Cours 2 : Modes de convergence dans $\mathbb{R}$ et Mesures de probabilité sur un espace métrique

1/2

Plan :
1) Théorème de Lévy.
2) Rappels sur les ≠ modes de convergence (p.s, proba)
3) Uniforme intégrabilité et convergence L^1
4) Régularité de mesures
5) Théorème de Porte-Manteau
6) L'espace $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

1) Fonctions caractéristiques (Thm de Lévy)

Rappel : Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$.
Alors $\mu_n \Rightarrow \mu$ ssi $\begin{cases} (\mu_n)_{n\geq 1} \text{ est tendue} \\ \text{si } \mu_{\phi(n)} \Rightarrow \nu \text{ pour une extraction } \phi \text{ et } \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}), \text{ alors } \mu = \nu \end{cases}$

Définition Pour $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^k)$, on note $\phi_\mu(u) = \int_{\mathbb{R}^k} e^{iu\cdot x}\,\mu(dx)$, $u \in \mathbb{R}^k$, la fonction caractéristique de μ

produit scalaire

Il est clair que $\mu_n \Rightarrow \mu$ implique $\phi_{\mu_n} \xrightarrow{\text{cvs}} \phi_\mu$

convergence simple

Pour la réciproque, on a le résultat plus précis suivant :

Théorème (Lévy) Soit $\mu_n \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^k)$ tq

① $\forall u \in \mathbb{R}^k$, $\phi_{\mu_n}(u)$ converge vers une limite notée $\phi(u)$

② $u \mapsto \phi(u)$ est continue en 0.

Alors $\exists \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^k)$ tq $\phi = \phi_\mu$ et $\mu_n \Rightarrow \mu$

Pour la preuve, on se restreint à $k=1$ pour simplifier

Lemme (injectivité de la fonction caractéristique)

Soit $\mu, \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ tq $\phi_\mu = \phi_\nu$. Alors $\mu = \nu$.

Idée de preuve : On convole avec une gaussienne : Soit $g_\varepsilon(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} e^{-\frac{x^2}{2\varepsilon}}$

et on considère $\mu * g_\varepsilon(y) = \int \mu(dx)\, g_\varepsilon(x-y)$.

C'est une densité de proba $\mathcal{C}^\infty$, on vérifie que $\mu * g_\varepsilon(y)\,dy \underset{\varepsilon\to 0}{\Rightarrow} \mu$

Or $\phi_{g_\varepsilon}(z) = e^{-\frac{\varepsilon z^2}{2}} = g_{1/\varepsilon}(z)\sqrt{2\pi/\varepsilon}$

Donc $g_\varepsilon(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}\, \phi_{g_{1/\varepsilon}}(z)$.

$$\text{Ainsi, } \mu * g_\varepsilon(y) = \int \mu(dx) \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}}\, \phi_{g_{1/\varepsilon}}(x-y)$$

$$= \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int dz\, e^{iz\cdot(x-y)}\, g_{\frac{1}{\varepsilon}}(z)$$

$$\overset{\text{Fubini}}{=} \frac{1}{\sqrt{2\pi\varepsilon}} \int dz\, g_{\frac{1}{\varepsilon}}(z)\, e^{-iz\cdot y}\, \phi_\mu(z).$$

Ainsi, $\mu * g_\varepsilon$ s'exprime en fonction de ϕ_μ et ε ! On conclut en faisant $\varepsilon \to 0$

~

Lemme (lien queue / fonction caractéristique) $\exists\, c>0$ tq

$\forall \mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, $\forall K>0$, on a $\mu(\mathbb{R}\setminus[-K,K]) \leq cK \int_{-\frac{1}{K}}^{\frac{1}{K}} (1-\mathrm{Re}\,\phi_\mu(u))\,du$

Preuve : On a

$$K\int_{-\frac{1}{K}}^{\frac{1}{K}} (1-\mathrm{Re}\,\phi_\mu(u))\,du = K\int_{-\frac{1}{K}}^{\frac{1}{K}} \left(1-\int_{\mathbb{R}} \cos(ux)\,\mu(dx)\right)du \overset{(\text{Fubini})}{=} \int_{\mathbb{R}} \mu(dx)\, K\int_{-\frac{1}{K}}^{\frac{1}{K}} (1-\cos(ux))\,du$$

$$= 2\int_{\mathbb{R}} \mu(dx)\left(1-\frac{\sin(x/K)}{x/K}\right)$$

$$\geq 2 \int_{\mathbb{R}\setminus[-K,K]} \mu(dx) \left(1 - \frac{\sin(x/K)}{x/K}\right) \qquad \text{Or } \frac{\sin(y)}{y} \leq \sin(1) \text{ pour } |y| \geq 1$$

$$\geq 2(1-\sin(1))\,\mu(\mathbb{R}\setminus[-K,K])$$

Preuve du théorème de Lévy

Étape 1 : Tension

On a $\mu_n(\mathbb{R}\setminus[-A,A]) \leq cA \int_{-\frac{1}{A}}^{\frac{1}{A}} (1-\mathrm{Re}\,\phi_n(u))\,du \xrightarrow[n\to\infty]{} cA \int_{-\frac{1}{A}}^{\frac{1}{A}} (1-\mathrm{Re}\,\phi(u))\,du \xrightarrow[A\to\infty]{} 0$

On en déduit que $\lim_{A\to\infty} \limsup_{n\to\infty} \mu_n(\mathbb{R}\setminus[-A,A]) = 0$ (ϕ continue en 0)

Donc $(\mu_n)_{n\geq 1}$ est tendue. En particulier, $\exists \varphi_0$ extraction et $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ tq $\mu_{\varphi_0(n)} \Rightarrow \mu$. Alors $\phi_{\mu_{\varphi_0(n)}} \xrightarrow{CVS} \phi_\mu$. Donc $\phi = \phi_\mu$, ce qui montre déjà que ϕ est la f^{t} caractéristique d'une mesure de proba.

Étape 2 : unicité de la limite

Soit φ extraction et $\nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$ tq $\mu_{\varphi(n)} \Rightarrow \nu$.

Alors $\phi_{\mu_{\varphi(n)}} \xrightarrow{CVS} \phi_\nu$. Or $\phi_{\mu_n} \xrightarrow{CVS} \phi = \phi_\mu$.

Donc $\phi_\mu = \phi_\nu$ et $\mu = \nu$ par injectivité de la fonction caractéristique

On retrouve une structure du raisonnement en deux étapes, qui est le crédo de ce cours. Il y a essentiellement 3 ingrédients :

1. Tension
2. Une certaine propriété $\mathcal{P}$ passe à la limite étroite (pour le thm de Lévy $\mu_n \Rightarrow \mu$ implique $\phi_{\mu_n} \xrightarrow{CVS} \phi_\mu$)
3. Cette propriété $\mathcal{P}$ caractérise les mesures de proba.

Souvent ②+③ est appelé "identification de la limite" ou "unicité de la limite"

C'est aussi pour ces raisons qu'il est souvent important, dans des espaces généraux, d'avoir une "bonne" caractérisation des compacts (en vue de la tension) et une "bonne" caractérisation des mesures de proba (en vue de l'unicité de la limite).

Interlude : séparabilité

- Dans tout le cours, la notion de séparabilité est cruciale. On dit qu'un espace métrique E (ou plus généralement un espace topologique) est séparable s'il admet une suite dénombrable dense.

Par exemple, sont séparables $(\mathcal{C}_c(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ et tout espace métrique compact (utiliser Borel-Lebesgue), en $(\mathcal{C}_b(\mathbb{R}), \|\cdot\|_\infty)$ ne l'est pas (exercice)

- La séparabilité est une propriété très utile lorsqu'on considère des produits d'espaces (Si E, F sont séparables, $\mathcal{B}(E\times F) = \mathcal{B}(E)\otimes\mathcal{B}(F)$, ce qui est faux en général. En particulier, si X, Y sont des v.a à valeurs dans (E, d) séparable, alors $d(X,Y)$ est mesurable comme composée de

$$(\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (E\times E, \mathcal{B}(E)\otimes\mathcal{B}(E))$$
$$\omega \longmapsto (X(\omega), Y(\omega))$$

!

=

et $$(E\times E, \mathcal{B}(E\times E)) \longrightarrow \mathbb{R}$$ (mesurable car continue
$$(x,y) \longmapsto d(x,y)$$

- La séparabilité est une notion topologique, au sens où si E et F sont homéomorphes, alors E séparable $\Longleftrightarrow$ F séparable (NB: la complétude n'est pas une notion topologique)

2) Modes de convergence (p.s, proba)

Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ et X des v.a définies sur le même espace de proba, à valeurs dans (E,d) séparable

Définition

- On dit que X_n converge presque sûrement (p-s) vers X et on note $X_n \xrightarrow{p-s} X$ si
$$\mathbb{P}\left(\left\{\omega \in \Omega : X_n(\omega) \xrightarrow[n\to\infty]{} X(\omega)\right\}\right) = 1$$
- On dit que X_n converge en probabilité vers X et on note $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ si
$$\forall \varepsilon > 0, \quad \mathbb{P}\left(d(X_n, X) > \varepsilon\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Proposition On a $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ ssi de toute sous-suite $(X_{\varphi(n)})$ on peut reextraire une sous-sous-suite $(X_{\varphi\circ\psi(n)})$ qui converge ps vers X

En particulier, $X_n \xrightarrow{p.s} X$ implique $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$

Preuve Vérifions tout d'abord que minimum $\boxed{X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X \iff \mathbb{E}[d(X_n,X)\wedge 1] \longrightarrow 0}$

$\boxed{\Leftarrow}$ On a pour $0<\varepsilon<1$ $\quad \mathbb{P}(d(X_n,X) > \varepsilon) \leq \frac{1}{\varepsilon}\mathbb{E}[d(X_n,X)\wedge 1] \longrightarrow 0$

$\boxed{\Rightarrow}$ On écrit pour $\varepsilon>0$ $\quad \mathbb{E}[d(X_n,X)\wedge 1] \leq \mathbb{E}[d(X_n,X)\mathbb{1}_{d(X_n,X)\leq\varepsilon}] + \mathbb{E}[d(X_n,X)\wedge 1\,\mathbb{1}_{d(X_n,X)\geq\varepsilon}]$
$$\leq \varepsilon + \mathbb{P}(d(X_n,X)\geq\varepsilon)$$

Donc $\limsup\limits_{n\to\infty} \mathbb{E}[d(X_n,X)\wedge 1] = 0$.

Revenons à la preuve de la proposition :

$\boxed{\Rightarrow}$ Soit φ extraction. Il existe alors une extraction ψ telle que
$$\forall n\geq 1, \ \mathbb{E}[d(X_{\varphi\circ\psi(n)}, X)\wedge 1] \leq \frac{1}{2^n}$$

$$\mathbb{E}\Big[\sum_{n=1}^{+\infty} d(X_{\psi\circ\varphi(n)}, X)\wedge 1\Big] = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbb{E}[d(X_{\psi\circ\varphi(n)}, X)\wedge 1] < \infty$$

Donc p.s $\sum_{n=1}^{\infty} d(X_{\psi\circ\varphi(n)}, X)\wedge 1 < \infty$. Donc $X_{\psi\circ\varphi(n)} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s} X$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Par l'absurde, si $X_n \not\xrightarrow{P} X$, on trouve $\varepsilon>0$ et une extraction φ tq $\forall n$ $\mathbb{E}[d(X_{\varphi(n)}, X)\wedge 1] \geq \varepsilon$

Soit alors ψ extraction tq $X_{\varphi\circ\psi(n)} \xrightarrow{p.s} X$.

Par convergence dominée, $\mathbb{E}[d(X_{\varphi\circ\psi(n)}, X)\wedge 1] \longrightarrow 0$.

Absurde

3) Uniforme intégrabilité et cv dans L^1

Dans cette partie, $(X_n)_{n\geq 1}$ et X sont des v.a réelles intégrables définies sur le même espace de proba.

Définition On dit que (X_n) converge vers X dans L^1 et on note $X_n \xrightarrow{L^1} X$ si

$$\mathbb{E}[|X_n - X|] \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

Le thm de convergence dominée permet de passer de la cv ps à la cv L^1 avec une hypothèse de domination. Aussi, le lemme de Scheffé (cf feuille d'exercices 1) dit que $X_n \geq 0, X\geq 0, X_n \xrightarrow{p.s} X, \mathbb{E}[X_n] \to \mathbb{E}[X] \Rightarrow X_n \xrightarrow{L^1} X$.

Le concept d'uniforme intégrabilité fait le lien entre convergence en proba et convergence L^1.

Si $X\in L^1$, on a $\mathbb{E}[|X| \mathbb{1}_{|X|\geq x}] \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$ par convergence dominée. L'uniforme intégrabilité étend cela à une famille de variables aléatoires.

Théorème Soit $(X_i)_{i\in I}$ des v.a réelles intégrables. Les 3 conditions suivantes sont équivalentes :

(1) $\sup_{i\in I} \mathbb{E}[|X_i| \mathbb{1}_{|X_i|\geq x}] \xrightarrow[x\to\infty]{} 0$

(2) $\sup_{i\in I}\mathbb{E}[|X_i|]<\infty$ et $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0$, $\forall A$ mesurable, $\mathbb{P}(A)\leq\delta \Rightarrow \sup_{i\in I}\mathbb{E}[|X_i|\mathbb{1}_A]\leq\varepsilon$

(3) il existe une fonction croissante $\varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tq $\frac{\varphi(x)}{x} \xrightarrow[x\to\infty]{} +\infty$

et $\sup_{i\in I} \mathbb{E}[\varphi(|X_i|)]<\infty$ [critère de de la Vallée Poussin]

Lorsque ces conditions sont réalisées, on dit que $(X_i)_{i\in I}$ est <u>uniformément intégrable</u>, ou, en abrégé, UI.

Avant de démontrer cela, mentionnons un corollaire utile de (2) :

Corollaire : Une somme de deux familles UI est UI

Preuve du thm : $\boxed{(1)\Rightarrow(2)}$ Pour la bornitude dans L^1, on écrit pour x assez grand :

$$\mathbb{E}[|X_i|] \leq \mathbb{E}[|X_i|\mathbb{1}_{|X_i|\leq x}] + \mathbb{E}[|X_i|\mathbb{1}_{|X_i|\geq x}] \leq x + \sup_{i\in I}\mathbb{E}[|X_i|\mathbb{1}_{|X_i|\geq x}]<\infty.$$

Ensuite, on fixe $\varepsilon>0$. Par hypothèse, il existe x_ε tq $\sup_{i\in I}\mathbb{E}[|X_i|\mathbb{1}_{|X_i|\geq x_0}]\leq\varepsilon$

Alors, si $\mathbb{P}(A)\leq \varepsilon/x_\varepsilon$, pour $i\in I$ on a

$$\mathbb{E}[|X_i|\mathbb{1}_A] = \mathbb{E}[|X_i|\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{|X_i|\leq x_\varepsilon}] + \mathbb{E}[|X_i|\mathbb{1}_A\mathbb{1}_{|X_i|> x_\varepsilon}]$$
$$\leq x_\varepsilon \mathbb{P}(A) + \varepsilon \leq 2\varepsilon$$

$\boxed{(2)\Rightarrow(1)}$ D'après l'inégalité de Markov, si $\frac{1}{x}\sup_{i\in I}\mathbb{E}[|X_i|]\leq\delta$, on a $\forall i\in I$, $\mathbb{P}(|X_i|\geq x)\leq\delta$ et donc $\mathbb{E}[|X_i|\mathbb{1}_{|X_i|\geq x}]\leq\varepsilon$.

$\boxed{(3)\Rightarrow(1)}$ Soit $\varepsilon>0$ et $x_\varepsilon>0$ tq $x_\varepsilon \leq \varepsilon\varphi(x_\varepsilon)$. Alors

$$\sup_{i\in I}\mathbb{E}[|X_i|\mathbb{1}_{|X_i|\geq x_\varepsilon}] \leq \varepsilon \sup_{i\in I}\mathbb{E}[\varphi(|X_i|)\mathbb{1}_{|X_i|\geq x_\varepsilon}] \leq \varepsilon \sup_{i\in I}\mathbb{E}[\varphi(|X_i|)]$$

$\boxed{(1) \Rightarrow (3)}$ Soit (x_n) une suite strictement croissante telle que

$$\sup_{i \in I} \mathbb{E}[|X_i| \mathbb{1}_{|X_i| \geq x_n}] \leq \frac{1}{2^n}.$$

On pose alors $\varphi(x) = \sum_{m=1}^{\infty} (x - x_m)_+$, $x \geq 0$, qui est croissante

De plus $\frac{\varphi(x)}{x} = \sum_{m=1}^{\infty} \left(1 - \frac{x_m}{x}\right)_+ \xrightarrow[x \to \infty]{} +\infty$ par convergence monotone

et $\mathbb{E}[\varphi(|X_i|)] \leq \sum_{m=1}^{\infty} \mathbb{E}[|X_i| \mathbb{1}_{|X_i| \geq x_m}] \leq 1.$

~

On applique souvent le critère (3) avec $\varphi(x) = x^2$.

Remarque On a vu (cf feuille exos 1) que $(X_i)_{i \in I}$ est tendue ssi $\exists \varphi : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$ tq $\lim_{\infty} \varphi = +\infty$

et $\sup_{i \in I} \mathbb{E}[\varphi(|X_i|)] < \infty$ (c'est donc une notion plus faible que UI et UI $\Rightarrow$ tension.

Proposition Soit $(X_n)_{n \geq 1}$ des v.a réelles intégrables et X une v.a réelle

On a $X_n \xrightarrow{L^1} X$ et $X \in L^1$ ssi $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ et $(X_n)_{n \geq 1}$ est UI

Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$ On suppose $X_n \xrightarrow{L^1} X$. Alors $X_n \xrightarrow{\mathbb{P}} X$ (Markov). Pour mq $(X_n)_{n \geq 1}$ est UI

il suffit de mq $(X_n - X)_{n \geq 1}$ est UI, puisque la somme de deux familles UI est UI par

caractérisation (2). Pour cela, si $\varepsilon > 0$, on choisit n_0 tq $n \geq n_0 \Rightarrow \mathbb{E}[|X_n - X|] \leq \varepsilon$ pour $n \geq n_0$

et x_0 tq $x \geq x_0 \Rightarrow \max_{1 \leq i \leq n_0} \mathbb{E}[|X_i - X| \mathbb{1}_{|X_i - X| \geq x}] \leq \varepsilon$. Alors $\sup_{i \geq 1} \mathbb{E}[|X_i - X| \mathbb{1}_{|X_i - X| \geq x}] \leq \varepsilon$.

$\boxed{\Leftarrow}$ Vérifions d'abord que $X \in L^1$. Soit φ extraction tq $X_{\varphi(n)} \xrightarrow{ps} X$. Alors, d'après

le lemme de Fatou, $\mathbb{E}[|X|] \leq \liminf_{n \to \infty} \mathbb{E}[|X_{\varphi(n)}|] < \infty$ par UI.

Ainsi, comme ci-dessus, $(X_n - X)_{n \geq 1}$ est UI. En choisissant δ comme dans

la caractérisation (2), si $\mathbb{P}(|X_n - X| \geq \varepsilon) \leq \delta$, on en déduit que

$$\mathbb{E}[|X_n - X|] \leq \mathbb{E}[|X_n - X| \mathbb{1}_{|X_n - X| \geq \varepsilon}] + \mathbb{E}[|X_n - X| \mathbb{1}_{|X_n - X| \leq \varepsilon}] \leq 2\varepsilon.$$

~

On repasse maintenant à un cadre métrique général.

4) Régularité de mesures

Théorème Soit (E,d) un espace métrique et $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$. Pour tout $A \in \mathcal{B}(E)$,

$$\mu(A) = \inf\{\mu(O) : O \text{ ouvert}, A \subset O\} = \sup\{\mu(F) : F \text{ fermé}, F \subset A\} \quad (*)$$

Preuve : c'est une preuve à la "théorie de la mesure". On note

$$\mathcal{A} = \{A \in \mathcal{B}(E) : A \text{ vérifie } (*)\}.$$

- Si O ouvert, $O \in \mathcal{A}$: pour l'inf, ok. Pour le sup, soit $F_n = \{x \in E : d(x, {}^c O) \geq \frac{1}{n}\}$, fermé.

Comme $O = \bigcup_{n \geq 1}^{\uparrow} F_n$, on a $\mu(O) = \lim_{n \to \infty}^{\uparrow} \mu(F_n)$.

- $\mathcal{A}$ est une tribu : $\emptyset \in \mathcal{A}$: ok. Passage au complémentaire : ok.

Soit $(A_n)_{n \geq 1}$ une suite de $\mathcal{A}$ et F_n fermé, O_n ouvert tq $F_n \subset A_n \subset O_n$ et $\mu(O_n \setminus F_n) \leq \frac{\varepsilon}{2^n}$.

Alors $O = \bigcup_{n \geq 1} O_n$ est un ouvert contenant $\bigcup_{n \geq 1} A_n$ tq $\mu(O \setminus \bigcup_{n \geq 1} A_n) \leq \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varepsilon}{2^n} \leq \varepsilon$.

Cependant, $F' = \bigcup_{n \geq 1} F_n$ n'est pas tjrs fermé. Pour contourner, on remarque que

$\bigcup_{n=1}^{k} F_n \underset{k \to \infty}{\uparrow} F'$ et donc $\exists N \geq 1$ tq $\mu(F' \setminus \bigcup_{n=1}^{N} F_n) \leq \varepsilon$. On pose $F = \bigcup_{n=1}^{N} F_n$.

On a alors $\mu(O \setminus F) \leq \mu(O \setminus F') + \mu(F' \setminus F) \leq 2\varepsilon$.

~

En particulier, une mesure de proba est caractérisée par sa valeur sur les ouverts (ou les fermés) — ce qu'on peut directement voir avec le lemme des classes monotones.

5) Théorème de Porte-manteau

Ici (E,d) est un espace métrique

Théorème (Porte-manteau/Alexandrov) Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{M}_1(E)$ et $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$.

Les propriétés suivantes sont équivalentes:

(1) $\mu_n \Rightarrow \mu$

(2) $\forall f : E \to \mathbb{R}$ lipschitzienne bornée, $\mu_n(f) \longrightarrow \mu(f)$

(3) $\forall F$ fermé, $\limsup\limits_{n\to\infty} \mu_n(F) \leq \mu(F)$

(4) $\forall O$ ouvert, $\liminf\limits_{n\to\infty} \mu_n(O) \geq \mu(O)$

(5) $\forall A \in \mathcal{B}(E)$ tq $\mu(\partial A) = 0$, on a $\lim\limits_{n\to\infty} \mu_n(A) = \mu(A)$.

(6) $\forall f : E \to \mathbb{R}$ mesurable bornée et continue en μ-presque tout point, on a
$$\mu_n(f) \longrightarrow \mu(f).$$

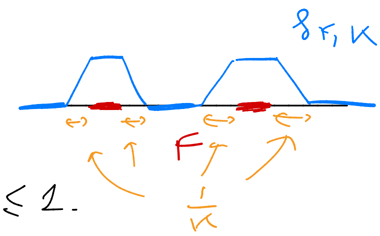
En termes probabilistes, si $\mathcal{L}(X_n) = \mu_n$, $\mathcal{L}(X) = \mu$,

$$X_n \xrightarrow{\text{loi}} X \iff \forall f : E \to \mathbb{R} \text{ lip bornée } \mathbb{E}[f(X_n)] \to \mathbb{E}[f(X)] \iff \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in F) \leq \mathbb{P}(X \in F)$$
etc.

Preuve : $\boxed{(1) \Rightarrow (2)}$ OK

$\boxed{(2) \Rightarrow (3)}$ Soit F fermé et $K>0$. On pose

$$f_{F,K}(x) = \max(1 - K\, d(x,F), 0)$$



Alors $f_{F,K}$ est K lipschitzienne et vérifie $\mathbb{1}_F \leq f_{F,K} \leq 1$.

Donc $\mu_n(F) \leq \mu_n(f_{F,K})$ et $\limsup\limits_{n\to\infty} \mu_n(F) \leq \mu(f_{F,K})$

Par convergence dominée, $\mu(f_{F,K}) \xrightarrow[K\to\infty]{} \mu(F)$, d'où le résultat

$\boxed{(3) \Rightarrow (4)}$ OK par passage au complémentaire

$\boxed{(3)+(4) \Rightarrow (5)}$ Soit $A \in \mathcal{B}(E)$ tq $\mu(\partial A) = 0$, de sorte que $\mu(\mathring{A}) = \mu(A) = \mu(\bar{A})$.

Alors $\mu(A) = \mu(\mathring{A}) \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \mu_n(\mathring{A}) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \mu_n(A) \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \mu_n(\bar{A})$
$$\leq \mu(\bar{A}) = \mu(A).$$

Donc tous les $\leq$ sont des $=$.

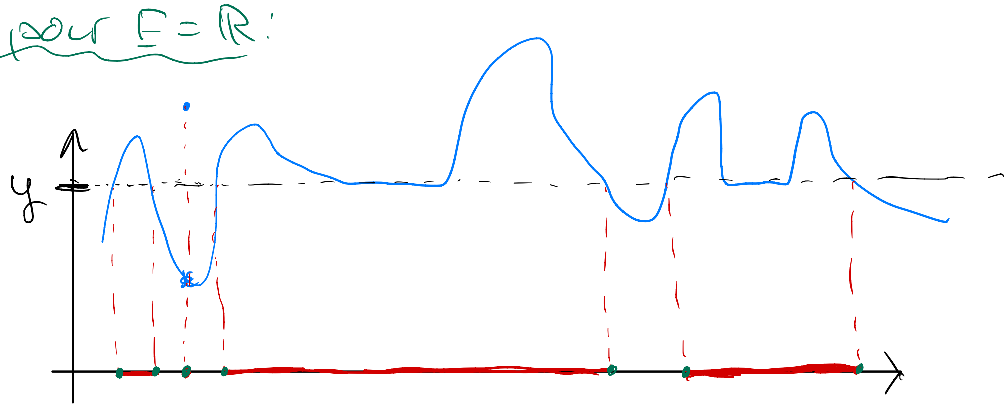
$\boxed{(5)\Rightarrow(6)}$ Soit f continue μ presque partout, bornée par M. Quitte à écrire $f = f_+ - f_-$ on peut supposer $f \geq 0$. Alors, par Fubini,

$$\mu_n(f) = \int_E f(x)\,\mu_n(dx) = \int_E \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{y \leq f(x)}\, dy\, \mu_n(dx) = \int_0^{+\infty} dy \int_0^{+\infty} \mathbb{1}_{y \leq f(x)}\, \mu_n(dx)$$

$$= \int_0^{+\infty} dy\, \mu_n(\underbrace{\{f \geq y\}}_{A_y}) = \int_0^M dy\, \mu_n(A_y)$$

Pour appliquer (5), regardons ∂A_y. Soit D l'ensemble des points de discontinuité de f. Vérifions que $\partial A_y \subset \{x \in E : f(x) = y\} \cup D$.

Exemple pour $E = \mathbb{R}$:



En rouge $A_y = \{x : f(x) \geq y\}$, en vert ∂A_y.

En effet, soit $x_n \in A_y$ tq $x_n \to x \in \partial A_y$. Si $x \in D$, il n'y a rien à faire.
Si $x \notin D$: comme $f(x_n) \geq y$ $\forall n$, on a alors $f(x) \geq y$. Alors soit $f(x) = y$, soit $f(x) > y$, auquel cas $x \in \mathring{A}_y$, pas possible.

Or il y a au plus un nombre dénombrable de y tq $\mu(\{f = y\}) > 0$ (pour un entier $n \geq 1$, il y a au plus n y tq $\mu(\{f = y\}) \geq \frac{1}{n}$ car μ est une proba)

Donc pour Lebesgue presque tout y, $\mu(\partial A_y) = 0$ et $\mu_n(A_y) \xrightarrow[n\to\infty]{} \mu(A_y)$

Par convergence dominée, on conclut que

$$\mu_n(f) \xrightarrow[n\to\infty]{} \int_0^M dy\, \mu(A_y) = \mu(f)$$

$\boxed{(6)\Rightarrow(1)}$ OK

$\sim$