Cours 4 : L'espace des fonctions continues sur un compact, 1/2

Plan : 1) Caractère polonais

2) Marginales fini-dimensionnelles

3) Convergence en loi dans cet espace

4) Compacité dans cet espace (Arzela-Ascoli)

Notation Si X, Y sont des espaces métriques, on note $C(X,Y)$ l'ensemble des fonctions continues de X dans Y, muni de la distance $d(f,g) = \sup_{x \in X} d_Y(f(x), g(x))$ lorsque X est compact

1) Caractère polonais

Proposition Soit (K,ρ) un espace métrique compact et (E,d) un espace polonais. Alors $(C(K,E), d)$ est polonais.

Preuve : Complétude : Si $(f_n)_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans $C(K,E)$, alors $\forall x \in K$, $(f_n(x))_{n\geq 1}$ est de Cauchy dans E, donc converge vers une limite notée $f(x)$. On vérifie alors que $d(f_n, f) \to 0$ et que $f \in C(K,E)$.

Séparabilité : On pose pour $m, n \geq 1$

$$C_{m,n} = \left\{ f \in C(K,E) : \forall x,y \in E,\ \rho(x,y) < \frac{1}{m} \Rightarrow d(f(x), f(y)) < \frac{1}{n} \right\}$$

Puisque K est compact, pour tout $m \geq 1$, il existe un ensemble fini K_m tq $K = \bigcup_{x \in K_m} B(x, \frac{1}{2m})$. On note $K_m = \{x_1^m, \dots, x_{k_m}^m\}$.

Aussi, par séparabilité de E, pour tout $n \geq 1$, il existe un ensemble dénombrable $\mathcal{U}_n = \{U_1^n, U_2^n, \dots\}$ d'ouverts qui recouvrent E et de diamètre $< \frac{1}{n}$

Enfin, pour un k_m-uplet $(i_1, \dots, i_{k_m})$ d'entiers ≥ 1, on note, si elle existe, $f^{m,n}_{(i_1,\dots,i_{k_m})} \in C_{m,n}$ une fonction telle que $f^{m,n}_{(i_1,\dots,i_{k_m})}(x_j^m) \in U^n_{i_j}$ pour tout $1 \leq j \leq k_m$. Soit $D_{m,n}$ l'ensemble de telles fonctions.

Vérifions que $\forall f \in C_{m,n}$, $\exists g \in D_{m,n}$ tq $\forall 1 \leq j \leq k_m$, $d(f(x_j^m), g(x_j^m)) \leq \frac{1}{n}$

Pour cela, soit $f \in C_{m,n}$, et choisissons $i_1, \dots, i_{k_m}$ tels que $f(x_j^m) \in U^n_{i_j}$ pour $1 \leq j \leq k_m$ En particulier $f^{m,n}_{(i_1,\dots,i_{k_m})}$ existe et $g = f^{m,n}_{(i_1,\dots,i_{k_m})}$ convient (car $\mathrm{diam}(U_i^n) < \frac{1}{n}$, $\forall i$).

Soit maintenant $D = \bigcup_{m,n} D_{m,n}$, dénombrable. Vérifions que D est dense dans $C(K,E)$. Soit $f \in C(K,E)$ et $\varepsilon > 0$. Fixons $n > 3/\varepsilon$. Puisque f est uniformément continue, $\exists m \geq 1$ tq $f \in C_{m,n}$. Soit alors $g \in D_{m,n}$ tq $d(f(x_j^m), g(x_j^m)) < \frac{1}{n}$ $\forall 1 \leq j \leq k$.

Par inégalité triangulaire, on déduit $\forall x \in K$, avec x_j^m tq $x \in B(x_j^m, \frac{1}{2m})$,

$$d(f(x), g(x)) \leq d(f(x), f(x_j^m)) + d(f(x_j^m), g(x_j^m)) + d(g(x_j^m), g(x)) \leq \frac{3}{n} \leq \varepsilon.$$

$\sim$

2) Marginales fini-dimensionnelles

a) L'espace des fonctions

Soit (E,d) un espace polonais et I un ensemble quelconque. L'ensemble E^I des fonctions de I dans E est naturellement muni de la tribu produit (comme pour $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$ dans le cours 2)

Définition: La <u>tribu produit</u> sur E^I, notée $\mathcal{B}(E)^{\otimes I}$, est la plus petite tribu sur E^I qui rend pour tout $t \in I$ les applications $\pi_t : \begin{array}{l} E^I \longrightarrow (E, \mathcal{B}(E)) \\ (x_i)_{i\in I} \longmapsto x_t \end{array}$ mesurables

Elle est parfois appelée <u>tribu cylindrique</u>

Remarques On vérifie que :

- les ensembles de la forme $\{(x_i)_{i\in I} : x_{t_1} \in A_1, \dots, x_{t_k} \in A_k\} = \pi_{t_1}^{-1}(A_1) \cap \dots \cap \pi_{t_k}^{-1}(A_k)$ pour $A_1, \dots, A_k \in \mathcal{B}(E)$ et $t_1, \dots, t_k \in I$, appelés <u>cylindres</u>, forment un π-système générateur de $\mathcal{B}(E)^{\otimes I}$.
- Une fonction $\begin{array}{l} (\Omega, \mathcal{F}) \longrightarrow (E^I, \mathcal{B}(E)^{\otimes I}) \\ \omega \longmapsto (x_i(\omega))_{i\in I} \end{array}$ est mesurable ssi $\forall i \in I$ $\omega \mapsto x_i(\omega)$ est mesurable. En particulier $(X_i)_{i\in I}$ est une v.a (à valeurs dans E^I) ssi $\forall i \in I$, X_i est une v.a.

Définition Soit $\mu \in \mathcal{M}_1(E^I)$. Pour $i_1, \dots, i_k \in I$, on note $\mu_{i_1,\dots,i_k}$ la mesure image de μ sur $(E^k, \mathcal{B}(E)^{\otimes k})$ par l'application $\begin{array}{l} E^I \longrightarrow E^k \\ (x_i)_{i\in I} \mapsto (x_{i_1}, \dots, x_{i_k}) \end{array}$. Si $(X_i)_{i\in I}$ a pour loi μ, c'est la loi de $(X_{i_1}, \dots, X_{i_k})$. Les mesures $\{\mu_{i_1,\dots,i_k} : i_1, \dots, i_k \in I\}$ sont appelées <u>marginales de dimension k de μ</u>. La famille formée de toutes les marginales de dimension k, $k \geq 1$, est appelée <u>famille des marginales de dimension finie de μ</u> (<u>fdi</u> en abrégé)

Proposition Une mesure $\mu \in \mathcal{M}_1(E^I)$ est caractérisée par ses marginales fdi

En particulier, la loi d'une v.a. $(X_i)_{i\in I} \in E^I$ est caractérisée par ses lois fdi

Preuve : ceci provient du fait que les cylindres forment un π-système générateur de $\mathcal{E}^{\otimes T}$, et donc deux mesures de $\mathcal{M}_1(E^T)$ qui coïncident dessus sont égales d'après le lemme des classes monotones.

~

L'avantage de ce point de vue est l'existence de v.a :

Théorème d'extension de Kolmogorov On se donne sur E^T une famille de marginales fini-dimensionnelles $\{\mu_{i_1,\dots,i_k}\}$ cohérentes, au sens où si $\mathcal{L}((X_{i_1},\dots,X_{i_k})) = \mu_{i_1,\dots,i_k}$, alors $\forall 1\leq j\leq k$, $\mathcal{L}((X_{i_1},\dots,\hat{X}_{i_j},\dots X_{i_k})) = \mu_{i_1,\dots,\hat{i_j},\dots,i_k}$

Alors il existe $\mu\in\mathcal{M}_1(E^T)$ dont les marginales fidi sont celles ci-dessus

le ^ signifie qu'on enlève ce terme.

Ceci permet par exemple de définir le (pré) mouvement brownien comme variable aléatoire à valeurs dans $\mathbb{R}^{\mathbb{R}_+}$.

Pb en général E^T n'est pas polonais. Ce cadre n'est pas bien adapté à la convergence étroite !

b) L'espace des fonctions continues

Notons ici $C = C(K,E)$ avec K compact, (E,d) un espace polonais, et $\mathcal{B}_C$ la tribu borélienne sur C. On note $\mathcal{P}_C$ la trace sur C de la tribu produit $\mathcal{B}(E)^{\otimes K}$, i.e $\mathcal{P}_C = \{A\cap C : A\in\mathcal{B}(E)^{\otimes K}\}$. De manière équivalente, c'est la plus petite tribu sur C qui rend toutes les projections $\pi_t : \begin{array}{l} C \longrightarrow E \\ f \longmapsto f(t)\end{array}$ mesurables (cf feuille d'exos)

Proposition Les tribus $\mathcal{B}_C$ et $\mathcal{P}_C$ sont les mêmes.

Preuve : ⊛ Puisque $\forall x \in K$, $\pi_x : C \to E$ est continue, elle est mesurable pour $\mathcal{B}_C$. Donc $\mathcal{P}_C \subset \mathcal{B}_C$

⊛ Pour montrer que $\mathcal{B}_C \subset \mathcal{P}_C$ il y a deux étapes.

Étape 1 : les boules ouvertes de C sont mesurables pour $\mathcal{P}_C$. Pour le voir, on fixe $f_0 \in C$ et on considère $F : \begin{array}{l} C \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto d(f, f_0) \end{array}$. Puisque K est compact, il existe $D \subset K$ dénombrable dense.

Par continuité, $d(f, f_0) = \sup_{x \in D} d(f(x), f_0(x))$, et puisque $\forall x \in D$, $\begin{array}{l} (C, \mathcal{P}_C) \longrightarrow \mathbb{R} \\ f \longmapsto d(f(x), f_0(x)) \end{array}$ est mesurable (c'est la composée $\phi \circ \pi_x$ avec $\phi : \begin{array}{l} \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R} \\ y \longmapsto d(y, f_0(x)) \end{array}$ continue donc mesurable), $F : (C, \mathcal{P}_C) \to \mathbb{R}$ est mesurable comme le sup d'une famille dénombrable d'applications mesurables. Ainsi, $\forall r > 0$, $F^{-1}([0, r[) \in \mathcal{P}_C$, i.e. $\{f \in C : d(f, f_0) < r\} \in \mathcal{P}_C$

Étape 2 : Par séparabilité de C, tout ouvert de C est union dénombrable de boules ouvertes (cf feuille d'exos). Cela conclut.

~

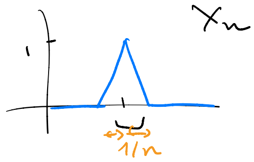
D'après ce qui précède, les marginales fidi $\{\mu_{t_1, \dots, t_k} : t_1, \dots, t_k \in K\}$ d'une mesure $\mu \in \mathcal{M}_1(C)$ la caractérisent.

⚠ L'ensemble $\{f \in \mathbb{R}^{[0,1]} : f \text{ est continue}\}$ n'est pas mesurable par rapport à $\mathcal{B}(\mathbb{R})^{\otimes [0,1]}$ (cf feuille d'exos)

3) Convergence en loi dans cet espace

Définition Soit $\mu_n, \mu \in \mathcal{M}_1(C)$. On dit que μ_n converge vers μ au sens des fidi si $\forall t_1, \dots, t_k \in K$, $(\mu_n)_{t_1, \dots, t_k} \Rightarrow \mu_{t_1, \dots, t_k}$. On note $\mu_n \xrightarrow{f.d.} \mu$. De même, une suite $(X_n)_{n \geq 1}$ de v.a à valeurs dans C converge vers X au sens des fidi si $\forall t_1, \dots, t_k \in K$ $(X_n(t_1), \dots, X_n(t_k)) \xrightarrow{loi} (X(t_1), \dots, X(t_k))$.

! Attention ! Par continuité des projection, la convergence étroite dans C implique la convergence des fidi. Cependant, contrairement à $\mathbb{R}^{\mathbb{N}}$, la réciproque est fausse : Soit U uniforme sur $[0,1]$, $X_n(t) = \max(0, 1 - n|U - t|)$ pour $0 \leq t \leq 1$



Alors $X_n \xrightarrow{f.d} 0$, mais $X_n \overset{loi}{\not\to} 0$ dans C. En effet, si c'était le cas, puisque $\sup : C \to \mathbb{R}$ est continue, on aurait $1 = \sup X_n \xrightarrow{loi} 0$, absurde.

Cependant, on a le résultat suivant :

Théorème Soit $\mu_n, \mu \in \mathcal{M}_1(C)$.

① $\mu_n \Rightarrow \mu$ ssi $\mu_n \xrightarrow{fd} \mu$ et $(\mu_n)_{n \geq 1}$ est tendue

② Si les fidi de (μ_n) convergent et si $(\mu_n)_{n \geq 1}$ est tendue, alors elle converge étroitement.

Preuve : ① $\boxed{\Rightarrow}$ Ok par continuité des projections et le thm de Prokhorov.

$\boxed{\Leftarrow}$ D'après le thm de Prokhorov, il suffit de mq si $\mu_{\phi(n)} \Rightarrow \nu$ alors $\mu = \nu$. Mais alors $\mu_{\phi(n)} \xrightarrow{f.d} \nu$. Donc μ et ν ont les mêmes fidi, donc sont égales

② Par tension, $\exists$ ϕ extraction et $\mu \in \mathcal{M}_1(C)$ tq $\mu_{\phi(n)} \Rightarrow \mu$.

Alors $\mu_{\phi(n)} \xrightarrow{fd} \mu$ et donc $\mu_n \xrightarrow{fd} \mu$. Donc $\mu_n \Rightarrow \mu$ par ①

~

Ainsi, dans $C([0,1], E)$, $(X_n(t))_{0\leq t\leq 1} \xrightarrow{loi} (X(t))_{0\leq t\leq 1}$ ssi $\forall\, 0\leq t_1 < \dots < t_k \leq 1$

on a $(X_n(t_1), \dots, X_n(t_k)) \xrightarrow{loi} (X(t_1), \dots, X(t_k))$ et $(X_n)_{n\geq 1}$ est tendu.

Remarque Étant donnée une famille $\mathcal{F}$ de fidi cohérentes, d'après le thm d'extension de Kolmogorov, il existe $\mu \in \mathcal{M}_1(\mathbb{R}^{[0,1]})$ dont les fidi sont $\mathcal{F}$. Mais rien ne garantit qu'il existe une telle $\mu \in \mathcal{M}_1(C)$.

D'après le théorème précédent, c'est le cas si les fidis $\mathcal{F}$ sont limites fidi d'une famille tendue de $\mathcal{M}_1(C)$.

Pour appliquer le théorème précédent, il s'agit maintenant d'identifier les compacts de C.

4) Compacité dans C

La notion d'équicontinuité est fondamentale.

Définition Une famille $\mathcal{F} \subset C(X,Y)$ est dite équicontinue si

$$\forall \varepsilon>0, \exists \eta>0, \forall x,y \in X, \forall f \in \mathcal{F}, \quad d_X(x,y) \leq \eta \Rightarrow d_Y(f(x), f(y)) \leq \varepsilon$$

En notant pour $f \in \mathcal{F}$ et $\eta > 0$

$$w(f,\eta) = \sup\{ d_Y(f(x), f(y)) \,;\, x,y \in X,\, d_X(x,y) \leq \eta \}$$

le module de continuité de f,

c'est équivalent à $\forall \varepsilon>0, \exists \eta>0, \sup_{f\in \mathcal{F}} \omega(f,\eta) \leq \varepsilon$

Théorème (Arzela-Ascoli) Soit (K,d) compact et (E,d) un espace métrique complet. Soit $\mathcal{F} \subset C(K,E)$. Alors $\mathcal{F}$ est relativement compacte dans $C(K,E)$ ssi

- $\mathcal{F}$ est équicontinue
- $\exists D\subset K$ dénombrable dense tq $\forall x\in D$, $\mathcal{F}(x)=\{f(x), f\in\mathcal{F}\}$ est relativement compact dans E

Preuve $\boxed{\Leftarrow}$ Soit $(f_n)_{n\geq 1}$ une suite de $\mathcal{F}$. On trouve une sous-suite qui converge uniformément. Écrivons $D=\{a_n : n\geq 1\}$. Puisque $(f_n(a_k))_{n\geq 1} \in \overline{\mathcal{F}(a_k)}$, compact dans E, il existe par procédé diagonal une extraction φ telle que $(f_{\varphi(n)}(a_k))_{n\geq 1}$ converge $\forall k\geq 1$.

Posons $g_n(x)=f_{\varphi(n)}(x)$ pour simplifier les notations.

- Vérifions que $\forall x\in K$, $(g_n(x))_{n\geq 1}$ converge.

Comme E est complet, il suffit de montrer qu'elle est de Cauchy.

Pour cela, on fixe $\varepsilon>0$ et $\eta>0$ tq $\sup_{f\in\mathcal{F}} \omega(f,\eta)\leq\varepsilon$.

Par compacité, il existe $L\geq 1$ tq $K=\bigcup_{i=1}^{L} B(a_i,\eta)$.

Pour $1\leq i\leq L$, puisque $(g_n(a_i))_{n\geq 1}$ converge, elle est de Cauchy.

Il existe donc N tq $p,q\geq N, 1\leq k\leq L \Rightarrow d_E(g_p(a_k), g_q(a_k))\leq\varepsilon$

Fixons $x\in K$. Soit $1\leq k\leq L$ tq $d_K(x,a_k)<\eta$. Alors pour $p,q\geq N$:

$$d_E(g_p(x),g_q(x)) \leq d_E(g_p(x),g_p(a_k)) + d_E(g_p(a_k),g_q(a_k)) + d_E(g_q(a_k),g_q(x))$$
$$\leq 3\varepsilon.$$

De plus, en notant $g(x)=\lim_{n\to\infty} g_n(x)$, en passant à la limite $q\to\infty$ dans l'inégalité précédente, on obtient

$\forall x \in K,\ \forall p \geq N,\ d_E(g_p(x), g(x)) \leq 3\varepsilon.$

La convergence est donc uniforme et $g \in C(K,E)$.

$\boxed{\Rightarrow}$ • Soit $x \in K$. Montrons que $\overline{\mathcal{F}(x)}$ est compact

L'application $\Pi_x : C(K,E) \to E$, $f \mapsto f(x)$ est 1-lipschitzienne donc continue

Donc $\Pi_x(\overline{\mathcal{F}}) = \overline{\mathcal{F}}(x)$ est compact. Or $\mathcal{F} \subset \overline{\mathcal{F}}$, donc $\mathcal{F}(x) \subset \overline{\mathcal{F}}(x)$, donc $\overline{\mathcal{F}(x)} \subset \overline{\mathcal{F}}(x)$.

Donc $\overline{\mathcal{F}(x)}$, fermé dans un compact, est compact.

• Soit $\varepsilon > 0$. Par compacité de $\overline{\mathcal{F}}$, il existe $f_1, \dots, f_N \in \mathcal{F}$ tq $\mathcal{F} \subset \bigcup_{k=1}^{N} B(f_k, \varepsilon)$.

Par uniforme continuité, on peut trouver $\eta > 0$ tq

$$\forall x,y \in K,\ \forall 1 \leq k \leq N,\ d_K(x,y) \leq \eta \Rightarrow d_E(f_k(x), f_k(y)) \leq \varepsilon$$

Alors, $\forall f \in \mathcal{F}$, $\forall x, y \in E$ tels que $d_K(x,y) < \eta$, soit $1 \leq k \leq N$ tel que $d(f, f_k) < \varepsilon$ dans $C(K,E)$,

et alors $d_E(f(x), f(y)) \leq d_E(f(x), f_k(x)) + d_E(f_k(x), f_k(y)) + d_E(f_k(y), f(y))$

$$\leq 3\varepsilon.$$

Donc $\mathcal{F}$ est équicontinue.

~

Remarque : Si dans E les boules fermées sont compactes (comme dans $\mathbb{R}^k$) et si K est convexe, on a l'amélioration :

$\mathcal{F}$ relativement compacte $\Leftrightarrow$ • $\mathcal{F}$ équicontinue
• $\mathcal{F}(x_0)$ relativement compact pour un $x_0 \in K$.

En effet, on montre alors que $\mathcal{F}(x)$ est dans une boule fermée pour x dans une boule autour de x_0, puis de proche en proche pour tout $x \in K$.

Un cas typique d'application est dans $C([0,1], \mathbb{R}^k)$ en prenant $x_0 = 0$