Cours 3 : mesures de probabilités sur un espace métrique $\boxed{2/2}$

Plan : 1) Applications de Porte-manteau

2) Convergence étroite dans $\mathbb{R}^N$

3) Tension et théorème de Prokhorov

4) Propriétés topologiques de $\mathcal{M}_1(E)$: distance de Lévy-Prokhorov

5) Compléments de topologie : topologie faible-$*$ sur $\mathcal{M}_1(E)$ (facultatif)

1) Applications de Porte-manteau

Application Soit (E,d) un espace métrique séparable, X_n, Y_n des v.a à valeurs dans S tq $X_n \Rightarrow X$ et $d(X_n,Y_n) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Alors $Y_n \Rightarrow X$

Preuve : On applique porte-manteau. Soit F fermé, et notons $F_\varepsilon = \{x \in S : d(x,F) \leq \varepsilon\}$, fermé. Alors $\mathbb{P}(Y_n \in F) \leq \mathbb{P}(X_n \in F_\varepsilon) + \mathbb{P}(d(X_n,Y_n) \geq \varepsilon)$

Donc $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n \in F) \leq \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \in F_\varepsilon) = \mathbb{P}(X \in F_\varepsilon)$.

Or $\mathbb{P}(X \in F_\varepsilon) \underset{\varepsilon\to 0}{\longrightarrow} \mathbb{P}(X \in F)$, ce qui conclut.

Corollaire (lemme de Slutsky) Soient (E,d_E), (F,d_F) séparables.

$X_n \Rightarrow X$ dans E, $Y_n \xrightarrow{\mathbb{P}} y$ dans F avec $y \in F$ fixé.

Alors $(X_n,Y_n) \Rightarrow (X,y)$

Preuve : • On pose munit $E \times F$ de la distance $d((a,b),(a',b')) = d_E(a,a') + d_F(b,b')$

• Ainsi, $(X_n,y) \Rightarrow (X,y)$.

Par ailleurs, $d((X_n,y),(X_n,Y_n)) = d(Y_n,y) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

D'où le résultat.

$\sim$

2) Convergence étroite dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

On note $\mathbb{R}^{\mathbb{N}} = \{(x_1, x_2, \dots) : \forall i \geq 1, x_i \in \mathbb{R}\}$ l'ensemble des suites réelles.

ⓐ Tribu sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Définition: La tribu produit sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, notée $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{N}}$, est la plus petite tribu sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ qui rend pour tout $k \geq 1$ les applications $\pi_k : \begin{array}{l} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow (\mathbb{R}, \mathcal{B}(\mathbb{R})) \\ (x_i)_{i\geq 1} \longmapsto x_k \end{array}$ mesurables.

Elle est parfois appelée tribu cylindrique.

Remarques On vérifie que :

- les ensembles de la forme $\{(x_i)_{i\geq 1} : x_{i_1} \in A_1, \dots, x_{i_k} \in A_k\} = \pi_{i_1}^{-1}(A_1) \cap \dots \cap \pi_{i_k}^{-1}(A_k)$ pour $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{B}(\mathbb{R})$ et $1 \leq i_1 < i_2 < \dots < i_k$, appelés cylindres, forment un π-système générateur de $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{N}}$
- Une fonction $\begin{array}{l} (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (\mathbb{R}^{\mathbb{N}}, \mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{N}}) \\ \omega \longmapsto (x_i(\omega))_{i\geq 1} \end{array}$ est mesurable ssi $\forall k \geq 1$ $\omega \mapsto x_k(\omega)$ est mesurable. En particulier $(X_i)_{i\geq 1}$ est une v.a (à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$) ssi $\forall i \geq 1$, X_i est une v.a.

Définition Soit $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$. Pour $1 \leq i_1 < \dots < i_k$, on note $\mu_{i_1, \dots, i_k}$ la mesure image de μ par l'application $\begin{array}{l} \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \longrightarrow \mathbb{R}^k \\ (x_i)_{i\geq 1} \longmapsto (x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \end{array}$. Si $(X_i)_{i\geq 1}$ a pour loi μ, c'est la loi de $(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$. Les mesures $\{\mu_{i_1, \dots, i_k} : 1 \leq i_1 < \dots < i_k\}$ sont appelées marginales de dimension k de μ. La famille formée de toutes les marginales de dimension k, $k \geq 1$, est appelée famille des marginales de dimension finie de μ (fdd en abrégé)

Proposition Une mesure $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ est caractérisée par ses marginales fidi

En particulier, la loi d'une v.a. $(X_i)_{i\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est caractérisée par ses lois fidi

Preuve : ceci provient du fait que les cylindres forment un π-système générateur de $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{N}}$, et donc deux mesures de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ qui coïncident dessus sont égales d'après le lemme des classes monotones.

En termes probabilistes, $(X_i)_{i\geq 1} \overset{\text{loi}}{=} (Y_i)_{i\geq 1} \iff \forall\, 1\leq i_1 < \dots < i_k,$
$$(X_{i_1}, \dots, X_{i_k}) \overset{\text{loi}}{=} (Y_{i_1}, \dots, Y_{i_k})$$

5) Distance sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Pour pouvoir parler de convergence étroite dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on définit une distance sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

Définition Pour $(x_i)_{i\geq 1}, (y_i)_{i\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, on pose
$$d\big((x_i)_{i\geq 1}, (y_i)_{i\geq 1}\big) = \sum_{i=1}^{+\infty} \frac{|x_i - y_i|}{1+|x_i-y_i|} \times \frac{1}{2^i}$$

Si $(x_i)_{i\geq 1}$ et $(y_i)_{i\geq 1}$ coïncident sur les K premiers termes (i.e $x_i = y_i$ pour $i\leq K$)

on a $d\big((x_i)_{i\geq 1}, (y_i)_{i\geq 1}\big) \leq \frac{1}{2^{K-1}}$.

En particulier, les suites de rationnels nulles à partir d'un certain rang sont denses dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, qui est donc séparable

On vérifie aussi que [cf feuille d'exos]

$$\text{si } (x_i^n)_{i\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \text{ et } (x_i)_{i\geq 1} \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}},\ d(x^n, x) \to 0 \iff \forall i\geq 1,\ x_i^n \xrightarrow[n\to\infty]{} x_i$$

Remarque facultative La distance d métrise la topologie produit sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, au sens où les ouverts définis par d coïncident avec la plus petite topologie (i.e. collection d'ouverts) pour laquelle toutes les projections π_k sont continues.

Lemme La tribu borélienne $\mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ coïncide avec la tribu produit $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{N}}$

Preuve : • $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{N}} \subset \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ car les projections π_k sont continues.

• Pour l'autre inclusion, soit $(z^j)_{j\geq 1}$ une suite dense dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. On définit $N^j_{k,M} = \{ (y_i) \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}} : |y_i - z^j_i| < \frac{1}{M}$ pour $1 \leq i \leq k \}$, ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, appelé ouvert élémentaire. Comme il y a un nombre dénombrable de tels ouverts, il suffit de vérifier que tout ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est union d'ouverts élémentaires (car ils sont dans $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes \mathbb{N}}$)

Pour cela, il suffit de montrer que $\forall O$ ouvert, $\forall x \in O$, il existe un ouvert élémentaire contenant x et inclus dans O. Pour cela, soit $\varepsilon > 0$ tq $B(x, 3\varepsilon) \subset O$.

On choisit alors M et k tq $\frac{1}{2^k} < \varepsilon$ et $\frac{1}{M} < \varepsilon$, et z^j tq

$d(z^j, x) < \frac{1/M}{1+1/M} 2^{-k}$.

On vérifie alors $x \in N^j_{k,M}$ et que $N^j_{k,M} \subset B(x, 3\varepsilon)$

(c) Convergence étroite dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$

Dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la cv en loi est équivalente à la convergence des marginales fini-dimensionnelles :

Théorème Soit $(X^n)_{n\geq 1}$, X des v.a de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$. Alors

$X^n \xrightarrow{loi} X \iff \forall\, 1\leq i_1 < \dots < i_k,\ (X^n_{i_1}, \dots, X^n_{i_k}) \xrightarrow{loi} (X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$

Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$ Clair par continuité de $\pi_{i_1,\dots,i_k} : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^k$

$$(x_i)_{i\geq 1} \mapsto (x_{i_1}, \dots, x_{i_k})$$

$\boxed{\Leftarrow}$ Soit $f : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}$ lipschitzienne bornée. Soit $\delta > 0$, $\varepsilon > 0$ tq $d(x,y) \leq \delta \Rightarrow |f(x) - f(y)| \leq \varepsilon$ pour $x, y \in \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

On choisit alors K tq $\frac{1}{2^{K+1}} < \delta$ et on écrit

$$|\mathbb{E}[f(X^n_1, \dots)] - \mathbb{E}[f(X_1, \dots)]| \leq \underbrace{\mathbb{E}[|f(X^n_1, \dots) - f(X^n_1, \dots, X^n_K, 0, 0, \dots)|]}_{\leq \varepsilon}$$

$$+ \underbrace{\mathbb{E}[|f(X^n_1, \dots X^n_K, 0, 0, \dots) - f(X_1, \dots X_K, 0, 0, \dots)|]}_{\xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \text{ par hypothèse}} + \underbrace{\mathbb{E}[|f(X_1, \dots, X_K, 0, 0, \dots) - f(X_1, \dots)|]}_{\leq \varepsilon}$$

Ceci conclut par porte-manteau

3) Tension et théorème de Prokhorov

Avec la séparabilité, la complétude joue un rôle important dans le thm de Prokhorov. ⚠ Contrairement à la séparabilité, la complétude n'est pas une notion topologique : (E, d_1) et (E, d_2) peuvent être homéomorphes avec (E, d_1) complet et (E, d_2) pas complet (par ex $E = \mathbb{R}$, $d_1(x,y) = |x-y|$, $d_2(x,y) = |\arctan(x) - \arctan(y)|$)

Définition : Soit (E, d) un espace métrique et $A \subset E$.

- On dit que A est *précompact* si $\forall \varepsilon > 0$, A peut être recouvert par un nombre fini de boules de rayon ε.
- On dit que A est *relativement compact* si $\bar{A}$ est compact

Exemple : Un espace métrique compact est précompact et complet

Remarque A est relativement compact $\Leftrightarrow$ de toute suite de A on peut extraire une sous-suite qui converge

En particulier $\{x_n : n \geq 1\}$ est relativement compact $\Leftrightarrow$ $\forall$ extraction ϕ, $\exists\, \varphi$ extraction tq $(x_{\phi\circ\varphi(n)})_{n\geq 1}$ converge

Lemme A précompact $\Leftrightarrow$ $\bar{A}$ précompact

Preuve : $\boxed{\Leftarrow}$ Clair

$\boxed{\Rightarrow}$ Si $A \subset \bigcup_{n\geq 1} B(x_n, \varepsilon)$, vérifions que $\bar{A} \subset \bigcup_{n\geq 1} B(x_n, 2\varepsilon)$.

Soit $y \in \bar{A}$ et $y_n \to y$ avec $y_n \in A$. Soit n_0 tq $d(y, y_{n_0}) < \varepsilon$

Soit n_1 tq $y_{n_0} \in B(x_{n_1}, \varepsilon)$. Alors $y \in B(x_{n_1}, 2\varepsilon)$ par inégalité triangulaire

Définition (un peu simplifiée) On dit que (E,d) est polonais s'il est séparable et complet.

NB : La "vraie" définition d'un espace polonais est : un espace topologique séparable, métrisable avec une distance complète (cf partie 5)) mais pour simplifier dans ce cours, polonais = métrique, complet, séparable.

Le résultat suivant sera très utile, cf feuille d'exercices pour la preuve.

Proposition Soit (E,d) complet, $A \subset E$. Alors

A précompact $\Leftrightarrow$ A relativement compact

Définition : Soit (E,d) un espace métrique

- On dit qu'une mesure $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ est tendue si $\forall \varepsilon > 0, \exists K$ compact tq $\mu(K) \geq 1-\varepsilon$.
- On dit qu'une famille $(\mu_i)_{i\in I}$ de mesures est tendue si

$\forall \varepsilon > 0, \exists K$ compact, $\inf_{i\in I} \mu_i(K) \geq 1 - \varepsilon$

Une famille de variables aléatoires est tendue si la famille de leurs lois l'est

Proposition Soit $(\mu_i)_{i\in I}$ une famille tendue sur (E,d) et $f:(E,d)\to(F,d')$ continue. Alors $(f_*\mu_i)_{i\in I}$ est tendue, où $f_*\mu_i$ est la mesure image de μ_i par f.

Preuve: Soit $\varepsilon>0$ et K compact tq $\inf_{i\in I}\mu_i(K)>1-\varepsilon$. Comme f est continue, $f(K)$ est compact. De plus, $f^{-1}(f(K))\supset K$, donc $\inf_{i\in I} f_*\mu_i(f(K)) = \inf_{i\in I}\mu_i(f^{-1}(f(K)))\geq \inf_{i\in I}\mu_i(K)>1-\varepsilon$

∞

Proposition Soit (E,d) polonais et $\mu\in\mathcal{M}_1(E)$. Alors μ est tendue.

Preuve: Soit $(x_k)_{k\geq 1}$ une suite dense. Soit $\varepsilon>0$. Pour tout $n\geq 1$, on choisit N_n tq

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{N_n}\overline{B}\left(x_k,\frac{1}{n}\right)\right)\geq 1-\frac{\varepsilon}{2^n}$$

On pose alors $K=\bigcap_{n\geq 1}\bigcup_{k=1}^{N_n}\overline{B}(x_k,\frac{1}{n})$.

K est fermé et précompact. Il est donc compact.

Par ailleurs $\mu(K^c)\leq \sum_{n=1}^{+\infty}\left(1-\mu\left(\bigcup_{k=1}^{N_n}\overline{B}(x_k,\frac{1}{n})\right)\right)\leq \sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\varepsilon}{2^n}=\varepsilon$.

Théorème (Prokhorov) Soit (E,d) métrique et $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{M}_1(E)$

1. Si $(\mu_n)_{n\geq 1}$ est tendue, alors $\forall$ extraction φ, $\exists$ extraction ψ tq $(\mu_{\varphi\circ\psi(n)})_{n\geq 1}$ converge étroitement
2. Si (E,d) est polonais, la réciproque est vraie

On commence par un lemme:

Proposition Soit (E,d_E) métrique séparable. Alors E est homéomorphe à un sous-ensemble de $(\mathbb{R}^{\mathbb{N}},d)$

Preuve : Soit $(z^i)_{i\geq 1}$ une suite dense de E. On pose

$$\Phi : E \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$$
$$x \mapsto (d_E(x, z^i))_{i\geq 1}$$

- Φ est continue car la convergence dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ est la convergence des coordonnées
- Supposons $\Phi(x) = \Phi(y)$. Si $x \neq y$, on choisit z^i tq $d_E(x, z^i) < \frac{d_E(x,y)}{2}$.

On ne peut avoir $d_E(x, z^i) = d_E(y, z^i)$ par inégalité triangulaire

- Supposons $\Phi(x^n) \to \Phi(x)$. Par l'absurde, supposons $x^n \not\to x$.

Il existe alors $\varepsilon > 0$ et une extraction ϕ tq $\forall n$, $d_E(x^{\phi(n)}, x) \geq \varepsilon$

On choisit z^i tq $d_E(z^i, x) < \frac{\varepsilon}{2}$. Alors $d_E(x^{\phi(n)}, z^i) > \frac{\varepsilon}{2}$.

Or $d_E(x^{\phi(n)}, z^i) \to d_E(x, z^i)$, absurde.

Donc Φ est un homéomorphisme sur son image

Revenons à la preuve du thm de Prokhorov:

Preuve de 1 C'est le sens le plus utile, mais aussi le plus difficile.

L'idée est de traiter successivement les cas $\mathbb{R}^d$, $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, E

- Le cas $E = \mathbb{R}$ a été vu au cours 1, le cas $\mathbb{R}^d$ se traite de même. (cf feuille d'exos 1 ou Kallenberg, prop 5.2.1)
- Cas $E = \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$: Notons $\Pi_k : \mathbb{R}^{\mathbb{N}} \to \mathbb{R}^k$, $(x_i)_{i\geq 1} \mapsto (x_1, \dots, x_k)$, continue. L'image d'un compact par une fonction continue étant compacte, $\forall k \geq 1$, $(\hat{\Pi}_k \mu_n)_{n\geq 1}$ est tendue dans $\mathbb{R}^k$.

Par procédé diagonal, $\forall$ extraction φ, $\exists$ extraction ψ tq si $\sigma = \varphi \circ \psi$, $\forall k \geq 1$, $(\hat{\Pi}_k \mu_{\sigma(n)})_{n\geq 1}$ converge étroitement vers une mesure $\nu_k \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^k)$

Les $(\nu_k)_{k\geq 1}$ étant cohérentes (i.e $\hat{\Pi}_k \nu_{k+1} = \nu_k$), d'après le théorème d'extension de Kolmogorov, il existe $\nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$ tq $\hat{\Pi}_k \nu = \nu_k$ $\forall k \geq 1$.

Il s'ensuit que $\mu_{\sigma(n)} \Rightarrow \nu$, car dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ la convergence étroite est équivalente à la convergence étroite des marginales fini-dimensionnelles.

• Cas E σ-compact (E = union dénombrables de compacts)

E étant séparable, il est homéomorphe à un sous-ensemble de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, qui est σ-compact (l'image d'un compact par une fonction continue est compacte), et a fortiori mesurable dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$.

La convergence étroite et la tension étant stables par composition par une fonction continue, on peut supposer que $E \subset \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ avec E mesurable.

On vérifie que $\mathcal{B}(E) = \{A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}}) : A \subset E\}$ (exo)

On étend μ_n sur $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ en posant $\hat{\mu}_n(A) = \mu_n(A \cap E)$ pour $A \in \mathcal{B}(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$,

i.e $\hat{\mu}_n$ est la mesure image de μ_n par l'inclusion $I : E \to \mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, $x \mapsto x$, continue

(a) Alors $(\hat{\mu}_n)_{n\geq 1}$ est tendue. En effet, soit $K \subset E$ compact tq $\forall n$ $\mu_n(K) \geq 1-\varepsilon$.

Alors K est un compact de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ et $\hat{\mu}_n(K) = \mu_n(K) \geq 1-\varepsilon$

Soit ψ extraction. D'après l'étape précédente, $\exists\, \varphi$ extraction tq si $\sigma = \psi \circ \varphi$, $(\hat{\mu}_{\sigma(n)})_{n\geq 1}$ converge étroitement vers $\hat{\mu} \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^{\mathbb{N}})$

(b) Vérifions que $\hat{\mu}(E) = 1$. Soit K_i compact de E tq $\mu_{\sigma(n)}(K_i) \geq 1 - \frac{1}{i}$ $\forall n \geq 1$.

Puisque K_i est fermé dans $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (exo), par Porte-manteau,

$$\hat{\mu}(E) \geq \hat{\mu}(K_i) \geq \limsup_{n\to\infty} \hat{\mu}_{\sigma(n)}(K_i) = \limsup_{n\to\infty} \mu_{\sigma(n)}(K_i) \geq 1 - \frac{1}{i}$$

En faisant $i \to \infty$, on obtient $\hat{\mu}(E) = 1$.

On définit alors μ sur E en posant $\mu(A)=\hat{\mu}(A)$ pour $A\in\mathcal{B}(E)$.

c) Vérifions que $\mu_{\sigma(n)} \Rightarrow \mu$. On utilise porte-manteau.

Soit O ouvert de E. Alors $O = E\cap\hat{O}$ avec $\hat{O}$ ouvert de $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ (exo),

et $\liminf_{n\to\infty} \mu_{\sigma(n)}(O) = \liminf_{n\to\infty} \hat{\mu}_{\sigma(n)}(\hat{O}) \geq \hat{\mu}(\hat{O}) = \hat{\mu}(\hat{O}\cap E)$ (car $\hat{\mu}(E)=1$)
$= \mu(O)$

• Cas général Soit K_i compact tq $\forall n\geq 1$, $\mu_n(K_i)\geq 1-\frac{1}{i}$.

On pose $E_0 = \widetilde{\bigcup_{i=1}} K_i$, de sorte que $\mu_n(E_0)=1$ $\forall n\geq 1$.

On applique le cas précédent à $\tilde{\mu}_n$ défini sur E_0 par $\tilde{\mu}_n(A)=\mu_n(A)$.

(En particulier, comme $\mu_n(E_0)=1$, $\mu_n(A)=\tilde{\mu}_n(A\cap E_0)$ pour $A\in\mathcal{B}(E)$)

($(\tilde{\mu}_n)_{n\geq 1}$ est bien tendue car $\forall i\geq 1$, $\forall n\geq 1$, $\tilde{\mu}_n(K_i)\geq 1-1/i$ avec K_i compact)

Soit φ extraction, $\exists\, \psi$ extraction tq si $\sigma=\varphi\circ\psi$, alors $\tilde{\mu}_{\sigma(n)} \Rightarrow \tilde{\mu}\in\mathcal{M}_1(E_0)$

On définit alors μ par $\mu(A)=\tilde{\mu}(A\cap E_0)$ pour $A\in\mathcal{B}(E)$.

On conclut que $\mu_{\sigma(n)} \Rightarrow \mu$, car $\mu_{\sigma(n)}$ et μ sont les mesures

image de $\tilde{\mu}_{\sigma(n)}$ et $\tilde{\mu}$ par l'inclusion $I : E_0 \to E$, $x\mapsto x$ continue.

~

Preuve de (2) On suppose (E,d) polonais et $\forall\varphi, \exists\psi$ tq $\mu_{\phi\circ\psi(n)}$ cv étroitement

Soit $(x_i)_{i\geq 1}$ une suite dense.

Vérifions d'abord que $\forall k\geq 1, \exists N_k\geq 1, \forall n\geq 1$, $\mu_n\left(\bigcup_{i=1}^{N_k} B(x_i,\frac{1}{k})\right)\geq 1-\frac{\varepsilon}{2^k}$

Sinon, $\exists k\geq 1$ et une suite $\phi(n)$ tq $\forall n$, $\mu_{\phi(n)}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\frac{1}{k})\right) < 1-\frac{\varepsilon}{2^k}$.

Soit alors ψ tq $\mu_{\phi\circ\psi(n)} \Rightarrow \mu$.

Par Porte-Manteau, pour tout $m\geq 1$

$$1-\frac{\varepsilon}{2^k} \geq \liminf_{n\to\infty} \mu_{\phi(n)}\left(\bigcup_{i=1}^{n} B(x_i,\tfrac{1}{k})\right) \geq \liminf_{n\to\infty} \mu_{\phi(n)}\left(\bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,\tfrac{1}{k})\right)$$
$$\geq \mu\left(\bigcup_{i=1}^{m} B(x_i,\tfrac{1}{k})\right)$$

Donc en faisant $m \to \infty$, $\mu(E) \leq 1 - \frac{\varepsilon}{2^k}$, absurde.

On pose alors $K = \bigcap_{k \geq 1} \bigcup_{i=1}^{N_k} \overline{B}(x_i, \frac{1}{k})$.

Comme précédent pour montrer qu'une mesure de proba sur un espace polonais est tendue, on voit que K est compact et que $\forall n \geq 1$, $\mu_n(K) \geq 1 - \varepsilon$

~

Corollaire Soit (E,d) polonais, $(\mu_n)_{n\geq 1}$ suite de $\mathcal{M}_1(\mathbb{R})$, $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R})$. Alors

$\mu_n \Rightarrow \mu$ ssi $\begin{cases} (\mu_n)_{n\geq 1} \text{ est tendue} \\ \text{si } \phi \text{ extraction et } \nu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}) \text{ tq } \mu_{\phi(n)} \Rightarrow \nu, \text{ alors } \mu = \nu \end{cases}$

La preuve est la même que celle vue pour $E = \mathbb{R}$ au cours 1.

Reformulation probabiliste : Soit $(X_n)_{n\geq 1}$, X des v.a à valeurs dans un espace polonais. Alors

$X_n \xrightarrow{loi} X$ ssi $\begin{cases} (X_n) \text{ est tendue, i.e } \forall \varepsilon > 0, \exists K_\varepsilon \text{ compact, } \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(X_n \notin K_\varepsilon) \leq \varepsilon \\ \text{si } X_{\phi(n)} \xrightarrow{loi} Y, \text{ alors } X \overset{loi}{=} Y. \end{cases}$

Application Soit $(X_n)_{n\geq 1}$ et $(Y_n)_{n\geq 1}$ des va à valeurs dans (E,d) et (E',d') polonais. On suppose $X_n \xrightarrow{loi} X$, $Y_n \xrightarrow{loi} Y$ et $X_n \perp\!\!\!\perp Y_n$ $\forall n$.

Alors $(X_n, Y_n) \xrightarrow{loi} (\tilde{X}, \tilde{Y})$ avec $\tilde{X} \overset{loi}{=} X$, $\tilde{Y} \overset{loi}{=} Y$ et $\tilde{X} \perp\!\!\!\perp \tilde{Y}$

Preuve : Étape 1 : $((X_n, Y_n))_{n\geq 1}$ est tendu.

En effet, puisque $X_n \xrightarrow{loi} X$, $Y_n \xrightarrow{loi} Y$, pour $\varepsilon > 0$, $\exists$ compacts K, K' de E, E' tq $\mathbb{P}(X_n \in K) \geq 1 - \varepsilon$ et $\mathbb{P}(Y_n \in K') \geq 1 - \varepsilon$.

Alors $\mathbb{P}((X_n, Y_n) \in K \times K') \geqslant 1 - 2\varepsilon$ avec $K \times K'$ compact de $E \times E'$

Étape 2 : Unicité de la limite

Si $(X_{\varphi(n)}, Y_{\varphi(n)}) \xrightarrow{loi} (\tilde{X}, \tilde{Y})$, alors $\forall f \in \mathcal{C}_b(E)$, $\forall g \in \mathcal{C}_b(E')$,

$$\begin{array}{ccc} \mathbb{E}[f(X_{\varphi(n)})\, g(Y_{\varphi(n)})] & = & \mathbb{E}[f(X_{\varphi(n)})]\, \mathbb{E}[g(Y_{\varphi(n)})] \\ \downarrow n \to \infty & & \downarrow n \to \infty \\ \mathbb{E}[f(\tilde{X})\, g(\tilde{Y})] & & \mathbb{E}[f(X)]\, \mathbb{E}[g(Y)]. \end{array}$$

Comme dans la preuve de porte-manteau, on approche $\mathbb{1}_{F \times F'}$ avec F, F' fermés et on conclut par classe monotone

$\sim$

3) Propriétés topologiques de $\mathcal{M}_1(E)$

Soit (E,d) un espace métrique.

Définition Pour $\mu,\nu \in \mathcal{M}_1(E)$, on pose

$$d_{LP}(\mu,\nu) = \inf\{\varepsilon > 0 : \forall A \in \mathcal{B}_E,\ \mu(A) \leq \nu(A^\varepsilon) + \varepsilon \text{ et } \nu(A) \leq \mu(A^\varepsilon) + \varepsilon\}.$$

où $A^\varepsilon = \{x \in E : d(x,A) < \varepsilon\}$ est le ε-voisinage ouvert de A

d_{LP} est appelée distance de Lévy-Prokhorov sur $\mathcal{M}_1(E)$

Proposition d_{LP} est une distance

Preuve : • symétrie : ok. • inégalité triangulaire : provient de $(A^\varepsilon)^\eta \subset A^{\varepsilon+\eta}$

• Séparation : si $d_{LP}(\mu,\nu) = 0$, alors pour tout fermé F,

$\mu(F) \leq \nu(F^{\frac{1}{n}}) + \frac{1}{n}$ et $\nu(F) \leq \mu(F^{\frac{1}{n}}) + \frac{1}{n}$.

Comme $F = \bigcap_{n\geq 1} F^{\frac{1}{n}}$, en faisant $n \to \infty$ on en déduit $\mu(F) \leq \nu(F)$ et $\nu(F) = \mu(F)$

Donc $\mu = \nu$ sur les fermés. Donc $\mu = \nu$

Il peut parfois être utile d'utiliser une définition non-symétrique de d_{LP} :

Lemme : On a $d_{LP}(\mu,\nu) = \inf\{\varepsilon > 0 : \forall A \in \mathcal{B}_E,\ \mu(A) \leq \nu(A^\varepsilon) + \varepsilon\}$

Preuve : Soit $\varepsilon > 0$ tq $\forall A \in \mathcal{B}_E$, $\mu(A) \leq \nu(A^\varepsilon) + \varepsilon$. Soit $A \in \mathcal{B}_E$.

On vérifie que $\left({}^c(A^\varepsilon)\right)^\varepsilon \subset {}^cA$, de sorte que

$\nu(A) = 1 - \nu({}^cA) \leq 1 - \nu\left(\left({}^c(A^\varepsilon)\right)^\varepsilon\right) \leq 1 - \mu({}^c(A^\varepsilon)) + \varepsilon = \mu(A^\varepsilon) + \varepsilon$

La distance de Lévy-Prokhorov est liée à la convergence étroite :

Proposition Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{M}_1(E)$ et $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$.

1. $d_{LP}(\mu_n,\mu) \to 0$ implique $\mu_n \Rightarrow \mu$
2. Si E est séparable, $\mu_n \Rightarrow \mu$ implique $d_{LP}(\mu_n,\mu) \to 0$

Ainsi, lorsque E est séparable, d_{LP} métrise la convergence étroite sur $\mathcal{M}_1(E)$

Preuve: 1) On suppose $d_{LP}(\mu_n,\mu)\to 0$. Soit F fermé, $\varepsilon>0$. Soit n_0 tq $n\geq n_0$ implique $\mu_n(F)\leq\mu(F^\varepsilon)+\varepsilon$. Donc $\limsup_{n\to\infty}\mu_n(F)\leq\mu(F^\varepsilon)+\varepsilon$.

En faisant $\varepsilon\to 0$, on en déduit que $\limsup_{n\to\infty}\mu_n(F)\leq\mu(F)$

Donc par porte-manteau, $\mu_n\Rightarrow\mu$

2) Soit E séparable et $\mu_n\Rightarrow\mu$.

Soit $\varepsilon>0$. On mq pour n assez grand, $\forall A\in\mathcal{B}_E$, $\mu(A)\leq\mu_n(A^{2\varepsilon})+2\varepsilon$

On remarque que pour $A\in\mathcal{B}_E$, comme A^ε est ouvert, par porte-manteau,

$$\mu(A)\leq\mu(A^\varepsilon)\leq\mu_n(A^\varepsilon)+\varepsilon \quad \text{pour } n \text{ assez grand}.$$

La difficulté est de le faire uniformément en A. Pour ça, on utilise la séparabilité pour se restreindre à un nombre fini de A.

Soit $(x_i)_{i\geq 1}$ une suite dense dans E.

Puisque $E=\bigcup_{i=1}^{\infty}B(x_i,\varepsilon)$, il existe N tq $\mu\left(\bigcup_{i=1}^{N}B(x_i,\varepsilon)\right)\geq 1-\varepsilon$.

Par porte-manteau, il existe n_0 tq $n\geq n_0$ implique

$$\mu_n(O)\geq\mu(O)-\varepsilon \quad \text{pour tout } O \text{ de la forme } B(x_{i_1},\varepsilon)\cup\dots\cup B(x_{i_k},\varepsilon)$$

avec $k\leq N$ et $1\leq i_1<i_2<\dots<i_k\leq N$

Soit $A\in\mathcal{B}_E$ quelconque et posons $O_A=\bigcup_{\substack{1\leq i\leq N\\ B(x_i,\varepsilon)\cap A\neq\emptyset}}B(x_i,\varepsilon)$

Si $x\in A\setminus O_A$, $x\in{}^c\left(\bigcup_{i=1}^{N}B(x_i,\varepsilon)\right)$, donc est dans un ensemble de mesure $\leq\varepsilon$,

donc $\mu(A)\leq\mu(O_A)+\varepsilon\leq\mu_n(O_A)+2\varepsilon$

Or $O_A\subset A^{2\varepsilon}$. Donc $\mu(A)\leq\mu_n(A^{2\varepsilon})+2\varepsilon$.

Donc $d_{LP}(\mu,\mu_n)\leq 2\varepsilon$ d'après le lemme précédent

Corollaire du thm de Prokhorov Si (E,d) est compact, alors $(\mathcal{M}_1(E), d_{LP})$ est compact

Preuve : Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{M}_1(E)$. Il suffit de mq $(\mu_n)_{n\geq 1}$ admet une valeur d'adhérence. Comme E est compact, $(\mu_n)_{n\geq 1}$ est tendue. Il existe donc φ extraction et $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$ tq $\mu_{\varphi(n)} \Rightarrow \mu$.

Comme E est séparable, $\mu_{\varphi(n)} \to \mu$ dans $(\mathcal{M}_1(E), d_{LP})$.

Remarque Lorsque (E,d) est séparable, le théorème de Prokhorov se reformule en : si $A \subset \mathcal{M}_1(E)$, la famille $\{\mu : \mu \in A\}$ est tendue ssi A est relativement compact dans $(\mathcal{M}_1(E), d_{LP})$

Théorème Soit (E,d) un espace métrique

1. Si E est séparable, alors $(\mathcal{M}_1(E), d_{LP})$ est séparable
2. Si E est complet séparable, alors $(\mathcal{M}_1(E), d_{LP})$ est complet séparable

Preuve : 1. Soit $(x_i)_{i\geq 1}$ une suite dense de E. On mq l'ensemble des mesures de la forme
$$\nu = \sum_{m\in M} r_m \delta_{x_m} \quad \text{avec } M \subset \mathbb{N}, \ \# M < \infty$$
et (r_m) des rationnels de somme 1 est dense. Soit $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$

$$\text{Soit } \varepsilon > 0, \ M \subset \mathbb{N}, \# M < \infty \text{ tq } \mu\Big(\bigcup_{m\in M} B_{(x_m,\varepsilon)}\Big) \geq 1-\varepsilon.$$

En remplaçant les $B_{(x_m,\varepsilon)}$ par des intersections de celles-ci, on écrit
$$\bigcup_{m\in M} B(x_m,\varepsilon) = \bigsqcup_{m\in M} B_m \quad \text{avec } x_m \in B_m \subset B(x_m,\varepsilon)$$
On pose alors $\nu = \sum_{m\in M} r_m \delta_{x_m}$, avec (r_m) choisis tq $\sum_{m\in M} |r_m - \mu(B_m)| \leq \varepsilon$

Si $A \in \mathcal{B}(E)$, on pose $\tilde{A} = \bigsqcup_{m\in M,\, B_m\cap A\neq\emptyset} B_m$.

Alors $\mu(A) \leq \mu(\tilde{A}) + \mu(A\setminus\tilde{A}) \leq \mu(\tilde{A}) + \varepsilon$.

Or $|\mu(\tilde{A}) - \nu(\tilde{A})| \leq \varepsilon$ et $\tilde{A} \subset A^{\varepsilon}$, donc

$\mu(A) \leq \nu(A^{2\varepsilon}) + 2\varepsilon$, donc $d_{LP}(\mu,\nu) \leq 2\varepsilon$

② Soit $(\mu_n)_{n\geq 1}$ une suite de Cauchy pour d_{LP}. Il suffit de mq $(\mu_n)_{n\geq 1}$ est tendue (elle convergera alors vers cette valeur d'adhérence par propriétés des suites de Cauchy). Soit $\varepsilon > 0$, et φ extraction tq

$\forall\, i \geq \varphi(n),\ d_{LP}(\mu_i, \mu_{\varphi(n)}) \leq \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$.

Par tension de $\mu_1, \dots, \mu_{\varphi(n)}$, il existe K_n compact tq $\mu_i(K_n) \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}}$ pour $i = 1, \dots, \varphi(n)$.

Alors pour $i \geq \varphi(n)$, $\mu_i\left(K_n^{\varepsilon/2^{n+1}}\right) \geq \mu_{\varphi(n)}(K_n) - \frac{\varepsilon}{2^{n+1}} \geq 1 - \frac{\varepsilon}{2^n}$

C'est aussi vrai pour $i = 1, 2, \dots, \varphi(n)$

En posant $K = \bigcap_{n\geq 1} \overline{K_n^{\frac{\varepsilon}{2^{n+1}}}}$, on vérifie que K est compact (car précompact et fermé) et de mesure $\geq 1-\varepsilon$. Ceci conclut.

4) Compléments de topologie (facultatif)

Quelques rappels de topologie (cf par exemple les notes de cours <u>Topologie, analyse et calcul différentiel</u> de Frédéric Paulin, disponibles sur sa page web)

• Une topologie sur un ensemble E est un ensemble $\mathcal{O}$ de parties de E, appelés ouverts tel que :

① Toute intersection finie d'éléments de $\mathcal{O}$ appartient à $\mathcal{O}$

② Toute union d'éléments de $\mathcal{O}$ appartient à $\mathcal{O}$.

Un espace topologique est un ensemble muni d'une topologie.

• Une base d'ouverts d'un espace topologique $(E, \mathcal{O})$ est une partie $\mathcal{B}$ de $\mathcal{O}$ telle que tout ouvert de E soit union d'éléments de $\mathcal{B}$, i.e $\forall U \in \mathcal{O}, \forall x \in U, \exists V \in \mathcal{B}, x \in V \subset U$.

Il est possible de montrer que si $(E, \mathcal{O})$ a une base dénombrable d'ouverts, alors E est séparable. La réciproque est vraie dans un espace métrique, mais fausse en général (prendre par exemple $E = \mathbb{R}$ muni de la topologie cofinie, où les ouverts sont $\emptyset$ et de la forme $\mathbb{R} \setminus F$ avec $F \subset \mathbb{R}$ fini).

• En général, la propriété "être une base d'ouverts d'une certaine topologie" n'est pas automatique pour un ensemble de parties d'un ensemble. On a toutefois le critère suivant : si $\mathcal{B}$ est une partie de $\mathcal{P}(E)$ tq $\bigcup \mathcal{B} = E$ et tq

$$\forall U, V \in \mathcal{B}, \forall x \in U \cap V, \exists W \in \mathcal{B}, \quad x \in W \subset U \cap V,$$

alors l'ensemble $\mathcal{O}$ des unions d'éléments de $\mathcal{B}$ est la topologie engendrée par $\mathcal{B}$. En particulier, $\mathcal{B}$ est une base d'ouverts de sa topologie engendrée (plus petite topologie qui contient $\mathcal{B}$).

• Si $(E, \mathcal{O})$ est un espace topologique, on dit qu'une suite (x_n) d'éléments de E converge vers $x \in E$ si $\forall U \in \mathcal{O}$ tq $x \in U$, $\exists N$ tq $n \geq N \Rightarrow x_n \in U$

Attention : Deux topologies différentes peuvent avoir les mêmes suites convergentes (prendre par exemple $\mathbb{N}$ muni de la topologie discrète (qui est métrisable) τ_1 et $\tau_2 = \{A \subset \mathbb{N} : 1 \notin A \text{ ou } \sum_{n \in \mathbb{N} \setminus A} \frac{1}{n} < +\infty\}$)

• Si d est une distance sur E, l'ensemble $\mathcal{O}$ des parties U de E telles que

$\forall x \in U, \exists \varepsilon > 0, B(x, \varepsilon) \subset U$ est une topologie sur E, appelée topologie induite par d. Un espace topologique $(E, \mathcal{O})$ est dit métrisable s'il existe une di

• Les notions de "être à base dénombrable d'ouverts", de "séparabilité", de "convergence", de "être métrisable" sont invariantes par homéomorphismes

~

Il est parfois plus naturel de directement définir une topologie sans référence à une métrique, qui peut être peu naturelle, pas commode à utiliser, ou rarement canonique.
Par ailleurs, un espace topologique peut être complet ou non complet pour des métriques qui le métrisent.

C'est pour cette raison que la "bonne" définition d'un espace polonais est : un espace topologique séparable, métrisable par une distance complète.

$\sim$

Mettons en oeuvre ce qui précède dans le cadre d'une topologie sur l'espace des mesures de probabilité.

Soit E un espace topologique métrisable. Compte tenu de la définition de la convergence étroite, il est naturel de considérer la plus petite topologie sur $\mathcal{M}_1(E)$ pour laquelle les fonctions $\mu \mapsto \mu(f)$ sont continues pour $f \in C_b(E)$ (i.e la topologie initiale sur $\mathcal{M}_1(E)$ définie par les applications $\mu \mapsto \mu(f)$ pour $f \in C_b(E)$), appelée topologie faible-étoile sur $\mathcal{M}_1(E)$ (aussi abrégé en faible-$*$)

Lemme La famille de parties

$$B_{(\mu, \varepsilon, f_1, \dots, f_n)} = \{ \nu \in \mathcal{M}_1(E) \ : \ |\mu(f_i) - \nu(f_i)| < \varepsilon \quad \forall 1 \leq i \leq n \}$$

pour $\varepsilon > 0$, $f_1, \dots, f_n \in C_b(E)$ et $\mu \in \mathcal{M}_1(E)$, constitue une base de voisinages de la topologie faible-$*$ sur $\mathcal{M}_1(E)$

Preuve
- Ces parties sont bien des ouverts de la topologie faible-$*$
- La topologie engendrée par cette famille rend les fonctions $\mu \mapsto \mu(f)$ pour $f \in C_b(E)$ continues, donc elle contient la topologie faible-$*$.

$\sim$

Proposition 1) Soit $\mu_n, \mu \in \mathcal{M}_1(E)$. Alors $\mu_n \Rightarrow \mu$ ssi $\mu_n \to \mu$ au sens de la topologie faible-$*$

2) Lorsque E est séparable, d_{LP} métrise la topologie faible-$*$

Preuve : 1) • On suppose $\mu_n \Rightarrow \mu$. Soit U ouvert faible-$*$ contenant μ. Il existe alors un ouvert de la forme $B_{(\mu, \varepsilon, f_1, \dots, f_k)}$ inclus dans U.

Puisque $\mu_n \Rightarrow \mu$, $\max_{1\le i\le k} |\mu_n(f_i) - \mu(f_i)| \to 0$ et donc $\mu_n \in B_{(\mu,\varepsilon,f_1,\dots,f_k)}$ pour n assez grand.

• On suppose $\mu_n \to \mu$ au sens de la topologie faible-$*$. Alors $\forall f \in C_b(E)$, $\forall \varepsilon > 0$, $\mu_n \in B_{(\mu,\varepsilon,f)}$ pour n assez grand, i.e $|\mu_n(f) - \mu(f)| \le \varepsilon$.

2) • Soit U un ouvert faible-$*$ et $\mu \in U$. Raisonnons par l'absurde en supposant que $\forall \varepsilon > 0$, $B_{d_{LP}}(\mu, \varepsilon) \not\subset U$. Il existe alors une suite $\mu_n \in \mathcal{M}_1(E)$ tq $\mu_n \xrightarrow{d_{LP}} \mu$ et $\mu_n \notin U$ $\forall n \ge 0$. Mais on a vu que $\mu_n \xrightarrow{d_{LP}} \mu$ implique $\mu_n \Rightarrow \mu$, et par 1) cela implique que $\mu_n \to \mu$ pour la topologie faible-$*$, absurde

• On montre que $\forall \mu \in \mathcal{M}_1(E)$, $\forall \varepsilon > 0$, $B_{d_{LP}}(\mu, \varepsilon)$ est un voisinage de μ pour la topologie faible-$*$. La preuve est très proche de celle utilisée pour montrer que $\mu_n \Rightarrow \mu$ implique $d_{LP}(\mu_n, \mu) \to 0$

Soit $(x_i)_{i\ge1}$ dense dans E et N tq $\mu(\bigcup_{i\ge N} B(x_i, \varepsilon)) < \varepsilon$.

Pour $I \subset \{1, 2, \dots, N\}$ on note $B_I = \bigcup_{i\in I} B(x_i, \varepsilon)$ et on pose

$$f_I(x) = \max\left(1 - \frac{1}{\varepsilon} d(x, B_I), 0\right)$$

de sorte que $\mathbb{1}_{B_I} \le f_I \le \mathbb{1}_{B_I^\varepsilon}$.

Soit alors $V = \{\nu \in \mathcal{M}_1(E) : |\nu(f_I) - \mu(f_I)| < \varepsilon \ \forall I \subset \{1, 2, \dots, N\}\}$, voisinage de μ pour la topologie faible-$*$.

Montrons que $V \subset B_{d_{LP}}(\mu, 2\varepsilon)$. Soit $A \in \mathcal{B}(E)$ et posons

$I_A = \{i \in \{1, \dots, N\} : A \cap B(x_i, \varepsilon) \ne \emptyset\}$.

Comme $(B_{I_A})^\varepsilon \subseteq A^{2\varepsilon}$, on a

$$\mu(A) \leq \mu(B_{I_A}) + \mu(A \setminus B_{I_A})$$
$$\leq \mu(B_{I_A}) + \mu\Big(\bigcup_{i>N} B(x_i, \varepsilon)\Big)$$
$$\leq \mu(f_{I_A}) + \varepsilon$$
$$\leq \nu(f_{I_A}) + 2\varepsilon$$
$$\leq \nu((B_{I_A})^{\varepsilon}) + 2\varepsilon$$
$$\leq \nu(A^{2\varepsilon}) + 2\varepsilon,$$

d'où le résultat

Lorsque E est un espace topologique métrisable et que $\mathcal{M}_1(E)$ est muni de la topologie faible-$*$, il est possible de montrer que

$$E \text{ compact} \iff \mathcal{M}_1(E) \text{ compact}$$
$$E \text{ séparable} \iff \mathcal{M}_1(E) \text{ séparable}$$
$$E \text{ polonais} \iff \mathcal{M}_1(E) \text{ polonais}$$