Cours 6 : Théorème de Donsker et applications

Plan : 1) Le théorème de Donsker

2) Loi de l'arcsinus

3) Théorème de Lévy sur le mouvement brownien

1) Le théorème de Donsker

L'inégalité suivante sera utile pour démontrer le théorème d'invariance de Donsker

Proposition (inégalité de Skorokhod) Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des v.a i.i.d à valeurs dans $\mathbb{R}^d$, centrées avec $\mathbb{E}[|X_1|^2]=c$. Alors $\forall \lambda > 0$, $\forall n \geq 1$, $\mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} |S_i| > \lambda\sqrt{n}\right) \leq 2\,\mathbb{P}\left(|S_n| > (\lambda - \sqrt{2c})\sqrt{n}\right)$,

où $|.|$ désigne la norme euclidienne.

Preuve : Soit T le temps d'arrêt $T = \inf\{k\geq 1 : |S_k| > \lambda\sqrt{n}\}$. On suppose $\lambda > \sqrt{2c}$ et on écrit

$$\mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} |S_i| > \lambda\sqrt{n}\right) = \mathbb{P}(T\leq n)$$

$$\leq \mathbb{P}\left(|S_n| > (\lambda-\sqrt{2c})\sqrt{n}\right) + \mathbb{P}\left(T\leq n, |S_n| \leq (\lambda-\sqrt{2c})\sqrt{n}\right)$$

Or pour $1\leq j\leq n$, sur l'événement $\{T=j\}$ on a $|S_j| > \lambda\sqrt{n}$, et si de plus $|S_n| \leq (\lambda-\sqrt{2c})\sqrt{n}$, alors $|S_n - S_j| \geq \sqrt{2cn}$ par inégalité triangulaire.

Par indépendance et l'inégalité de Markov,

$$\mathbb{P}\left(T=j, |S_n - S_j| > \sqrt{2cn}\right) = \mathbb{P}(T=j)\,\mathbb{P}\left(|S_{n-j}| > \sqrt{2cn}\right)$$

$$\leq \mathbb{P}(T=j)\,\frac{(n-j)\,\mathbb{E}[|X_1|^2]}{2cn} \leq \frac{\mathbb{P}(T=j)}{2}$$

On conclut que $\mathbb{P}\left(\max_{1\leq i\leq n} |S_i| > \lambda\sqrt{n}\right) \leq \mathbb{P}\left(|S_n| > (\lambda-\sqrt{2c})\sqrt{n}\right) + \frac{1}{2}\mathbb{P}(T\leq n)$,

d'où le résultat

$\sim$

On commence par quelques notations. Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des v.a. iid dans $\mathbb{R}^d$ telles que $\mathbb{E}[X_1]=0$ et $\mathrm{Cov}(X_1) = I_d$, la matrice identité dans $\mathbb{R}^d$. On pose $S_0 = 0$, $S_n = X_1 + \dots + X_n$ pour $n \geq 1$ et par interpolation linéaire $S_t = (1-\{t\}) S_{\lfloor t \rfloor} + \{t\} S_{\lfloor t \rfloor +1}$ pour $t \geq 0$. Enfin, pour $n \geq 1$, on pose $S_t^{(n)} = \frac{S_{nt}}{\sqrt{n}}$, $t \geq 0$, de sorte que $S^{(n)}$ est une variable aléatoire à valeurs dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$.

Théorème (Donsker) La suite $S^{(n)}$ converge en loi dans $\mathcal{C}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$ vers un processus $(B_t)_{t\geq 0}$ appelé mouvement brownien standard de dimension d. Sa loi est caractérisée par le fait que pour tout $0 = t_0 \leq t_1 \leq \dots \leq t_k$, les variables aléatoires $(B_{t_i} - B_{t_{i-1}})_{1\leq i \leq k}$ sont indépendantes, respectivement de loi gaussienne $\mathcal{N}(0, (t_i - t_{i-1}) I_d)$.

Preuve : Étape 1 : convergence des fidi

On fixe $0 = t_0 < t_1 < \dots < t_k$. D'après le TCL,

$$\left(\frac{S_{\lfloor nt_i \rfloor} - S_{\lfloor nt_{i-1} \rfloor}}{\sqrt{n}} : 1 \leq i \leq k \right) \xrightarrow{loi} (N_1, N_2, \dots, N_k)$$

où $N_1, \dots, N_k$ sont $\perp\!\!\!\perp$ et N_i est de loi $\mathcal{N}(0, (t_i - t_{i-1}) I_d)$. Par image continue,

$$\left(\frac{S_{\lfloor nt_i \rfloor}}{\sqrt{n}} : 1 \leq i \leq k \right) \xrightarrow{loi} (N_1, N_1 + N_2, \dots, N_1 + \dots + N_k).$$

Pour enlever les parties entière, on remarque que $\left| S_t^{(n)} - \frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sqrt{n}} \right| \leq \frac{|X_{\lfloor nt \rfloor +1}|}{\sqrt{n}}$, qui converge en probabilité vers 0 à t fixé.

Donc $\left(S_{t_i}^{(n)} - \frac{S_{\lfloor nt_i \rfloor}}{\sqrt{n}} ; 1 \leq i \leq k \right) \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Par le lemme de Slutsky, on en déduit que

$$\left(S_{t_i}^{(n)} : 1 \leq i \leq k \right) \xrightarrow{loi} (N_1, N_1 + N_2, \dots, N_1 + \dots + N_k),$$

ce qui montre la convergence des fidi.

Étape 2 : Tension.

Il s'agit de vérifier que $\forall N \geq 1$, les restriction $(S^{(n)}_{|[0,N]})_{n\geq 1}$ sont tendues. Pour simplifier les notations, on le fait pour $N=1$ (le cas général étant identique).

Avec des hypothèses de moment supplémentaires, on peut utiliser le critère de Kolmogorov.

Dans le cas général, on va montrer que

$$\forall \varepsilon, \eta > 0, \exists 0<\delta<1, \forall t \in [0,1], \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{\delta} \mathbb{P}\Big(\sup_{t \leq s \leq (t+\delta)\wedge 1} |S^{(n)}_s - S^{(n)}_t| > \eta \Big) \leq \varepsilon$$

en utilisant l'inégalité maximale de Skorokhod

ⓐ Pour cela, on remarque d'abord que pour $0<\delta<1$, $0 \leq t \leq 1$,

$$\sup_{t \leq s \leq t+\delta} |S_{ns} - S_{nt}| \leq 2 \max_{0 \leq i \leq \lfloor n\delta \rfloor + 2} |S_{\lfloor nt \rfloor + i} - S_{\lfloor nt \rfloor}|$$

En effet, on écrit $|S_{ns} - S_{nt}| \leq |S_{ns} - S_{\lfloor nt \rfloor}| + |S_{nt} - S_{\lfloor nt \rfloor}|$.

D'une part, $|S_{nt} - S_{\lfloor nt \rfloor}| \leq |S_{\lfloor nt \rfloor + 1} - S_{\lfloor nt \rfloor}|$ ($(S_{\lfloor nt \rfloor + u} : 0 \leq u \leq 1)$ décrit un segment)

D'autre part, $|S_{ns} - S_{\lfloor nt \rfloor}| \leq \max(|S_{\lfloor ns \rfloor} - S_{\lfloor nt \rfloor}|, |S_{\lfloor ns \rfloor + 1} - S_{\lfloor nt \rfloor}|)$

car $(S_{\lfloor ns \rfloor + u} : 0 \leq u \leq 1)$ décrit un segment.

Comme $\lfloor ns \rfloor + 1 \leq \lfloor nt \rfloor + \lfloor n\delta \rfloor + 2$, on en déduit l'inégalité désirée

ⓑ Ainsi, $\forall \eta > 0$, $\forall \delta \in]0,1[$, $\forall t \in [0,1]$,

$$\mathbb{P}\Big(\sup_{t \leq s \leq t+\delta} |S^{(n)}_s - S^{(n)}_t| > \eta \Big) \leq \mathbb{P}\Big(\max_{1 \leq i \leq \lfloor n\delta \rfloor + 2} |S_{\lfloor nt \rfloor + i} - S_{\lfloor nt \rfloor}| > \eta \sqrt{n}/2 \Big)$$

$$= \mathbb{P}\Big(\max_{1 \leq i \leq \lfloor n\delta \rfloor + 2} |S_i| > \Big(\frac{\eta}{2} \frac{\sqrt{n}}{\sqrt{\lfloor n\delta \rfloor + 2}} \Big) \cdot \sqrt{\lfloor n\delta \rfloor + 2} \Big)$$

$$\leq 2\, \mathbb{P}\Big(\frac{|S_{\lfloor n\delta \rfloor + 2}|}{\sqrt{\lfloor n\delta \rfloor + 2}} > \frac{\eta}{2} \frac{1}{\sqrt{\delta + 2/n}} - \sqrt{2d} \Big)$$ d'après l'inégalité de Skorokhod, car $\mathbb{E}[|X_1|^2] = d$.

D'après le TCL,

$$\limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{t\le s\le t+\delta} |S_s^{(n)} - S_t^{(n)}| > \eta \right) \le 2\, \mathbb{P}\left(|N(0,I_d)| > \frac{\eta}{2} \times \frac{1}{\sqrt{\delta}} - \sqrt{2d} \right)$$

Or $\mathbb{P}(|N(0,I_d)| \geq x)$ décroît exponentiellement vite quand $x \to \infty$. Donc on peut trouver $0<\delta<1$ tel que $\frac{1}{\delta} \limsup_{n\to\infty} \mathbb{P}\left(\sup_{t\le s\le t+\delta} |S_s^{(n)} - S_t^{(n)}| > \eta \right) \le \varepsilon$.

~

Corollaire Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires réelles centrées. Notons $\sigma^2 = \mathbb{E}[X_i^2]$. Alors

$$\forall a>0, \quad \mathbb{P}\left(\max_{0\le i\le n} S_i > a\sigma\sqrt{n} \right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 2\int_a^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-x^2/2} dx$$

Preuve : En notant $S_t^{(n)} = \frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}}$ pour $0\le t\le 1$, on a $(S_t^{(n)} : 0\le t\le 1) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} (B_t)_{0\le t\le 1}$ d'après le théorème de Donsker, où $(B_t)_{0\le t\le 1}$ est un mouvement brownien standard.

Puisque $\sup_{0\le t\le 1} S_t^{(n)} = \max_{0\le i\le n} S_i$ et que $\sup : \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}) \to \mathbb{R}$, $f \mapsto \sup f$ est continue, le résultat s'ensuit en utilisant le fait que

$$\sup_{0\le t\le 1} B_t \overset{\text{loi}}{=} |B_1| \quad \text{(ce qu'on peut voir avec le principe de reflexion)}$$

Une propriété du "continu" (loi explicite de $\sup_{0\le t\le 1} B_t$) a été utilisée pour obtenir un résultat asymptotique dans le discret (fonction de répartition de $\max_{0\le k\le n} S_k$).

Dans les deux exemples suivants, c'est un résultat du discret, passant à la limite, qui permet d'obtenir une information intéressante sur le mouvement brownien.

2) Loi de l'arcsinus

Théorème Soit $(B_t)_{0\le t\le 1}$ un mouvement brownien standard. On pose $T=\sup\{t\in[0,1] : B_t=0\}$. Alors T a pour densité $\frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\mathbb{1}_{0<x<1}$, ou, de façon équivalente $\mathbb{P}(T\le t)=\frac{2}{\pi}\arcsin(\sqrt{t})$ pour $0\le t\le 1$.

Preuve : **Étape 1** On pose $S_n = X_1+\dots+X_n$ avec $(X_i)_{i\ge 1}$ iid tq $\mathbb{P}(X_1=\pm 1)=\frac{1}{2}$ et on note $T_{2n}=\max\{0\le k\le 2n : S_k=0\}$. Montrons que $\frac{T_{2n}}{2n} \xrightarrow{\text{loi}}$ v.a densité $\frac{1}{\pi\sqrt{x(1-x)}}\mathbb{1}_{0<x<1}$

Pour $0\le j\le n$, on a $\mathbb{P}(T_{2n}=2j)=\mathbb{P}(S_{2j}=0)\,\mathbb{P}(S_1\ne 0,\dots,S_{2(n-j)}\ne 0)$.

Or $\boxed{\forall k\ge 1,\ \mathbb{P}(S_1\ne 0,\dots,S_{2k}\ne 0)=\mathbb{P}(S_{2k}=0).\ (*)}$

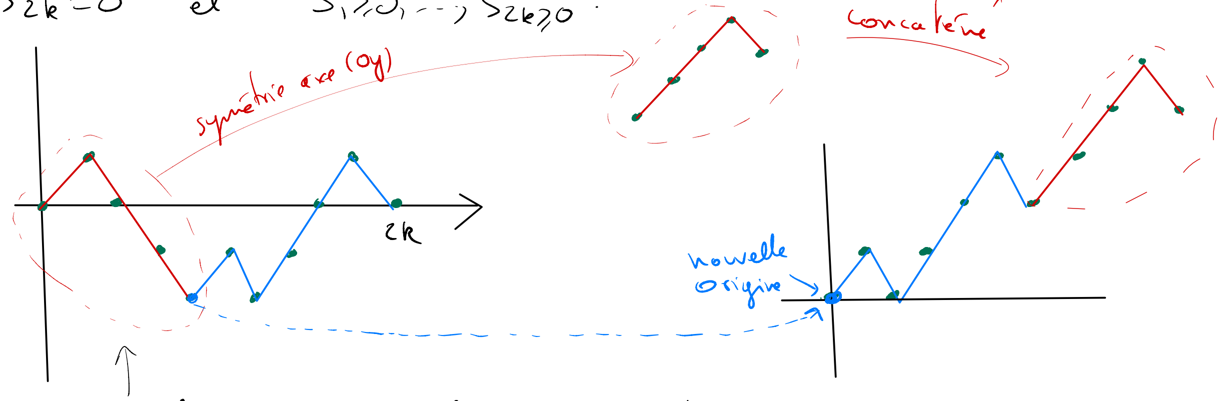
Démontrons cette identité surprenante par un joli argument combinatoire

Tout d'abord, $\mathbb{P}(S_1\ne 0,\dots,S_{2k}\ne 0)=2\,\mathbb{P}(S_1>0,\dots,S_{2k}>0)$

$=2\times\frac{1}{2}\mathbb{P}(S_1\ge 0,\dots,S_{2k-1}\ge 0)$ en changeant l'origine du repère en $(1,1)$

$=\mathbb{P}(S_1\ge 0,\dots,S_{2k}\ge 0)$ (par parité, $S_{2k-1}\ge 0 \iff S_{2k}\ge 0$)

Construisons maintenant une bijection entre chemins $(S_1,\dots,S_{2k})$ tels que $S_{2k}=0$ et $S_1\ge 0,\dots,S_{2k}\ge 0$.



On prend la partie avant le premier instant où l'infimum est atteint. On l'enlève et on fait une symétrie d'axe (Oy). On la concatène à droite de ce qui reste (partie bleue) et on place l'origine du repère au 1^{er} point de la partie bleue (cf figure)

Après transformation, on obtient un chemin tel que $S_1 \geq 0, \dots, S_{2k} \geq 0$.

On vérifie que c'est une bijection (la transformation inverse se décrit aisément)

Ceci montre $(*)$.

Ainsi, $\mathbb{P}(T_{2n} = 2j) = \mathbb{P}(S_{2j} = 0)\, \mathbb{P}(S_{2(n-j)} = 0)$.

Or $\mathbb{P}(S_{2k} = 0) = \binom{2k}{k} \frac{1}{2^{2k}} \underset{k\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{\pi k}}$.

Donc $\mathbb{P}(T_{2n} = L 2 c n \rfloor) \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{n} \frac{1}{\pi\sqrt{c(1-c)}}$ pour $0 < c < 1$.

Ceci implique le résultat (exo, ou cf cours 7 la semaine prochaine : un théorème local limite implique une convergence en loi)

<u>Etape 2</u> Pour $f \in \mathcal{C} = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R})$, soit $T(f) = \sup\{t \in [0,1] : f(t) = 0\}$. On ne peut pas directement appliquer le théorème de Donsker car T n'est pas continue.

(prendre par exemple $f_n(x) = \frac{x}{n}$ pour $0 \leq x \leq 1$: $0 = T(f_n) \not\to T(0) = 1$)

Mais on vérifie que si 0 n'est pas une valeur de min ou max local, alors T est continu en f.

Par ailleurs, ps 0 n'est pas une valeur de min ou max local d'un mouvement brownien

D'après le thm de Donsker, $\left(\frac{S_{nt}}{\sqrt{n}} : 0 \leq t \leq 1\right) \xrightarrow{\text{loi}} B$, donc $T\left(\left(\frac{S_{nt}}{\sqrt{n}} : 0 \leq t \leq 1\right)\right) \xrightarrow{\text{loi}} T(B)$

(on utilise le fait que si $X_n \xrightarrow{\text{loi}} X$ et si f est ps continu en X, alors $f(X_n) \xrightarrow{\text{loi}} f(X)$)

~

<u>Corollaire</u> Si $(X_i)_{i\geq 1}$ sont iid avec $\mathbb{E}[X_1] = 0$ et $\mathbb{E}[X_1^2] \in]0, \infty[$, alors

$$\mathbb{P}\left(\frac{1}{2n} \max\{0 \leq k \leq 2n : S_k = 0\} \leq t\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{2}{\pi} \arcsin(\sqrt{t}) \quad \text{pour } 0 < t < 1.$$

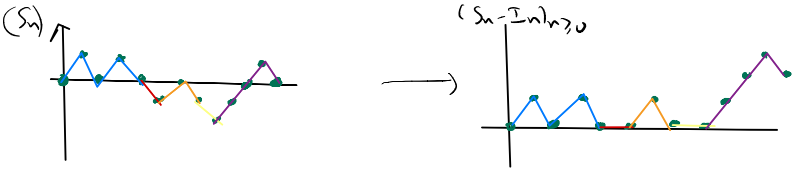
où $S_k = X_1 + \dots + X_k$.

3) Théorème de Lévy

Soit $(B_t)_{t\geq 0}$ un mouvement brownien et $I_t = \inf_{[0,t]} B$ l'infimum courant.

Théorème (Lévy) On a $(B_t - I_t)_{t\geq 0} \overset{loi}{=} (|B_t|)_{t\geq 0}$

Preuve : Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des v.a. iid tq $\mathbb{P}(X_1 = \pm 1) = 1/2$, on pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et $I_n = \min_{0\leq k\leq n} S_k$



Si on regarde les probas de transition de $S_n - I_n$ et celles de $|S_n|$, on voit que ce sont les mêmes en dehors de l'état 0, où $S_n - I_n$ peut rester coincé avec proba 1/2.

On note $\theta_n = \#\{k \leq n-1 : S_k - I_k \neq S_{k-1} - I_{k-1}\}$ le nombre de pas "effectifs" de $(S_k - I_k)_{k\geq 0}$ jusqu'au temps n, et $\theta_t^{-1} = \inf\{s : \theta_s = t\}$ son "inverse". Alors

$$\left(S_{\theta_n^{-1}} - I_{\theta_n^{-1}}\right)_{n\geq 0} \overset{loi}{=} (|S_n|)_{n\geq 0}$$

Mais d'après le théorème de Donsker $\left(\frac{1}{\sqrt{n}} |S_{nt}|\right)_{t\geq 0} \xrightarrow{loi} (|B_t|)_{t\geq 0}$.

Pour contrôler θ_n, on vérifie que $(S_n - I_n)_{n\geq 0}$ est une chaîne de Markov récurrente nulle ($\exists$ mesure invariante ∞), de sorte que $\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \mathbb{1}_{S_k - I_k = 0} \xrightarrow[n\to\infty]{p.s.} 0$.

On en déduit aisément que $\left(\frac{\theta^{-1}_{nt}}{n} : t\geq 0\right) \xrightarrow{loi} (t)_{t\geq 0}$, puis que

$$\left(\frac{S_{\theta^{-1}_{nt}} - I_{\theta^{-1}_{nt}}}{\sqrt{n}}\right)_{t\geq 0} \xrightarrow{loi} (B_t - I_t)_{t\geq 0}. \quad \text{(détails laissés en exo)}$$

On en conclut que $(B_t - I_t)_{t\geq 0} \overset{loi}{=} (|B_t|)_{t\geq 0}$.

$\sim$