

Cours 10: Mesures aléatoires de Poisson, 2/2

Rappelons le cadre: $(\Omega, \mathcal{F}, \mathbb{P})$, (E, \mathcal{E}) et (F, \mathcal{F}) désigneront deux espaces mesurés tels que $\forall x \in E, \exists z \in \mathcal{E}$ et $\forall y \in F, \exists \gamma \in \mathcal{F}$.

• $\mathcal{M}_{\text{atom}}(E) = \{ \mu \text{ mesure de la forme } \sum_{i \in I} \delta_{x_i} \text{ avec } I \text{ au plus dénombrable et } x_i \in E \forall i \in I \}$
muni de la plus petite tribu pour laquelle les $\mathcal{M}_{\text{atom}}(E) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{ \infty \}$
 $\mu \mapsto \mu(A)$
sont mesurables pour tout $A \in \mathcal{E}$.

- μ est σ -finie si $\mu = \sum_{i \in I} \mu_i$ avec I au plus dénombrable et μ_i finie $\forall i \in I$.
- Une mesure aléatoire de poisson d'intensité $\mu \in \mathcal{M}_0(E)$ est une variable aléatoire M à valeurs dans $\mathcal{M}_{\text{atom}}(E)$ telle que :

- $\forall A \in \mathcal{E}, M(A) \sim \mathcal{P}(\mu(A))$

- $\forall A_1, \dots, A_k \in \mathcal{E}, M(A_1), \dots, M(A_k)$ sont indépendants.

Plan: 1) Formules de Campbell

2) Transformations de nuages poissoniens

3) Nuages de Poisson avec paramètre temporel.

4) Formule de Palm

Commençons d'abord avec une remarque concernant l'énumération des atomes.

Remarque facultative • Il n'est pas toujours possible d'énumérer les atomes de $\mu \in \mathcal{M}_{\text{atom}}(E)$ de manière mesurable.

En effet, soit $E = [0,1]$ et supposons par l'absurde qu'il existe des applications mesurables $\pi_i: \mathcal{M}_{\text{atom}}(E) \rightarrow E$ et $L: \mathcal{M}_{\text{atom}}(E) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\}$

$$\forall \mu \in \mathcal{M}_{\text{atom}}(E), \quad \mu = \sum_{i=1}^{L(\mu)} \int \pi_i(\mu)$$

Soit λ la mesure de Lebesgue sur $[0,1]$ et $\mu = \sum_{i=1}^{\infty} \lambda \in \mathcal{M}_S([0,1])$.

Ainsi $\mu(A) = 0 \Leftrightarrow \lambda(A) = 0$ et $\mu(A) = \infty \Leftrightarrow \lambda(A) > 0$.

Soit M un nuage poissonien d'intensité μ . Ainsi, $\forall A \in \mathcal{B}([0,1])$

ps $M(A) = 0$ ou ∞ . Ainsi $2M \stackrel{\text{la}}{=} M$ et on vérifie que $M \perp M$. Alors

$$(\pi_i(2M))_{i \geq 1} \perp (\pi_i(2M))_{i \geq 1}$$

Puisque μ est sans atome, $\forall i \geq 1, \forall x \in [0,1], \mathbb{P}(\pi_i(2M) = x) = 0$.

Par Fubini, $\forall i \neq j, \mathbb{P}(\pi_i(2M) = \pi_j(2M)) = 0$.

Donc $\mathbb{P}(\forall i \neq j, \pi_i(2M) \neq \pi_j(2M)) = 1$, absurde.

\rightarrow il faut des hypothèses additionnelles de "finitude"

• Si E est un sous-ensemble mesurable d'un espace métrique polonais, en notant $\mathcal{M}_{\text{atom}}^{<\infty}(E)$ les mesures finies de $\mathcal{M}_{\text{atom}}(E)$,

il est possible de numérotier de manière mesurable les atomes des mesures de $\mathcal{M}_{\text{atom}}^{<\infty}(E)$ (Proposition 6.2 dans Lart & Penrose)

On en déduit que si M est un nuage poissonien d'intensité μ σ -finie sur E polonais, alors on peut écrire

$$M = \sum_{i=1}^{L(M)} \int \pi_i(M) \quad \text{avec } L \text{ et } \pi_i \text{ mesurables,}$$

(cf Corollary 6.5 dans Lart & Penrose)

1) Formules de Campbell (additive, exponentielle)

Dans toute cette partie, $\mu \in \mathcal{U}_s(E)$ est fixé et M est un noyau poissonien d'intensité μ , avec un espace mesuré (E, \mathcal{E}) quelconque

Théorème (formule additive)

- 1) (cas positif) Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable. Alors la v.a. $M(f) = \int_E f(x) M(dx)$ a pour espérance $\mathbb{E}[M(f)] = \int_E f(x) \mu(dx)$
- 2) (cas intégrable) Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$, μ -intégrable. Alors la v.a. $M(f) = \int_E f(x) M(dx)$ est intégrable, et $\mathbb{E}[M(f)] = \int f(x) \mu(dx)$

Preuve 1) On écrit $f \geq 0$ comme limite croissante de fonctions étagées $f_n = \sum_{i=1}^{n_h} c_i \mathbb{1}_{A_i}$

$$\text{En particulier } \mathbb{E}[M(f_n)] = \sum_{i=1}^{n_h} c_i \mu(A_i) = \mu(f_n)$$

Puis, $M(f_n) \uparrow M(f)$. Donc $M(f)$ est mesurable et par convergence

$$\text{monotone } \mathbb{E}[M(f)] = \mu(f)$$

2) On écrit $f = f^+ - f^-$ et on applique 1) avec f^+ et f^-

Théorème (formule exponentielle)

1) (cas positif) Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable. On a

$$\mathbb{E}[e^{-M(f)}] = \exp\left(-\int_E \mu(dx) (1 - e^{-f(x)})\right).$$

2) (cas intégrable) Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ μ -intégrable. On a

$$\mathbb{E}[e^{iM(f)}] = \exp\left(\int_E \mu(dx) (e^{if(x)} - 1)\right)$$

Preuve: 1) On écrit $f \geq 0$ comme limite croissante de fonctions étagées $f_n = \sum_{i=1}^{N_n} c_i \mathbb{1}_{A_i}$ avec $(A_i)_{i \geq 1}$ disjoints. Alors $M(f_n) = \sum_{i=1}^{N_n} c_i N(A_i)$ est une combinaison linéaire de v.a de Poisson $\mathbb{1}$, et on conclut en utilisant la forme de la transformée de Laplace d'une v.a de Poisson et convergence monotone

2) On écrit $f = \lim_{n \rightarrow \infty} f_n$ avec $f = f^+ - f^-$, $f_n = f_n^+ - f_n^-$, $0 \leq f_n^+ \uparrow f^+$, $0 \leq f_n^- \uparrow f^-$ et f_n^+, f_n^- étagées. Comme en 1), un calcul explicite donne

$$\mathbb{E}[e^{iM(f_n)}] = \exp\left(\int_E \mu(dx) (e^{if_n(x)} - 1)\right).$$

Mais d'une part, $\exp\left(\int_E \mu(dx) (e^{if_n(x)} - 1)\right) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} \exp\left(\int_E \mu(dx) (e^{if(x)} - 1)\right)$ par convergence dominée, en utilisant $|e^{if_n(x)} - 1| \leq |f_n(x)| = f_n^+ + f_n^- \leq f^+ + f^- = |f|$.

D'autre part, $M(f_n) = M(f_n^+) - M(f_n^-)$, et $M(f_n^+) \uparrow M(f^+)$ et $M(f_n^-) \uparrow M(f^-)$ par convergence monotone.

Donc $M(f_n) \xrightarrow{n \rightarrow \infty} M(f)$.

Comme $e^{iM(f_n)} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} e^{iM(f)}$ par convergence dominée, ce qui conclut.

2

Remarque importante la formule exponentielle permet une caractérisation

"à la Laplace" des mesures de Poisson: si N est une v.a à valeurs dans $\mathcal{M}_{\text{atom}}(E)$

telle que $\mathbb{E}[e^{-N(f)}] = \exp\left(-\int_E \mu(dx) (1 - e^{-f(x)})\right)$ pour $f \geq 0$ ou

$\mathbb{E}[e^{iN(f)}] = \exp\left(\int_E \mu(dx) (e^{if(x)} - 1)\right)$ pour $f: E \rightarrow \mathbb{R}$ μ intégrable,

alors N est un nuage poissonien d'intensité μ

(prendre simplement $f = \sum_{i=1}^n c_i \mathbb{1}_{A_i}$ avec $(A_i)_{1 \leq i \leq n}$ disjoints)

Pour $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable, d'après la formule additive $\mathbb{E}[\int f(x) M(dx)] < \infty \Leftrightarrow \int f d\mu < \infty$

Le résultat suivant donne une CNS pour $\int f(x) M(dx) < \infty$ p.s.

Proposition Soit $f: E \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable. On a l'alternative:

(a) Si $\int_E \min(1, f) d\mu < \infty$, alors p.s. $\int_E f(x) M(dx) < \infty$

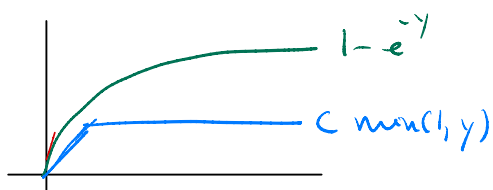
(b) Si $\int_E \min(1, f) d\mu = \infty$, alors p.s. $\int_E f(x) M(dx) = \infty$

Preuve: On remarque que pour $x \in [0, \infty]$, $x < \infty \Leftrightarrow \lim_{\lambda \rightarrow 0} e^{-\lambda x} = 1$

$$\begin{aligned} \text{Ainsi, } \mathbb{P}\left(\int f(x) M(dx) < \infty\right) &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \mathbb{E}\left[e^{-\lambda \int f(x) M(dx)}\right] \\ &= \lim_{\lambda \rightarrow 0} \exp\left(-\int \mu(dx) (1 - e^{-\lambda f(x)})\right) \quad (\text{formule expo}) \end{aligned}$$

(1) Si $\int_E \min(1, f) d\mu < \infty$, pour $\lambda \leq 1$ on a $1 - e^{-\lambda f(x)} \leq \min(1, f)$ et le résultat s'écrit par convergence dominée

(2) Si $\int_E \min(1, f) d\mu = \infty$, on remarque que $C \min(1, y) \leq 1 - e^{-y}$



pour une certaine constante $C (= 1 - e^{-1})$

$$\text{Ainsi, pour } \lambda < 1, \int \mu(dx) (1 - e^{-\lambda f(x)}) \geq C \int \mu(dx) \min(1, \lambda f) \geq \lambda C \int \mu(dx) \min(1, f) = \infty$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}\left(\int f(x) M(dx) < \infty\right) = 0$$

2) Transformations de nuages poissoniens

Proposition (stabilité par image)

Soit M un nuage poissonien d'intensité μ s-finie sur (E, \mathcal{E}) et $f: (E, \mathcal{E}) \rightarrow (F, \mathcal{F})$ mesurable. Alors $f_*(M)$ est un nuage poissonien d'intensité $f_*\mu$ sur F .

Preuve: Tout d'abord vérifions que f_* est $\mathcal{M}_{\text{atom}}(E) \rightarrow \mathcal{M}_{\text{atom}}(F)$ et

$$\sum_{i \in I} \delta_{x_i} \mapsto \sum_{i \in I} \delta_{f(x_i)}$$

qu'elle est mesurable.

• Pour $B \in \mathcal{F}$, on a bien $(\sum_{i \in I} \delta_{f(x_i)})(B) = \#\{i \in I : x_i \in f^{-1}(B)\} = (\sum_{i \in I} \delta_{x_i})(f^{-1}(B))$

• On a pour $B \in \mathcal{F}, k \geq 0$:

$$\begin{aligned} f_*^{-1}(\{ \nu \in \mathcal{M}_{\text{atom}}(F) : \nu(B) = k \}) &= \{ \mu \in \mathcal{M}_{\text{atom}}(E) : f_*\mu(B) = k \} \\ &= \{ \mu \in \mathcal{M}_{\text{atom}}(E) : \mu(f^{-1}(B)) = k \}, \end{aligned}$$

mesurable

Ainsi, $f_*(M) \in \mathcal{M}_{\text{atom}}(F)$, et si $B \in \mathcal{F}$,

$$f_*(M)(B) = M(f^{-1}(B)) \sim \mathcal{P}(\mu(f^{-1}(B))) \sim \mathcal{P}(f_*\mu)$$

Par ailleurs, si $B_1, \dots, B_k \in \mathcal{F}$ sont disjoints, $f^{-1}(B_1), \dots, f^{-1}(B_k)$ sont disjoints, donc les $f_*(M)(B_i) = M(f^{-1}(B_i))$ sont II.

~

Remarque Un autre avantage de travailler avec des mesures s-finies ici plutôt que σ -finies est que l'image d'une mesure σ -finie n'est en général pas σ -finie.

Proposition (Stabilité par marquage)

On suppose que $M = \sum_{k=1}^L \delta_{X_k}$ avec $L \in \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ et $X_k \in E$ des variables aléatoires et un nuage poissonien d'intensité $\mu \in \mathcal{M}_s(E)$.

Soit $(Y_i)_{i \geq 1}$ des v.a iid dans (F, \mathcal{F}) de loi μ' , indépendantes de (L, X_1, X_2, \dots)

Alors $\tilde{M} = \sum_{k=1}^L \delta_{(X_k, Y_k)}$ est un nuage poissonien dans $E \times F$ d'intensité $\mu \otimes \mu'$

Preuve: Soit $f: E \times F \rightarrow \mathbb{R}_+$ mesurable. On calcule:

$$\mathbb{E}[\exp(-\tilde{M}(f))] = \mathbb{E}\left[\mathbb{E}\left[\exp\left(-\sum_{k=1}^L f(X_k, Y_k)\right) \mid L, (X_k)_{k \geq 1}\right]\right]$$

$$= \mathbb{E}\left[\prod_{k=1}^L \int_F \mu'(dy) \exp(-f(X_k, y))\right]$$

$$= \mathbb{E}[\exp(-M(F))]$$

$$\text{avec } F(x) = -\ln \int_F \mu'(dy) e^{-f(x, y)} \geq 0.$$

Donc d'après la formule exponentielle

$$\mathbb{E}[\exp(-\tilde{M}(f))] = \exp\left(-\int_E (1 - e^{-F(x)}) \mu(dx)\right)$$

$$= \exp\left(-\int_{E \times F} (1 - e^{-f(x, y)}) \mu \otimes \mu'(dx dy)\right).$$

D'où le résultat



Exemple Soit $M = \sum_{k=1}^L \delta_{X_k}$ nuage poissonien d'intensité μ sur E et

$(Y_i)_{i \geq 1}$ iid \perp Bernoulli(p). Alors $M_p = \sum_{k=1}^L Y_k \delta_{X_k}$ est un

nuage poissonien d'intensité $p\mu$, car M_p est la restriction

à $E \times \{1\}$ de $\tilde{M} = \sum_{k=1}^L \delta_{(X_k, Y_k)}$ d'intensité $\mu \otimes \text{Bernoulli}(p)$

3) Nuages de Poisson avec paramètre temporel

On se place dans le cadre d'un espace mesuré (E, \mathcal{E}) avec $\{x, y\} \in \mathcal{E} \quad \forall x, y \in E$,
on suppose que \mathcal{P} est complète et que μ est σ -finie sur E .

Def Un processus ponctuel de Poisson sur E d'intensité μ est un nuage
poissonien M sur $\mathbb{R}_+ \times E$ d'intensité $dt \otimes \mu$

Proposition Presque sûrement, $\forall t \geq 0 \quad M(\{t\} \times E) \leq 1$

Preuve: On mq $\forall T > 0$, $A_T = \{ \exists t \in [0, T], M(\{t\} \times E) \geq 2 \}$ est inclus dans
un événement négligeable. Par σ -finitude, il suffit de le faire pour μ finie.

En effet, en écrivant $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ avec $A_i \in \mathcal{E}$ disjoints et $\mu(A_i) < \infty$, on a
 $A_T \subset \bigcap_{i,j=1}^{\infty} \{ \exists t \in [0, T], (M_{|A_i} + M_{|A_j})(\{t\} \times E) \geq 2 \}$

et $M_{|A_i} + M_{|A_j}$ est d'intensité finie.

Supposons donc μ finie

Pour $T > 0$: $A_T \subset B_{T,n}$ avec $B_{T,n} = \{ \exists 1 \leq j \leq n, M([\frac{j-1}{n}T, \frac{j}{n}T] \times E) \geq 2 \}$.

$$\mathbb{P}(B_{T,n}) \leq \sum_{j=1}^n (1 - e^{-\lambda})^2 \quad \text{avec } \lambda = \frac{\mu(E)T}{n}$$

$$\leq \sum_{j=1}^n \lambda^2 = \frac{(\mu(E)T)^2}{n} \xrightarrow{n \rightarrow \infty} 0$$

D'où le résultat

~

Def Pour $t > 0$, on pose $e(t) = \begin{cases} x & \text{si } M(\{t, x\}) = 1 \\ \emptyset & \text{point aléatoire sinon} \end{cases}$

Proposition 1) $\forall t \geq 0$, $e(t)$ est une v.a.

2) Si $\mu(E) = \infty$, $\{t : e(t) \neq \emptyset\}$ est dense p.s

3) Si $0 < \mu(E) < \infty$, p.s $\{t : e(t) \neq \emptyset\}$ est infini discret et peut être ordonné avec des v.a $0 < T_1 < T_2 < \dots$ qui vérifient

(a) $T_1, T_2 - T_1, T_3 - T_2, \dots$ sont i.i.d exp($\mu(E)$)

(b) les v.a $(e(T_i))_{i \geq 1}$ sont i.i.d de loi $\mu(\cdot) / \mu(E)$

(c) $(e(T_i))_{i \geq 1} \perp (T_i)_{i \geq 1}$

Preuve: 1) Pour $A \in \mathcal{E}$, $\{e(t) \in A\} = \{M(\{t\} \times A) = 1\}$
 $\{e(t) = \emptyset\} = \{M(\{t\} \times E) = 0\}$

2) Si $\mu(E) = \infty$, $\forall a < b \in \mathbb{Q}_+$ on a $M([a, b] \times E) \sim \text{Poi}(A) = \infty$ p.s.

3) La loi de $(T_i, e(T_i))_{i \geq 1}$ ne dépend que de la loi de M , par exemple

$T_1 = \inf \{t \geq 0 : M([0, t] \times A) \geq 1\}$ et $\{e(T_1) \in A\} = \{M(\{T_1\} \times A) = 1\}$.

La prop à démontrer ne dépend donc que de la loi de M .

Construisons alors M comme suit.

Soit $P = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{T_i}$ un nuage poissonien d'intensité $\mu(E) dt$ sur \mathbb{R}_+

et $(Y_i)_{i \geq 1}$ i.i.d $\sim \mu(\cdot) / \mu(E)$. Alors, par marquage,

$M = \sum_{i=1}^{\infty} \delta_{(T_i, Y_i)}$ est un nuage poissonien d'intensité

$dt \otimes \mu$. Par ailleurs, on a vu au cours dernier que

$(P([0, t]))_{t \geq 0}$ est un processus de Poisson d'intensité $\mu(E)$ et

on peut bien ordonner $T_1 < T_2 < \dots$ qui vérifient (a).

Les propriétés (b) et (c) découlent du fait que $e(T_i) = Y_i$.

4) Formule de Palm

Théorème (Formule de Palm/Équation de Mecke) Soit μ σ -finie et M un nuage poissonien d'intensité μ . Soit $f: E \times \mathcal{M}_{\text{atom}}(E) \rightarrow \mathbb{R}$ mesurable. Alors

$$\mathbb{E} \left[\int f(x, M) M(dx) \right] = \int_E \mathbb{E} [f(x, M + \delta_x)] \mu(dx) \quad (\ast)$$

On peut intuitivement interpréter la formule de Palm comme suit: sachant que M a un atome en x , ce qui advenait avec intensité $\mu(dx)$, la mesure M a même loi que $M + \delta_x$, i.e la mesure de Poisson à laquelle on a rajouté un atome en x .

On peut voir ce résultat comme une extension de la formule additive prenant en compte les atomes.

Preuve: Tout d'abord, comme $\mu + \delta_x$ est mesurable, par approximation par des fonctions étagées, on vérifie que $\mu \mapsto \int f(x, \mu) (dx)$ et $\mu \mapsto \int f(x, \mu + \delta_x)$ sont mesurables. Ainsi (\ast) ne dépend que de la loi de M .

Étape 1: μ finie.

On écrit M sous la forme $M = \sum_{i=1}^L \delta_{X_i}$ avec $L \sim \text{Poi}(\mu(E))$ et

$(X_i)_{i=1}^L$ iid de loi $\frac{\mu(\cdot)}{\mu(E)}$ indépendants de L . Alors

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int f(x, M) M(dx) \right] &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(E)^k}{k!} e^{-\mu(E)} \mathbb{E} \left[\sum_{i=1}^k f(X_i, \sum_{j=1}^k \delta_{X_j}) \right] \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(E)^k}{k!} e^{-\mu(E)} k \mathbb{E} \left[f(X_k, \sum_{j=1}^k \delta_{X_j}) \right] \\ &= \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{\mu(E)^k}{k!} e^{-\mu(E)} k \int_E \frac{\mu(dx)}{\mu(E)} \mathbb{E} \left[f(x, \sum_{j=1}^{k-1} \delta_{X_j} + \delta_x) \right] \\ &= \int_E \mu(dx) \left(\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\mu(E)^{k-1}}{(k-1)!} e^{-\mu(E)} \mathbb{E} \left[f(x, \sum_{j=1}^{k-1} \delta_{X_j} + \delta_x) \right] \right) \\ &= \int_E \mu(dx) \mathbb{E} [f(x, M + \delta_x)] \end{aligned}$$

Étape 2: Écrivons $M = \sum_{i \geq 1} M_i$ avec M_i mesurs poissonniens indépendants d'intensités μ_i finies. Pour $n \geq 1$, posons $S_n = \sum_{i=1}^n M_i$, $R_n = \sum_{i=n+1}^{\infty} M_i$ et $\nu_n = \sum_{i=1}^n \mu_i$.

Par convergence monotone,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int g(x, M) M(dx) \right] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int g(x, S_n + R_n) S_n(dx) \right] \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \mathbb{E} \left[\int F(x, S_n) S_n(dx) \right] \end{aligned}$$

avec $F(x, \mu) = \mathbb{E} [g(x, \mu + R_n)]$ car $S_n \perp R_n$

Puisque S_n est d'intensité finie,

$$\begin{aligned} \mathbb{E} \left[\int F(x, S_n) S_n(dx) \right] &= \int_E \mathbb{E} [F(x, S_n + \delta_x)] \nu_n(dx) \\ &= \int_E \mathbb{E} [g(x, M + \delta_x)] \nu_n(dx) \\ &\xrightarrow{n \rightarrow \infty} \int_E \mathbb{E} [g(x, M + \delta_x)] \mu(dx) \end{aligned}$$

~

Remarque Si les atomes de μ peuvent être énumérés de manière dénombrable (c'est le cas si μ est σ -finie et E polonais), la formule de Palm peut s'écrire

$$\mathbb{E} \left[\int g(x, M - \delta_x) M(dx) \right] = \int_E \mathbb{E} [g(x, M)] \mu(dx)$$