) \leq \frac{2k(k-1)}{n}.$$

Quatrième partie. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires à valeurs dans E. On suppose qu'elles sont échangeables, c'est-à-dire que pour toute bijection $f : \mathbb{N}^* \to \mathbb{N}^*$ telle que $\#\{k \geq 1 : f(k) \neq k\} < \infty$ les deux suites $(X_i)_{i\geq 1}$ et $(X_{f(i)})_{i\geq 1}$ ont même loi.

Soit $f_1,\ldots,f_k \in C_b(E)$.

(7) Montrer que
$$\left|\mathbb{E}[f_1(X_1)\cdots f_k(X_k)] - \mathbb{E}\left[\int f_1 \mathrm{d}M_n \cdots \int f_k \mathrm{d}M_n\right]\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0.$$

(8) Montrer qu'il existe une variable aléatoire M à valeurs dans $\mathcal{M}_1(E)$ telle que pour tout $k \geq 1$,
$$\mathbb{E}[f_1(X_1)\cdots f_k(X_k)] = \mathbb{E}\left[\int f_1 \mathrm{d}M \cdots \int f_k \mathrm{d}M\right].$$

Ainsi, il existe une mesure aléatoire M telle que conditionnellement à M, les variables aléatoires $(X_i)_{i\geq 1}$ sont i.i.d. de loi M (c'est le théorème de De Finetti)