Cours 7 : le pont brownien

Plan : 1) Définition du pont brownien

2) Le théorème local limite

3) Convergence vers le pont brownien (Donsker conditionné)

1) Définition du pont brownien

Soit $(B_t)_{0\leq t\leq 1}$ un mouvement brownien standard

Définition/Théorème Lorsque $\varepsilon \downarrow 0$, la loi de $(B_s)_{0\leq s\leq 1}$ sachant que $\{|B_1|\leq \varepsilon\}$ converge en loi vers une mesure de probabilité $\mathbb{P}_0$ sur $\mathcal{C}([0,1],\mathbb{R})$, appelée loi du pont brownien. Par ailleurs, la loi de $(B_s - sB_1)_{0\leq s\leq 1}$ est $\mathbb{P}_0$.

Informellement, le pont brownien est $(B_t)_{0\leq t\leq 1}$ " sachant $B_1 = 0$ "

Preuve : Étape 1 : On pose $b_s = B_s - sB_1$ pour $0\leq s\leq 1$. On vérifie d'abord que $(b_s)_{0\leq s\leq 1} \perp\!\!\!\perp B_1$.

Puisque $((b_s)_{0\leq s\leq 1}, B_1)$ est un vecteur gaussien, il suffit de vérifier que $\forall s\in[0,1]$, $\mathrm{Cov}(b_s, B_1)=0$.

Pour cela, on calcule $\mathrm{Cov}(b_s, B_1) = \mathbb{E}[(B_s - sB_1)B_1] = \mathbb{E}[B_sB_1] - s = \mathbb{E}[B_s(B_1-B_s)+B_s^2] - s$

$$= \mathbb{E}[B_s]\mathbb{E}[B_1-B_s] + s - s = 0.$$

Étape 2 : Soit $F : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ lipschitzienne bornée. On note $p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}$ la densité de B_t.

$$\mathbb{E}[F(B_s : 0\leq s\leq 1) \mid |B_1|\leq \varepsilon] = \frac{1}{\mathbb{P}(|B_1|\leq\varepsilon)} \mathbb{E}[F(b_s + sB_1 : 0\leq s\leq 1)\,\mathbb{1}_{|B_1|\leq\varepsilon}]$$
$$= \frac{1}{\mathbb{P}(|B_1|\leq\varepsilon)} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} p_1(x)\,dx\, \mathbb{E}[F(b_s + sx : 0\leq s\leq 1)]$$

Ainsi,

$$\left|\mathbb{E}[F(B_s : 0\leq s\leq 1) \mid |B_1|\leq\varepsilon] - \mathbb{E}[F(b_s : 0\leq s\leq 1)]\right| \leq \frac{1}{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} p_1(x)\,dx} \int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} p_1(x)\,dx \left|\mathbb{E}[F(b_s + sx : 0\leq s\leq 1)] - \mathbb{E}[F(b_s : 0\leq s\leq 1)]\right|$$

$$\xrightarrow[\varepsilon\to 0]{} 0 \quad \text{car } F \text{ lipschitzienne}$$

$\sim$

Proposition La loi du pont brownien est caractérisée par la relation suivante d'absolue continuité : Pour $0<t<1$ et $F : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ continue bornée ou mesurable ≥ 0

$$\mathbb{E}[F(b_s : 0 \leq s \leq t)] = \mathbb{E}\left[F(B_s : 0 \leq s \leq t)\ \frac{p_{1-t}(-B_t)}{p_1(0)}\right].$$

Preuve : Il suffit de montrer le résultat pour $F : \mathcal{C}([0,1],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ continue bornée (on en déduit le résultat pour $F = \mathbb{1}_A$ avec A fermé par approximation, puis $F = \mathbb{1}_A$ avec A borélien par classe monotone, puis F étagée par linéarité, et enfin $F \geq 0$ mesurable par approximation et convergence monotone)

On pose $W_u = B_{t+u} - B_t$, de sorte que $(W_u)_{0 \leq u \leq 1-t}$ est un MB indépendant de $(B_u)_{0\leq u\leq t}$

Alors
$$\mathbb{E}[F(B_s : 0 \leq s \leq t) \mid |B_1| \leq \varepsilon] = \frac{1}{\mathbb{P}(|B_1|\leq\varepsilon)}\mathbb{E}\left[F(B_s : 0\leq s\leq t)\ \mathbb{1}_{\{|B_t + W_{1-t}| \leq \varepsilon\}}\right]$$
$$= \frac{1}{\mathbb{P}(|B_1|\leq\varepsilon)}\mathbb{E}\left[F(B_s : 0\leq s\leq t)\ \mathbb{1}_{W_{1-t}\in[-B_t-\varepsilon,\, -B_t+\varepsilon]}\right]$$
$$= \frac{1}{\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} p_1(x)\,dx}\mathbb{E}\left[F(B_s : 0\leq s\leq t)\int_{-B_t-\varepsilon}^{-B_t+\varepsilon} p_{1-t}(x)\,dx\right]$$

Or $\displaystyle\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-\varepsilon}^{\varepsilon} p_1(x)\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to0]{} p_1(0)$ et $\displaystyle\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-B_t-\varepsilon}^{-B_t+\varepsilon} p_{1-t}(x)\,dx \xrightarrow[\varepsilon\to0]{} p_{1-t}(-B_t)$.

De plus, p_{1-s} étant borné, $\displaystyle\frac{1}{2\varepsilon}\int_{-B_t-\varepsilon}^{-B_t+\varepsilon} p_{1-t}(x)\,dx \leq \|p_{1-t}\|_\infty$.

Par convergence dominée, $\displaystyle\mathbb{E}[F(B_s : 0\leq s\leq t) \mid |B_1|\leq\varepsilon] \xrightarrow[\varepsilon\to0]{} \mathbb{E}\left[F(B_s : 0\leq s\leq t)\frac{p_{1-t}(-B_t)}{p_1(0)}\right]$

Comme aussi $\mathbb{E}[F(B_s : 0\leq s\leq t) \mid |B_1|\leq\varepsilon] \xrightarrow[\varepsilon\to0]{} \mathbb{E}[F(b_s : 0\leq s\leq t)]$, on en déduit le résultat.

2) Le théorème local limite

Lemme Soit $k \geq 1$ entier, pour $1 \leq i \leq k$ soit (α_n^i) une suite de réels >0 tq $\alpha_n^i \xrightarrow[n\to\infty]{} +\infty$. On considère une variable aléatoire $(X_n^1, \dots, X_n^k)$ à valeurs dans $\mathbb{Z}^k$ tq $\forall (\lambda_1,\dots,\lambda_k) \in \mathbb{R}^k$,

$$\alpha_n^1\alpha_n^2\cdots\alpha_n^k\ \mathbb{P}\left((X_n^1,\dots,X_n^k) = (\lfloor\lambda_1\alpha_n^1\rfloor, \dots, \lfloor\lambda_k\alpha_n^k\rfloor)\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} \phi(\lambda_1,\dots,\lambda_k)$$

où ϕ est une densité de probabilité sur $\mathbb{R}^k$.

Alors $\left(\frac{X_n^1}{\alpha_n^1}, \dots, \frac{X_n^k}{\alpha_n^k}\right) \xrightarrow{\text{loi}} X$, où X a densité ϕ.

Preuve : On va utiliser le lemme de Scheffé (cf feuille 1) : si X_n a pour densité f_n sur $\mathbb{R}^n$ et si $f_n \xrightarrow{pp} f$ avec f densité de proba, alors $X_n \xrightarrow{loi} X$ avec X à densité f.

Soit $(Y_n^1, \dots, Y_n^k)$ une v.a. de densité $\phi_n(\lambda_1, \dots, \lambda_k) = \alpha_n^1 \cdots \alpha_n^k \, \mathbb{P}\left((X_n^1, \dots, X_n^k) = (\lfloor \lambda_1 \alpha_n^1 \rfloor, \dots, \lfloor \lambda_k \alpha_n^k \rfloor) \right)$ sur $\mathbb{R}^k$

et soit $(Z_n^1, \dots, Z_n^k) = (\lfloor \alpha_n^1 Y_n^1 \rfloor, \dots, \lfloor \alpha_n^k Y_n^k \rfloor)$, qui a la même loi que $(X_n^1, \dots, X_n^k)$

Puisque $\phi_n \to \phi$, $(Y_n^1, \dots, Y_n^k) \xrightarrow{loi} X$ et comme $\left| Y_n^i - \frac{Z_n^i}{\alpha_n^i} \right| \leq \frac{1}{\alpha_n^i} \xrightarrow[n \to \infty]{} 0 \quad \forall 1 \leq i \leq n$,

on en déduit le résultat.

∼

Définition Une variable aléatoire X réelle est dite *lattice* s'il existe $b \in \mathbb{R}$ et $h \in \mathbb{R}_+^*$ tq $\mathbb{P}(X \in b + h\mathbb{Z}) = 1$

Le plus grand tel h est appelé le *span* de X (le fait qu'il soit bien défini provient du lemme ci-dessous)

S'il vaut 1, on dit que X est *apériodique*

Exemple Si $\mathbb{P}(X=1) = \mathbb{P}(X=-1)$, X a pour span 2

Lemme Soit X v.a. réelle

(1) X est lattice ssi $\exists t \in \mathbb{R}^*$ tq $|\phi(t)| = 1$

(2) X a pour span $h > 0$ ssi $|\phi(\frac{2\pi}{h})| = 1$ et $|\phi(t)| < 1$ pour $t \in]0, \frac{2\pi}{h}[$.

Preuve : (1) Si $\mathbb{P}(X \in b + h\mathbb{Z}) = 1$, alors $\mathbb{P}\left(\frac{X-b}{h} \in \mathbb{Z}\right) = 1$, de sorte que $\mathbb{E}\left[e^{2i\pi \frac{X-b}{h}}\right] = 1$ et

$$\left| \mathbb{E}\left[e^{\frac{2i\pi X}{h}}\right] \right| = \left| e^{2i\pi b} \right| = 1$$

Réciproquement, si $|\phi(t_0)| = 1$ pour $t_0 \in \mathbb{R}^k$, soit $a \in \mathbb{R}$ tq $\phi(t_0) = e^{ia}$. Alors $\mathbb{E}\left[e^{i(t_0 X - a)}\right] = 1$

Donc $\mathbb{E}[\cos(t_0 X - a)] = 1$. Comme $\cos \leq 1$, on en déduit que p.s $\cos(t_0 X - a) = 1$

Donc p.s $t_0 X - a \in 2\pi\mathbb{Z}$, donc $\mathbb{P}\left(X \in \frac{a}{t_0} + \frac{2\pi}{t_0}\mathbb{Z}\right) = 1$.

(2) La preuve de (1) montre que $\exists b \in \mathbb{R}$ et $h > 0$ tq $\mathbb{P}(X \in b + h\mathbb{Z}) = 1$ ssi $|\phi(\frac{2\pi}{h})| = 1$,

d'où le résultat

∼

Théorème (local limite) Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des v.a réelles iid apériodiques à valeurs dans $\mathbb{Z}$ tq $a = \mathbb{E}[X_1]$ et $\sigma^2 = \mathbb{E}[X_1^2] - \mathbb{E}[X_1]^2 \in]0,\infty[$. On note $S_n = X_1 + \cdots + X_n$. Alors

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \left| \sqrt{n}\, \mathbb{P}(S_n = k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{k-an}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2\right)\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0.$$

Preuve: Posons $X_i' = X_i - a$, $S_n' = S_n - an$. On note $\varphi(t) = \mathbb{E}[e^{itX_1'}]$

Puisque $\mathbb{E}[e^{itS_n'}] = \sum_{j\in\mathbb{Z}-an} e^{itj}\, \mathbb{P}(S_n' = j)$, il vient $\mathbb{P}(S_n' = k) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk}\, \mathbb{E}[e^{itS_n'}]\,dt = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} e^{-itk}\varphi(t)^n\,dt$ pour $k\in\mathbb{Z}-an$

Ainsi, $u\in\mathbb{R}$ étant choisi de sorte que $u\sigma\sqrt{n} + an \in \mathbb{Z}$

$$\sigma\sqrt{n}\,\mathbb{P}(S_n' = u\sigma\sqrt{n}) = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi\sigma\sqrt{n}}^{\pi\sigma\sqrt{n}} e^{-itu}\,\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^n dt.$$

Mais $\forall u\in\mathbb{R}$,
$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}u^2} = \frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-itu - t^2/2}\,dt.$$

Ainsi, en fixant $A>0$ et $0<\varepsilon\leq 1$, pour n assez grand

$$\left|\sigma\sqrt{n}\,\mathbb{P}(S_n' = u\sigma\sqrt{n}) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{1}{2}u^2}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\left(|I_1^{(A)}| + |I_2^{(A,\varepsilon)}| + |I_3^{(\varepsilon)}| + |I_4^{(A)}|\right)$$

avec $I_1 = \int_{-A}^{A} e^{-itu}\left(\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^n - e^{-t^2/2}\right)dt$, $I_2 = \int_{A<|t|<\varepsilon\sigma\sqrt{n}} e^{-itu}\,\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^n dt$,

$I_3 = \int_{\varepsilon\sigma\sqrt{n}<|t|<\pi\sigma\sqrt{n}} e^{-itu}\,\varphi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^n dt$, $I_4 = \int_{|t|>A} e^{-itu-t^2/2}\,dt$

On mq $\forall \varepsilon'>0$ fixé, on peut trouver $A>0$ et $0<\varepsilon\leq 1$ tq pour n assez grand $|I_i|\leq\varepsilon'$ pour $1\leq i\leq 4$.

On écrit $\varphi(t) = 1 - \frac{t^2}{2}\sigma^2 + t^2\eta(t^2)$ avec $\eta(0)=0$ et η continue. (*)

Pour le voir, on peut utiliser l'inégalité $\left|e^{ix} - \sum_{k=0}^{n}\frac{(ix)^k}{k!}\right| \leq \min\left(\frac{|x|^{n+1}}{(n+1)!}, \frac{2|x|^n}{n!}\right)$

(cf Lemma 3.3.19 dans Durrett, Probability theory and examples, 5th Ed),

qui implique $|\varphi(t) - 1 - t^2\sigma^2/2| \leq t^2\, \underbrace{\mathbb{E}[\min(|t|\,|X|^3, 2X^2)]}_{\xrightarrow[t\to 0]{} 0}$ par convergence dominée

$\boxed{\text{Pour } I_1}$ On peut écrire $I_1 = \int_{-A}^{A} f_n(u,t)\,dt$ avec $|f_n(u,t)| \leq 1 + e^{-t^2/2}$ pour tout $u\in\mathbb{R}$, $t\in[-A,A]$, $n\geq 1$

et $\sup_{u\in\mathbb{R}} |f_n(u,t)| \longrightarrow 0$ par (*).

Par convergence dominée, $\forall A>0$, $|I_1|\longrightarrow 0$ uniformément en u.

Pour I_4 On a $|I_4| \leq 2\int_A^\infty e^{-t^2/2}\,dt$.

Pour I_3 Par apériodicité, $|\phi(t)|<1$ pour tout $0<t<2\pi$. Il existe donc $c>0$ tq $\left|\phi\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)\right| \leq e^{-c}$ pour tout $\varepsilon\sigma\sqrt{n} < |t| < \pi\sigma\sqrt{n}$, de sorte que

$$|I_3| \leq 2\int_{\varepsilon\sigma\sqrt{n}}^{\pi\sigma\sqrt{n}} e^{-cn}\,dt \leq 2\pi\sigma\sqrt{n}\, e^{-cn}$$

Pour I_2 On montre que $|\varphi(t)| \leq \exp\left(-\frac{t^2\sigma^2}{4}\right)$ pour t assez petit.

Par $(*)$, $|\phi(t)|^2 = \phi(t)\overline{\phi(t)} = \left(1-\frac{t^2\sigma^2}{2}+t^2\eta(t^2)\right)\left(1-\frac{t^2\sigma^2}{2}+t^2\overline{\eta(t^2)}\right) = 1-\sigma^2t^2+o(t^2)$,

et donc $|\phi(t)| = 1-\frac{\sigma^2}{2}t^2+o(t^2)$, d'où le résultat par le DL de exp en 0.

Ainsi, si $\varepsilon>0$ est choisi suffisamment petit,

$$|I_2| \leq 2\int_A^{\varepsilon\sigma\sqrt{n}} \left(e^{-\left(\frac{t}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2\frac{\sigma^2}{4}}\right)dt \leq 2\int_A^\infty e^{-t^2/4}\,dt.$$

Ceci conclut la preuve

Corollaire Sous les hypothèses du théorème local limite, en supposant $\mathbb{E}[X_1]=0$, on

(1) $\mathbb{P}(S_n=0) \sim \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \times \frac{1}{\sqrt{n}}$

(2) $\exists C>0$ tq $\forall n\geq 1, \forall k\geq 1$, $\mathbb{P}(S_n=k) \leq \frac{C}{\sqrt{n}}$

(3) si (x_n) est une suite d'entiers tq $\frac{x_n}{\sigma\sqrt{n}} \to x \in \mathbb{R}$, alors

$$\sqrt{\sigma^2 n}\ \mathbb{P}(S_n=x_n) \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{x^2}{2}}$$

Remarque Il est possible de montrer l'amélioration suivante (utile pour $|k|$ grand):

$$\sup_{k\in\mathbb{Z}} \max\left(1, \left(\frac{k-an}{\sqrt{n}}\right)^2\right)\left|\sigma\sqrt{n}\,\mathbb{P}(Z_n=k) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\exp\left(-\frac{1}{2}\left(\frac{k-an}{\sigma\sqrt{n}}\right)^2\right)\right| \underset{n\to\infty}{\longrightarrow} 0$$

(cf <u>Principles of Random Walk</u>, Spitzer (Chap II, Sec 7, P10)

3) Convergence vers le pont brownien

On rappelle la notation $p_t(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi t}} e^{-x^2/2t}$.

Théorème (Donsker conditionné) Soit $(X_i)_{i\geq 1}$ des variables aléatoires i.i.d. à valeurs dans $\mathbb{Z}$ apériodiques telles que $\mathbb{E}[X_1]=0$ et $\sigma^2 = \mathbb{E}[X_1^2] \in]0,\infty[$.

On pose $S_n = X_1 + \dots + X_n$ et on définit S_t par interpolation linéaire. Alors

$$\left(\frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}} : 0 \leq t \leq 1\right) \text{ sous } \mathbb{P}(\cdot \mid S_n = 0) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} (b_t)_{0\leq t\leq 1}$$

Remarque l'apériodicité implique que $\mathbb{P}(S_n=0)>0$ pour tout n assez grand (conséquence du théorème local limite par ex)

Preuve : **Étape 1** : convergence sur $[0,s]$ avec $0<s<1$ fixé.

Soit $F : \mathcal{C}([0,s],\mathbb{R}) \to \mathbb{R}$ continue bornée. Alors

$$\mathbb{E}\left[F\left(\frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}} : 0\leq t\leq s\right) \Big| S_n = 0\right] = \mathbb{E}\left[F\left(\frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}} : 0\leq t\leq s\right) \frac{\varphi_{n-\lceil ns\rceil}(-S_{\lceil ns\rceil})}{\varphi_n(0)}\right], \text{ avec } \varphi_r(k) = \mathbb{P}(S_r = k).$$

D'après le théorème de représentation de Skorokhod, on peut supposer que

$$\left(\frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}} : 0\leq t\leq s\right) \xrightarrow{\text{p.s}} (B_t : 0\leq t\leq s).$$

En utilisant le théorème local limite, on obtient

1) $\exists C>0$ tq $\forall n\geq 1$, $\frac{\varphi_{n-\lceil ns\rceil}(-S_{\lceil ns\rceil})}{\varphi_n(0)} \leq C$ (avec le corollaire (1) et (2) de la page précédente)

2) ps $\frac{\varphi_{n-\lceil ns\rceil}(-S_{\lceil ns\rceil})}{\varphi_n(0)} \xrightarrow[n\to\infty]{} \frac{p_1\left(-\frac{B_s}{\sqrt{1-s}}\right)}{\sqrt{1-s}\, p_1(0)} = \frac{p_{1-s}(-B_s)}{p_1(0)}$. (avec le corollaire (3))

Par convergence dominée, on conclut que

$$\mathbb{E}\left[F\left(\frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}} : 0\leq t\leq s\right) \Big| S_n = 0\right] \xrightarrow[n\to\infty]{} \mathbb{E}\left[F(B_t : 0\leq t\leq s)\frac{p_{1-s}(-B_s)}{p_1(0)}\right] = \mathbb{E}\left[F(b_t : 0\leq t\leq 1)\right].$$

Étape 2 : Convergence des fidi sur $[0,1]$

Ceci provient de l'étape 1 (avec le fait que en $t=1$ les 2 processus valent 0)

Étape 3 : Tension sur $[0,1]$

On utilise un argument de renversement du temps :

en posant $\hat{S}_i^n = S_n - S_{n-i}$, on a clairement $(S_i)_{0\le i\le n} \overset{\text{loi}}{=} (\hat{S}_i^n)_{0\le i\le n}$

et cette égalité en loi reste vraie sachant $S_n=0$.

On en déduit que sachant $S_n=0$,

$$S^{1,n} := \left(\frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}} : 0\le t\le \frac{3}{4}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \left(b_t : 0\le t\le \frac{3}{4}\right)$$

$$S^{2,n} := \left(\frac{S_{n(1-t)}}{\sigma\sqrt{n}} : 0\le t\le \frac{3}{4}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{\text{loi}} \left(\tilde{b}_t : 0\le t\le \frac{3}{4}\right)$$

avec $\tilde{b}$ pont brownien indépendant de b.

On en déduit que $S^{1,n}$ et $S^{2,n}$ sont tendus, et du fait que pour $\delta<\frac{1}{4}$,

$$\omega\left(\left(\frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}} : 0\le t\le 1\right), \delta\right) = \max\left(\omega(S^{1,n},\delta), \omega(S^{2,n},\delta)\right),$$

On conclut que $\left(\frac{S_{nt}}{\sigma\sqrt{n}} : 0\le t\le 1\right)$ sous $\mathbb{P}(\cdot \mid S_n=0)$ est tendu.

$\sim$