 Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

Devoir maison

À rendre individuellement le mardi 8 novembre (rendu papier ou rendu électronique).

Les questions ne sont pas classées par ordre croissant de difficulté.

La précision et la clarté de la rédaction sera prise en compte dans l'évaluation.

Toute question peut être admise et utilisée ultérieurement, à condition de l'indiquer clairement.

Les résultats du cours ou des feuilles d'exercices peuvent être utilisés sans démonstration, à condition de les citer clairement.

Le DM est long et comporte des questions délicates : il est normal de ne pas réussir certaines questions.

* * *

Exercice 1. Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ et X des variables aléatoires à valeurs dans un espace métrique séparable. Pour chaque mode de convergence que vous connaissez, étudier si le fait que toute sous-suite de $(X_n)_{n\geq 1}$ a une sous-suite qui converge vers X implique que X_n converge vers X.

* * *

Exercice 2. Soit μ_n, μ des mesures de probabilité sur $\mathbb{R}$. On note λ la mesure de Lebesgue sur $\mathbb{R}$ et $\phi_\nu(t) = \int e^{itx}\nu(\mathrm{d}x)$ pour une mesure de probabilité ν sur $\mathbb{R}$.

(1) Démontrer que $\mu_n \implies \mu$ si et seulement si la fonction caractéristique de μ_n converge simplement vers la fonction caractéristique de μ pour presque tout point par rapport à la mesure de Lebesgue.

(2) *[Question ouverte : bonus hors barème]* Est-il vrai que $\mu_n \implies \mu$ si et seulement si la fonction caractéristique de μ_n converge simplement sur un ensemble dénombrable dense vers la fonction caractéristique de μ ?

* * *

Exercice 3. Soit (E,d) une espace métrique et (μ_n) une suite de mesures de probabilité sur E. On suppose que pour toute fonction continue bornée $f : E \to \mathbb{R}$ la suite $(\int f \mathrm{d}\mu_n)_{n\geq 1}$ converge.

(1) On suppose que E est compact. Montrer que $(\mu_n)_{n\geq 1}$ converge étroitement.

(2) *[question bonus hors barème]* On suppose que E est polonais. Montrer que $(\mu_n)_{n\geq 1}$ converge étroitement.

* * *

Petit problème 4. Soit (E,d) un espace métrique séparable. On munit $\mathcal{M}_1(E)$ de la distance de Lévy-Prokhorov d_{LP}.

On pourra utiliser le fait suivant (démontré dans les compléments du cours 3) : pour tout $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ et pour tout $\varepsilon > 0$, il existe $f_1, \dots, f_K \in \mathcal{C}_b(E,\mathbb{R})$ et $\delta > 0$ tels que

$$\left\{\nu \in \mathcal{M}_1(E) : \left|\int f_i d\nu - \int f_i d\mu\right| < \delta \text{ pour tout } 1 \leq i \leq K\right\} \subset B(\mu,\varepsilon),$$

où $B(\mu,\varepsilon)$ désigne la boule ouverte dans $\mathcal{M}_1(E)$ centrée en μ et de rayon ε pour d_{LP}.

Soit $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ une mesure de probabilité (déterministe) fixée, et $(M_n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{M}_1(E)$.

Première partie.

(1) Démontrer que les assertions suivantes sont équivalentes :

(a) pour tout $f \in \mathcal{C}_b(E,\mathbb{R})$, $\int f \mathrm{d}M_n \to \int f \mathrm{d}\mu$ dans $L^1(\mathbb{R})$.

(b) M_n converge en loi vers μ (vue comme variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_1(E)$) ;

(c) M_n converge en probabilité vers μ (vue comme variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{M}_1(E)$) ;

(d) pour tout $f \in \mathcal{C}_b(E,\mathbb{R})$, $\int f \mathrm{d}M_n$ converge en probabilité vers $\int f \mathrm{d}\mu$;

(e) lorsque $E = \mathbb{R}$, en notant $\Phi_n(t) = \int e^{itx} M_n(\mathrm{d}x)$ et $\Phi(t) = \int e^{itx}\mu(\mathrm{d}x)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$, il existe $\delta > 0$ tel que $\sup_{|t|\leq\delta} |\Phi_n(t) - \Phi(t)|$ converge en probabilité vers 0 et $\Phi_n(t)$ converge en probabilité vers $\Phi(t)$ pour tout $t \in \mathbb{R}$.

(2) On suppose dans cette question que $E = \mathbb{R}$ et que μ est caractérisée par ses moments.

(a) On suppose que pour tout $k \geq 1$, $\int x^k \mathrm{d}M_n$ converge en probabilité vers $\int x^k \mathrm{d}\mu$. Montrer que M_n converge en loi vers μ.

(b) On suppose que pour tout $k \geq 1$, $\mathbb{E}[\int x^k \mathrm{d}M_n]$ converge vers $\int x^k \mathrm{d}\mu$ et que $\mathrm{Var}(\int x^k \mathrm{d}M_n) \to 0$. Montrer que M_n converge en loi vers μ.

Deuxième partie. On suppose dans la suite que les variables aléatoires $(M_n)_{n\geq1}$ sont définies sur un même espace de probabilité $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$.

(3) Démontrer que les quatre assertions suivantes sont équivalentes :

(a) pour presque tout $\omega \in \Omega$, M_n converge étoitement vers μ ;

(b) pour presque tout $\omega \in \Omega$, pour tout $f \in \mathcal{C}_b(E,\mathbb{R})$, $\int f \mathrm{d}M_n \to \int f \mathrm{d}\mu$;

(c) pour tout $f \in \mathcal{C}_b(E,\mathbb{R})$, pour presque tout $\omega \in \Omega$, $\int f \mathrm{d}M_n \to \int f \mathrm{d}\mu$;

(d) lorsque $E = \mathbb{R}$, pour tout $t \in \mathbb{R}$, on a presque sûrement $\int e^{itx} \mathrm{d}M_n(\mathrm{d}x) \to \int e^{itx}\mu(\mathrm{d}x)$.

(4) On suppose dans cette question que $E = \mathbb{R}$ et que μ est caractérisée par ses moments. On suppose que pour tout $k \geq 1$, $\int x^k \mathrm{d}M_n$ converge pour presque tout $\omega \in \Omega$ vers $\int x^k \mathrm{d}\mu$. Montrer que pour presque tout $\omega \in \Omega$, M_n converge étroitement vers μ.

(5) Soit $(X_n)_{n\geq1}$ une suite de variables aléatoires i.i.d. de loi μ. Que dire du comportement, lorsque $n \to \infty$, de $M_n = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^n \delta_{X_k}$?

* * *

Petit problème 5.

Première partie. Soit (E,d) un espace métrique séparable et $(x_n)_{n\geq1}$ une suite dense. On note $\mathcal{M}_1(E)$ l'ensemble des mesures de probabilité sur E muni de sa tribu borélienne, et $\mathrm{Lip}_1(E)$ l'ensemble des fonctions de E dans $\mathbb{R}$ 1-lipschitziennes (c'est-à-dire telles que $d(f(x), f(y)) \leq |x-y|$ pour tous $x, y \in E$).

Soit $\mu_n, \mu \in \mathcal{M}_1(E)$. L'objectif de cette partie est de montrer que $\mu_n \implies \mu$ si et seulement si $\int f \mathrm{d}\mu_n \to \int f \mathrm{d}\mu$ pour toute fonction f de la forme

$$f(x) = \max(c_0, c_1 - d(x,x_1), \ldots, c_n - d(x,x_n))$$

avec $n \geq 1$ et $c_0, \ldots, c_n \in \mathbb{R}$.

Igor Kortchemski – igor.kortchemski@polytechnique.edu

(1) Justifier l'implication.

(2) Vérifier que pour montrer que $\mu_n \implies \mu$ il suffit de vérifier que $\int f \mathrm{d}\mu_n \to \int f \mathrm{d}\mu$ pour toute fonction $f \in \mathrm{Lip}_1(E)$ bornée.

(3) Démontrer la réciproque.
Indication. Pour $f \in \mathrm{Lip}_1(E)$ bornée telle que $f \geq c_0$, on pourra vérifier que pour tout $x \in E$ on a

$$f(x) = \sup_{n \geq 1} \max(c_0, f(x_n) - d(x, x_n)).$$

(4) Si E est borné (c'est-à-dire si $\sup_{x,y \in E} d(x,y) < \infty$), montrer que $\mu_n \implies \mu$ si et seulement si $\int f \mathrm{d}\mu_n \to \int f \mathrm{d}\mu$ pour toute fonction $f(x)$ polynomiale en les variables $d(x,x_1), \ldots, d(x,x_n)$ pour tout $n \geq 1$.

Deuxième partie. Considérons l'ensemble E des fonctions mesurables de $[0,1] \to \mathbb{R}$, considérées à égalité presque partout près (c'est-à-dire qu'on identifie deux fonctions égales presque partout) muni de la distance

$$\mathrm{d}(f,g) = \int_0^1 \min(1, |f(t) - g(t)|) \mathrm{d}t. \tag{1}$$

(5) En notant λ la mesure de Lebesgue, montrer que $f_n \to f$ dans E si et seulement pour tout $\varepsilon > 0$ on a $\lambda(\{x \in [0,1] : |f_n(x) - f(x)| \geq \varepsilon\}) \to 0$ quand $n \to \infty$.

(6) On suppose que $f_n \to f$ dans E. Montrer qu'on peut trouver une extraction ϕ telle que $f_{\phi(n)}$ converge presque partout vers f.

(7) Démontrer que E est polonais.

Troisième partie. Considérons l'espace métrique $\mathcal{C}$ des fonctions continues de $[0,1] \to \mathbb{R}$ muni de la distance d définie par (1).

(8) Vérifier que $(\mathcal{C}, d)$ est séparable et borné. Est-il complet ? Justifier votre réponse.

Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ des variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{C}$ et X une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{C}$.

(9) Démontrer que si X_n converge en loi vers X, alors pour tout $k \geq 1$, si $(U_i)_{1 \leq i \leq k}$ sont i.i.d. uniformes sur $[0,1]$ (aussi indépendantes de X_n, X) on a la convergence en loi de $(X_n(U_1), \ldots, X_n(U_k))$ vers $(X(U_1), \ldots, X(U_k))$.

(10) On suppose que les marginales fini-dimensionnelles de X_n convergent en loi vers celles de X. Démontrer que X_n converge en loi vers X.

(11) *[Question bonus hors barème]* Démontrer que X_n converge en loi vers X si et seulement si, pour tout $k \geq 1$, en notant $V_1^k, \ldots, V_k^k$ le réarrangement croissant de k variables aléatoires i.i.d. uniformes sur $[0,1]$ (aussi indépendantes de X_n et X) on a la convergence en loi de $(X_n(V_1^k), \ldots, X_n(V_k^k))$ vers $(X(V_1^k), \ldots, X(V_k^k))$.