Cours 5 : l'espace des fonctions continues sur un segment 2/2

Plan : 1) Tension dans $\mathcal{M}_1(\mathcal{C})$

2) Critère de tension de Kolmogorov

3) Fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$

1) Tension dans $\mathcal{M}_1(\mathcal{C})$

On note $\mathcal{C} = C([0,1], E)$ où (E,d) est un espace polonais, muni de la distance $d(f,g) = \sup_{x\in[0,1]} d(f(x), g(x))$ qui en fait un espace polonais. Pour $f \in \mathcal{C}$ et $h \geq 0$, on note $\omega(f,h) = \sup\{ d(f(s), f(t)) : s,t \in [0,1], |s-t| \leq h\}$ le module de continuité de f.

Remarques
- Pour $f \in \mathcal{C}$, $\lim_{h\to 0} \omega(f,h) = 0$ car f est uniformément continue
- Pour tout $h>0$, l'application $\begin{array}{l} \mathcal{C} \to \mathbb{R}_+ \\ f \mapsto \omega(f,h) \end{array}$ est continue

On rappelle le thm d'Arzela-Ascoli : une partie $K \subset \mathcal{C}$ est relativement compacte ssi

① K est équicontinue, i.e $\forall \varepsilon>0, \exists \delta>0, \sup_{f\in K} \omega(f,\delta) \leq \varepsilon$

② $\forall t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, $K(t)$ est relativement compact

Aussi, si dans E les fermés bornés sont compacts, on peut remplacer ② par

②' $K(0)$ est relativement compact.

Théorème Soit $(X^n)_{n\geq 1}$ une suite de variables aléatoires à valeurs dans $\mathcal{C}$. Elle est tendue ssi

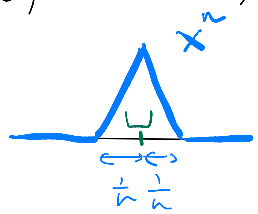
① $\forall \varepsilon>0, \forall \eta>0, \exists \delta>0$ tq $\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}(\omega(X_n, \delta) \geq \eta) \leq \varepsilon$

② $\forall t \in [0,1]\cap\mathbb{Q}$, $(X^n(t))_{n\geq 1}$ est tendue

Si dans E les fermés bornés sont compacts, on peut remplacer ② par ②' $(X^n(0))_{n\geq 1}$ est tendue

Remarque : Si $(X^n)_{n\geq 1}$ converge au sens des fidi, la condition ② est vérifiée.

Exemple : Si U est uniforme sur $[0,1]$ et $X^n(t) = \max(0, 1 - n|U-t|)$ pour $0 \le t \le 1$, la suite $(X^n)_{n\geq 1}$ n'est pas tendue.



Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$ Soit $\varepsilon > 0$ et K un compact de $\mathcal{C}$ tel que $\forall n \geq 1$, $\mathbb{P}(X^n \notin K) \leq \varepsilon$

① Par Arzela-Ascoli, on peut trouver δ tel que $\sup_{f \in K} w(f, \delta) < \eta$.

On a alors $\mathbb{P}(w(X_n, \delta) \geq \eta) \leq \mathbb{P}(X^n \notin K) \leq \varepsilon$

② Soit $t \in [0,1]$. Il existe A compact de E tel que $f(t) \in A$ $\forall f \in K$. Alors

$$\mathbb{P}(X^n(t) \notin A) \leq \mathbb{P}(X^n \notin K) \leq \varepsilon.$$

Donc $(X^n(t))_{n\geq 1}$ est tendue

$\boxed{\Leftarrow}$ Fixons $\varepsilon > 0$. Soit $(t_i)_{i \geq 1}$ une énumération des rationnels de $[0,1]$. On peut trouver A_i des compacts de E tq $\forall n \geq 1$, $\mathbb{P}(X^n(t_i) \notin A_i) \leq \frac{\varepsilon}{2^{i+1}}$, et pour tout $k \geq 1$ on peut trouver $\delta_k > 0$ tel que $\forall n \geq 1$, $\mathbb{P}\left(w(X^n, \delta_k) > \frac{1}{2^k}\right) \leq \frac{\varepsilon}{2^k}$.

En posant $K_\varepsilon = \{ f \in \mathcal{C} : \forall i \geq 1,\ f(t_i) \in A_i,\ \forall k \geq 1,\ w(f, \delta_k) \leq \frac{1}{2^k} \}$, on voit que $\mathbb{P}(X^n \notin K_\varepsilon) \leq \varepsilon$, que K_ε est fermé ($f \mapsto w(f, \delta_k)$ est continue) et que K_ε est compact par Arzela-Ascoli

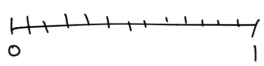
Corollaire : Soit $(X^n)_{n\geq 1}$ des variables aléatoires dans $\mathcal{C}$ telles que

① $\forall \varepsilon > 0$, $\forall \eta > 0$, $\exists \delta < 1$, $\forall t \in [0,1]$, $\limsup_{n \to \infty} \frac{1}{\delta} \mathbb{P}\left(\sup_{t \leq s \leq (t+\delta) \wedge 1} d(X^n_s, X^n_t) > \eta \right) \leq \varepsilon$

② $\forall t \in [0,1] \cap \mathbb{Q}$, $(X^n_t)_{n \geq 1}$ est tendue.

Alors $(X^n)_{n\geq 1}$ est tendue dans $\mathcal{C}$.

Preuve : On vérifie la condition ① du théorème. Pour cela, on découpe $[0,1]$ en intervalles de longueur δ.



Soit $f \in C$. Vérifions que $\{w(f,\delta) > 3\eta\} \subset \bigcup_{i=0}^{\lfloor 1/\delta \rfloor} \{ \sup_{i\delta \leq s \leq (i+1)\delta \wedge 1} d(f(s), f(i\delta)) \geq \eta \}$.

On suppose que $\forall\, 0 \leq i \leq \lfloor 1/\delta \rfloor$ on a $\sup_{i\delta \leq s \leq (i+1)\delta \wedge 1} d(f(s), f(i\delta)) < \eta$.

Si $|s-t| < \delta$:

$\boxed{\text{Cas 1}}$ $i\delta \leq s, t \leq (i+1)\delta \wedge 1$. Alors $d(f(s), f(t)) \leq d(f(t), f(i\delta)) + d(f(s), f(i\delta)) \leq 2\eta$

$\boxed{\text{Cas 2}}$ $i\delta \leq s \leq (i+1)\delta \leq t \leq (i+2)\delta \wedge 1$. Alors $d(f(s), f(t)) \leq d(f(s), f(i\delta)) + d(f((i+1)\delta), f(i\delta)) + d(f(t), f((i+1)\delta)) \leq 3\eta$.

Ainsi, $\mathbb{P}(w(X^n, \delta) > 3\eta) \leq (\lfloor 1/\delta \rfloor + 1) \max_{t \in \{\delta, 2\delta, \dots, \lfloor 1/\delta \rfloor \delta\}} \mathbb{P}\left(\sup_{t \leq s \leq (t+\delta) \wedge 1} d(X^n_s, X^n_t) > \eta \right)$

$\leq 2\varepsilon$ pour n assez grand, car $\lfloor 1/\delta \rfloor + 1 \leq \frac{1}{\delta} + 1 \leq \frac{2}{\delta}$.

~

2) Critère de tension de Kolmogorov

Le problème des caractérisations précédentes de la tension est qu'elles font intervenir des variables aléatoires malaisées à étudier. Des critères de tension efficace peuvent faire intervenir la loi de X^n de la façon la moins compliquée possible, par exemple à travers des marginales de dimension finie. Le critère de Kolmogorov ne fait intervenir que les marginales de dimension 2 (!).

On introduit d'abord quelques notations

Notation • Soit $D_n = \{ \frac{i}{2^n} : 0 \leq i \leq 2^n \}$ les dyadiques de niveau n dans $[0,1]$ et $D = \bigcup_{n \geq 1} D_n$

• Pour $x = (x_t)_{0 \leq t \leq 1} \in E^{[0,1]}$ et $\gamma > 0$, on note

$$M_\gamma(x) = \sup_{\substack{s,t \in D \\ s \neq t}} \frac{d(x_s, x_t)}{|s-t|^\gamma}.$$

Ainsi, si x est γ-Hölder, $M_\gamma(x) < \infty$.

Théorème (critère de tension de Kolmogorov)

(1) Soit $X = (X_t)_{0\le t\le 1}$ une v.a à valeurs dans $E^{[0,1]}$. On suppose que

$$\exists \alpha,\beta,c>0 \text{ tq } \forall s,t\in[0,1],\quad \mathbb{E}[\,d(X_s,X_t)^\alpha\,] \le c\,|s-t|^{1+\beta} \quad (*)$$

Alors pour tout $0<\gamma<\frac{\beta}{\alpha}$, $\mathbb{E}[M_\gamma(X)^\alpha] \le C(\alpha,\beta,\gamma,c)$

(2) Soit $(X^n)_{n\ge 1}$ des v.a à valeurs dans $\mathcal{C}$. On suppose que

ⓐ $\forall t\in[0,1]$, $(X^n_t)_{n\ge 1}$ est tendue

ⓑ $\exists \alpha,\beta,c>0$ tq $\forall n\ge 1$, $\forall s,t\in[0,1]$, $\mathbb{E}[\,d(X^n_s,X^n_t)^\alpha\,] \le c\,|s-t|^{1+\beta}$

Alors $(X^n)_{n\ge 1}$ est tendue, et toute limite de sous-suite est p.s γ Hölder pour tout $0<\gamma<\frac{\beta}{\alpha}$.

Preuve : ① L'idée est de contrôler $d(X_s,X_t)$ "uniformément" en $s,t\in D$ par inégalité triangulaire le long d'un chemin de diadiques "consécutifs". Plus précisément, on écrit

$$M_\gamma(X) = \sup_{m\ge 0}\ \sup_{\substack{s,t\in D\\ \frac{1}{2^{m+1}}<|s-t|\le\frac{1}{2^m}}} \frac{d(X_s,X_t)}{|s-t|^\gamma} \le \sup_{m\ge 0}\ \sup_{|s-t|\le\frac{1}{2^m}} 2^{(m+1)\gamma}\, d(X_s,X_t).$$

Notons $\Delta_k = \max\{\, d(X_s,X_t) : s,t\in D_k,\ |s-t| = \frac{1}{2^k}\}$.

Puisque $\#\{(s,t) : t-s=\frac{1}{2^k},\ s,t\in D_k\} = 2^k$, on a $\mathbb{E}[\Delta_k^\alpha] \le 2^k\cdot c\cdot\left(\frac{1}{2^k}\right)^{1+\beta} = \frac{c}{2^{k\beta}}$. $(**)$

Le point clé est de remarquer que pour tout $m\ge 1$,

$$\boxed{\sup_{\substack{|s-t|\le\frac{1}{2^m}\\ s,t\in D}} d(X_s,X_t) \le 2\sum_{k=m}^{\infty}\Delta_k \qquad (***)}$$

En effet, si $|s-t|\le\frac{1}{2^m}$ et $s\le t$, notons s_m le plus grand élément de D_m $\le$ à s et t_m le plus grand élément de D_m $\le$ à t. On a soit $s_m=t_m$, soit $t_m=s_m+\frac{1}{2^m}$.

On peut alors écrire pour $r\ge 1$ et $a_1,\dots,a_r\in\{0,1\}$ (dépendants de s)

$$s_m = \frac{\ell}{2^m} \quad\text{et}\quad s = \frac{\ell}{2^m} + \frac{a_1}{2^{m+1}} + \dots + \frac{a_r}{2^{m+r}}.$$

De sorte qu'en posant $q_0=0$,

$$d(X_{s_m}, X_s) \leq \sum_{i=1}^{n} d\left(X_{\frac{\ell}{2^m}+\frac{a_1}{2^{m+1}}+\dots+\frac{a_i}{2^{m+i}}}, X_{\frac{\ell}{2^m}+\frac{a_1}{2^{m+1}}+\dots+\frac{a_{i-1}}{2^{m+i-1}}}\right)$$
$$\leq \sum_{i=1}^{n} \Delta_{m+i}$$
$$\leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \Delta_k .$$

De même $d(X_{t_m}, X_t) \leq \sum_{k=m+1}^{\infty} \Delta_k$.

Ainsi, $d(X_s, X_t) \leq \underbrace{d(X_{s_m}, X_{t_m})}_{\leq \Delta_m} + 2\sum_{k=m+1}^{\infty} \Delta_k \leq 2\sum_{k=m}^{+\infty} \Delta_k$,

ce qui montre $(\forall\forall\forall)$

Il en découle que $M_\gamma(X)^\alpha \leq \sup_{m\geq 1} 2^{(m+1)\gamma\alpha}\left(\sum_{k=m}^{+\infty}\Delta_k\right)^\alpha$
$$\leq 2^{\gamma\alpha+\alpha} \sup_{m\geq 1}\left(\sum_{k=m}^{\infty} \Delta_k 2^{k\gamma}\right)^\alpha = 2^{\gamma\alpha+\alpha}\left(\sum_{k=1}^{\infty} 2^{k\gamma}\Delta_k\right)^\alpha$$

D'après l'inégalité de Minkowski et $(\gamma\gamma)$, on en déduit que

$$\mathbb{E}\left[\left(\sum_{k=1}^{+\infty} 2^{k\gamma}\Delta_k\right)^\alpha\right]^{\frac{1}{\alpha\vee 1}} \leq \sum_{k=1}^{+\infty} 2^{k\gamma\frac{\alpha}{\alpha\vee 1}}\mathbb{E}[\Delta_k^\alpha]^{\frac{1}{\alpha\vee 1}} = \sum_{k=1}^{+\infty} c^{\frac{1}{\alpha\vee 1}}\, 2^{\frac{k}{\alpha\vee 1}(\alpha\gamma-\beta)} < +\infty$$

car $\gamma < \beta/\alpha$

Ainsi, on a bien $\mathbb{E}[M_\gamma(X)^\alpha] \leq C(\alpha,\beta,\gamma,c)$.

(2) Pour la tension, il suffit de vérifier que $\forall\varepsilon>0, \forall\eta>0, \exists\delta>0, \ \mathbb{P}(\omega(X^n,\delta)\geq\eta)\leq\varepsilon$.

Par définition de $M_\gamma(X^n)$, $\forall s,t\in D$ on a $d(X^n_s, X^n_t)\leq M_\gamma(X^n)|s-t|^\gamma$. Par continuité, c'est aussi vrai $\forall s,t\in[0,1]$

Ainsi, si $|s-t|\leq\delta$, on a $d(X^n_s,X^n_t)\leq M_\gamma(X^n)\delta^\gamma$ de sorte que $\omega(X^n,\delta)\leq M_\gamma(X^n)\cdot\delta^\gamma$.

Par inégalité de Markov, $\mathbb{P}(\omega(X^n,\delta)\geq\eta) \leq \frac{1}{\eta^\alpha}\delta^{\gamma\alpha}\mathbb{E}[M_\gamma(X^n)^\alpha]$

On en déduit le résultat par (1).

- Enfin, supposons $X^{\varphi(n)} \xrightarrow{loi} X$ dans $\mathcal{C}$ et montrons que X est p.s γ-Hölder.

Il suffit de vérifier que X vérifie $(*)$. En effet, par (1) on aura alors

$M_\gamma(X)<\infty$ p.s et X étant continu, cela impliquera que X est p.s γ-Hölder.

Pour cela, on utilise le fait que si $Y_n \xrightarrow{loi} Y$ avec $Y_n, Y\geq 0$, alors
$\mathbb{E}[Y] \leq \liminf_{n\to\infty}\mathbb{E}[Y_n]$.

(en effet, on a $\mathbb{P}(Y_n \geq u) \to \mathbb{P}(Y \geq u)$ pour presque tout u par rapport à la mesure de Lebesgue, donc d'après le lemme de Fatou, $\mathbb{E}[Y] = \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Y \geq u)du = \int_0^{+\infty} \lim_{n\to\infty} \mathbb{P}(Y_n \geq u)du \leq \liminf_{n\to\infty} \int_0^{+\infty} \mathbb{P}(Y_n \geq u)\,du = \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[Y_n]$)

On applique ceci à $d(X_s^n, X_t^n)^\alpha \xrightarrow{loi} d(X_s, X_t)^\alpha$:

$$\mathbb{E}[d(X_s, X_t)^\alpha] \leq \liminf_{n\to\infty} \mathbb{E}[d(X_s^n, X_t^n)^\alpha] \leq c|s-t|^{1+\beta}$$

~

Remarque le ① permet de démontrer aussi le critère de continuité de Kolmogorov : si $(X_t)_{0\leq t\leq 1} \in E^{[0,1]}$ vérifie (*), alors $\forall 0<\gamma<\frac{\beta}{\alpha}$ il existe un processus $(\tilde{X}_t)_{0\leq t\leq 1}$ γ-Hölder tq $\forall t\in[0,1]$, $\mathbb{P}(X_t = \tilde{X}_t) = 1$.

En effet, puisque $\mathbb{E}[M_\gamma(X)^\alpha] < \infty$, il existe A de proba 1 tq $\forall \omega \in A$, X est γ-Hölder sur D. Pour $\omega \in A$, on peut donc prolonger X en une fonction γ-Hölder notée $\tilde{X}$. Pour $\omega \notin A$, on pose $\tilde{X} = 0$.

Vérifions que pour $t\in[0,1]$, $\mathbb{P}(X_t = \tilde{X}_t) = 1$. Par (*) et l'inégalité de Markov si $s_n \to t$ et $s_n \in D$, $X_{s_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} X_t$. D'autre part, par construction, $X_{s_n} \xrightarrow{ps} \tilde{X}_t$. Donc $X_{s_n} \xrightarrow{\mathbb{P}} \tilde{X}_t$. Donc $\mathbb{P}(X_t = \tilde{X}_t) = 1$.

Application : Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires réelles iid tq $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathbb{E}[X_1^4] < \infty$ pour un entier $p\geq 2$. On pose $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \cdots + X_n$ pour $n\geq 1$ et $S_t = (1-\{t\}) S_{\lfloor t\rfloor} + \{t\} S_{\lfloor t\rfloor + 1}$ pour $t\geq 0$. Enfin on définit $S_t^{(n)} = \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}}$ pour $0\leq t\leq 1$ de sorte que $S^{(n)} \in \mathcal{C} = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$.

Alors $(S^{(n)})_{n\geq 1}$ est tendue dans $\mathcal{C}$.

On verra plus tard que ce résultat reste vrai sous l'hypothèse plus faible $\mathbb{E}[X_1^2] < \infty$, mais la preuve est plus délicate.

<u>Preuve</u> : On va appliquer le critère de Kolmogorov. Tout d'abord, d'après le TCL, $\forall t \in [0,1]$, $(S_t^{(n)})_{n\geq 1}$ converge en loi donc est tendue.

Vérifions tout d'abord que $\exists c>0, \forall n\geq 1, \mathbb{E}[S_n^4] \leq c\cdot n^2$. $(*)$

Pour cela, on écrit $\mathbb{E}[S_n^4] = \sum_{1\leq i_1,\dots,i_4\leq n} \mathbb{E}[X_{i_1}X_{i_2}X_{i_3}X_{i_4}]$

Or $\mathbb{E}[X_{i_1}\cdots X_{i_4}]=0$ si l'un des indices apparaît une seule fois

Ainsi $\mathbb{E}[S_n^4] = \sum_{i=1}^{n} \mathbb{E}[X_1^4] + \sum_{1\leq i<j\leq n} \sum_{\substack{i_1,i_2,i_3,i_4 : \\ \#\{k : i_k = i\}=2 \\ \#\{k : i_k = j\}=2}} \mathbb{E}[X_1^2]^2$ quantité qui ne dépend pas de n

Donc $\mathbb{E}[S_n^4] \leq Cn + C'n^2 \leq C''\cdot n^2$.

Ensuite, fixons $s,t\in[0,1]$, $s<t$.

- Si $ns, nt \in \mathbb{N}$, on écrit $\mathbb{E}[|S_{nt}-S_{ns}|^4] = \mathbb{E}[S_{n(t-s)}^4] \leq C(nt-ns)^2$ $(**)$

- Si $\lfloor ns\rfloor = \lfloor nt\rfloor = k$, $S_{nt}-S_{ns} = n(t-s)(S_{k+1}-S_k)$, donc
$$\mathbb{E}[(S_{nt}-S_{ns})^4] = n^4 \underbrace{(t-s)^2}_{\leq \frac{1}{n}} (t-s)^2\, \mathbb{E}[X_1^4] \leq C(nt-ns)^2$$

- Si $\lfloor ns\rfloor \neq \lfloor nt\rfloor$, écrivons $\lfloor ns\rfloor = k$, $\lfloor nt\rfloor = l$ avec $k<l$.

Alors en écrivant $|S_{nt}-S_{ns}| \leq |S_{nt}-S_l| + |S_l - S_{k+1}| + |S_{k+1}-S_{ns}|$, avec l'inégalité de Minkowski on obtient avec $(*)$ et $(**)$:
$$\mathbb{E}[(S_{nt}-S_{ns})^4]^{\frac14} \leq C^{\frac14}\Big(\underbrace{(nt-l)}_{\leq nt-ns}{}^{\frac12} + \underbrace{(l-(k+1))}_{\leq nt-ns}{}^{\frac12} + \underbrace{(k+1-ns)}_{\leq nt-ns}{}^{\frac12}\Big) \leq 3C^{\frac14}\sqrt{n}\sqrt{t-s}$$

Ainsi, $\mathbb{E}[(S_s^{(n)}-S_t^{(n)})^4] = \mathbb{E}\Big[\Big(\frac{S_{nt}-S_{ns}}{\sqrt{n}}\Big)^4\Big] \leq C(t-s)^2$ pour $0\leq s,t\leq 1$.

le critère de Kolmogorov s'applique pour tout $\gamma \in]0,\frac14[$.

$\sim$

3) Fonctions continues sur $\mathbb{R}_+$

En pratique, les processus aléatoires sont souvent indicés par $\mathbb{R}_+$ plutôt que par $[0,1]$.

Comme l'espace $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E)$ muni de la distance uniforme $D(f,g) = \sup_{t \geq 0} d(f(t), g(t))$ n'est pas séparable (donc pas polonais), il faut faire attention.

On placera toujours sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E)$ une autre topologie, celle de la topologie de la convergence uniforme sur les compacts, induite par la distance

$$D(f,g) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(\sup_{0 \leq t \leq n} d(f(t), g(t))\right) \wedge 1}{2^n}.$$

Remarque facultative En termes topologiques, c'est la topologie compacte-ouverte sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E)$, dont une base de voisinages est donnée par les ensembles

$$\{ f \in \mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E) : f(K) \subset O \}$$

avec K compact de $\mathbb{R}_+$ et O ouvert de E

On vérifie aisément que :

- $f_n \to f$ dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E)$ ssi $f_n \to f$ uniformément sur les compacts
- $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E)$ est polonais
- Les marginales fini-dimensionnelles caractérisent les mesures de $\mathcal{M}_1(\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E))$ car la tribu borélienne sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E)$ coïncide encore avec la trace sur $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E)$ de la tribu produit sur $E^{\mathbb{R}_+}$

L'avantage important de cet espace est que la relative compacité est une propriété locale, cf la proposition suivante (preuve laissée en exo)

Proposition • Une partie $\mathcal{F}$ de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E)$ est relativement compacte ssi $\forall N \geq 1$ les parties $\mathcal{F}_N = \{ f_{|[0,N]} ; f \in \mathcal{F} \}$ sont relativement compactes dans $\mathcal{C}([0,N], E)$, où $f_{|[0,N]}$ est la restriction de f à $[0,N]$.

• Une suite $(X^n)_{n\geq 1}$ de v.a de $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E)$ est tendue ssi $\forall N \geq 1$ la suite des restrictions $(X^n_{|[0,N]})_{n\geq 1}$ est tendue dans $\mathcal{C}([0,N], E)$.

Ainsi, la convergence en loi dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, E)$ se ramène par restriction à la convergence en loi dans les espaces $\mathcal{C}(I, E)$ avec I un intervalle compact, et les résultats obtenus précédemment peuvent être mis en oeuvre.