Cours 8 : Quelques mots sur les processus discontinus : L'espace de Skorokhod

On note $\mathbb{D}$ (ou $\mathbb{D}([0,1],\mathbb{R}^d)$) l'ensemble des fonctions $x : [0,1] \to \mathbb{R}^d$ qui sont :

- continues à droite ($\forall t < 1$, $x(t+) = \lim_{s \downarrow t} x(s) = x(t)$)
- ayant des limites à gauche ($\forall t \leq 1$, $x(t-) = \lim_{s \uparrow t} x(s)$)

Pour $x \in \mathbb{D}$, on dit que x est càdlàg et on note $\Delta x(t) = x(t) - x(t-)$ $(0 \leq t \leq 1)$ et $\Delta x(0) = 0$.

Les fonctions/processus càdlàg apparaissent naturellement en probabilités :

- fonctions de répartition
- Processus de Poisson
- processus de Lévy (càdlàg à accroissements stationnaires et indépendants), qui apparaissent notamment dans l'extension du thm de Donsker à certaines v.a de variance ∞
- Toute martingale % à une filtration complète et càd admet une modif càdlàg

⚠ $(\mathbb{D}, \|\cdot\|_\infty)$ est un espace de Banach, mais il n'est pas séparable

(prendre $x^{(u)} = \mathbb{1}_{[u,1]}$: $\|x^{(u)} - x^{(v)}\|_\infty = 1$ pour $u \neq v$).

$\to$ il faut chercher une autre topologie sur $\mathbb{D}$.

Plan :

1) Propriétés de base
2) Topologie de Skorokhod (J_1) sur $\mathbb{D}$
3) Convergence étroite dans $\mathbb{D}$
4) Critères de tension
5) Compléments facultatifs
   - a) $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R}^d)$
   - b) C-tension
   - c) Processus ponctuels
   - d) Autres topologies

Références : • Billingsley, Convergence of probability measures, 2nd Ed.

• Jacod-Shiraev, Limit theorems for stochastic processes (Chap VI)

• Kallenberg, Foundations of Modern Probability, 2nd Ed.

Remarque On se place dans $\mathbb{D}([0,1], \mathbb{R}^d)$ pour simplifier, mais ce qui suit s'adapte sans soucis au cas de $\mathbb{D}([0,1], S)$ avec (S,d) polonais.

1) Propriétés de base

Ex : Soit $(r_i)_{i\geq 1}$ une énumération des rationnels de $]0,1[$. On a $x(t) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{2^i} \mathbb{1}_{\{r_i \leq t\}} \in \mathbb{D}$.

Prop Soit $x \in \mathbb{D}$

1) $\forall \varepsilon > 0, \# \{ t \in [0,1], |\Delta x(t)| > \varepsilon \} < \infty$

2) $\{ t \in [0,1] : \Delta x(t) \neq 0 \}$ est dénombrable

3) x est bornée

4) x est lim uniforme de fonctions en escalier

Idée de preuve : 1) Si le $\#$ est ∞, on prend une suite (t_n) dedans. Quitte à extraire, on suppose $t_n \to t$. On distingue les deux cas $t_n \downarrow t$, $t_n \uparrow t$ pour une contradiction.

2) ok par 1)

3) Par l'absurde : si $|x(t_n)| > n$, on extrait $t_n \to t$ avec (t_n) monotone et on obtient $\max(|x(t)|, |x(t-)|) = \infty$, absurde

4) On introduit $w(x, A) = \sup_{s,t \in A} |x(t) - x(s)|$ pour $A \subset [0,1]$. On utilise alors :

Lemme $\forall \varepsilon > 0, \exists\ 0 = t_0 < t_1 < \dots < t_r = 1$ tq $\max_{0 \leq i \leq r-1} w(x, [t_i, t_{i+1}[) \leq \varepsilon$.

Idée de preuve : Soit $\varepsilon>0$. On note $T = \sup\{ t\in[0,1] : \exists\, 0=t_0<t_1<\dots<t_r=t,\ \max_{0\le i\le r-1}(x,[t_i,t_{i+1}[)\le\varepsilon\}$

Alors $x(0)=x(0+) \Rightarrow T>0$, $x(T-)$ existe $\Rightarrow$ le sup est atteint, $x(T)=x(T+) \Rightarrow T<1$ est impossible

$\sim$

On conclut en prenant $x_n = \sum_{i=1}^{r-1} x(t_i)\, \mathbb{1}_{[t_i,t_{i+1}[}$

$\sim$

On définit alors le "module de continuité modifié" :

Notation Pour $x:[0,1]\to\mathbb{R}^d$ et $\delta>0$, on pose
$$w'(x,\delta) = \inf_{\substack{r\ge 1 \\ 0=t_0<t_1<\dots<t_r=1 \\ \text{tq } |t_{i+1}-t_i|>\delta}} \ \max_{0\le i\le r-1} w(x,[t_i,t_{i+1}[)$$

Exemple : Soit $x_n = n\,\mathbb{1}_{[1-\varepsilon,1]}$. Alors
$$w'(x_n,\delta) = 0 \text{ si } \delta<\varepsilon$$
$$= n \text{ si } \delta\ge\varepsilon$$

Proposition Soient $x,y:[0,1]\to\mathbb{R}^d$.

1) $x\in\mathbb{D} \Leftrightarrow w'(x,\delta)\xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$ (à rapprocher de x continu $\Leftrightarrow w(x,\delta)\xrightarrow[\delta\to 0]{} 0$)

2) $w'(x,\delta)\le 2\|x-y\|_\infty + w'(y,\delta)$

3) Si $x\in\mathbb{D}$, $\delta>0$, (a) $w'(x,\delta)\le w(x,2\delta)$

(b) $w(x,\delta)\le 2\,w'(x,\delta) + \sup_{0\le t\le 1}|\Delta x(t)|$

Preuve laissée en exo (on a déjà vu $\Rightarrow$ pour 1)), cf Billingsley p 123

2) Topologie de Skorokhod (J_1) sur $\mathbb{D}$

Deux fonctions x et y sont proches pour la norme uniforme si le graphe de $x(t)$ peut être modifié en celui de $y(t)$ par une petite perturbation des ordonnées, en gardant les abscisses fixées. Dans $\mathbb{D}$, on va aussi permettre une petite déformation temporelle.

Définition Un changement de temps est une fonction $\lambda : [0,1] \to [0,1]$ tq $\lambda(0)=0$, $\lambda(1)=1$, λ est strictement croissante et continue. On note $\Lambda = \{\text{changements de temps}\}$.

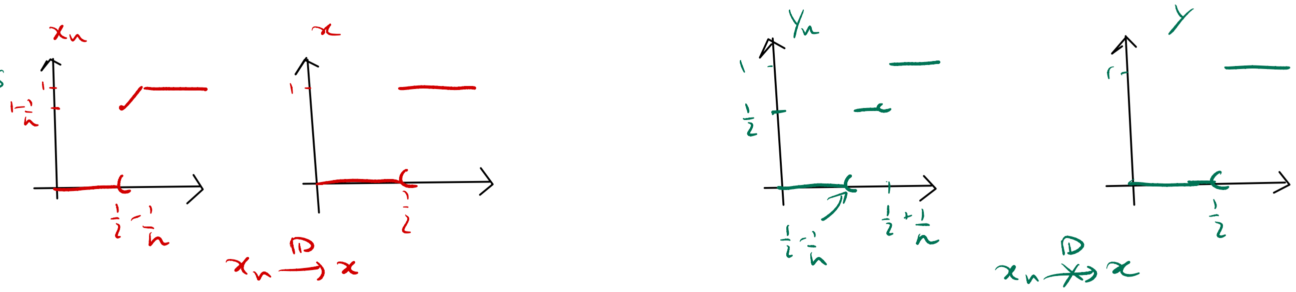
Définition Soit $x_n \in \mathbb{D}$, $x \in \mathbb{D}$. On dit que $x_n \to x$ au sens de Skorokhod si

$$\forall n \geq 1, \exists \lambda_n \in \Lambda \text{ tq } \|\lambda_n - Id\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad \|x_n \circ \lambda_n - x\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$$

(ou $\|x_n - x\circ\lambda_n\|_\infty \to 0$ de manière équivalente)

On note $x_n \xrightarrow{\mathbb{D}} x$

Exemples



Remarque Pour $\lambda_n, \lambda \in \Lambda$, $\|\lambda_n - \lambda\|_\infty \to 0 \iff \lambda_n$ converge simplement (thm de Dini)

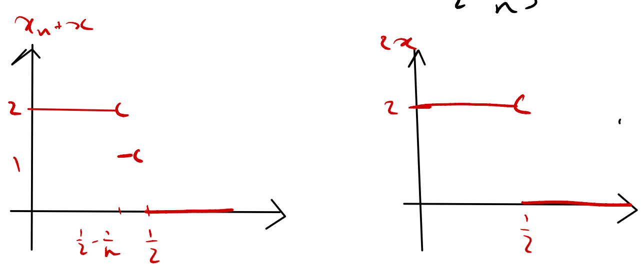
Remarque : Si on pose, pour $x, y \in \mathbb{D}$, $d_S(x,y) = \inf_{\lambda\in\Lambda} \max\left(\|\lambda - Id\|_\infty, \|x\circ\lambda - y\|\right)$,

on vérifie que d_S est une distance sur $\mathbb{D}$ qui métrise la notion de convergence précédente, et que $(\mathbb{D}, d_S)$ est un espace métrique séparable

⚠ $(\mathbb{D}, d_S)$ n'est pas une topologie d'espace vectoriel normé : si $x_n = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}-\frac{1}{n}]}$ et $x = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2}]}$,

on a $x_n \xrightarrow{\mathbb{D}} x$ mais $x_n + x \not\xrightarrow{\mathbb{D}} 2x$

On vérifie cependant que si $x_n \xrightarrow{\mathbb{D}} x$ et $y_n \xrightarrow{\mathbb{D}} y$ avec y continue, alors $x_n + y_n \xrightarrow{\mathbb{D}} x + y$



Pour $t \in [0,1]$, on note $\pi_t : \mathbb{D} \longrightarrow \mathbb{R}$
$x \longmapsto x(t)$

Prop (exemples de fonctionnelles continues)

1) $x \mapsto \|x\|_\infty$ est continue pour d_S

2) $x \mapsto \sup_{0 \le t \le 1} |\Delta x(t)|$ est continue pour d_S

3) π_0 et π_1 sont continues.

4) Soit $t \in]0,1[$. π_t est continue en toute fonction x continue en t.

5) Soit $f : \mathbb{R}^d \to \mathbb{R}$ continue. $x \mapsto \int_0^1 f(x(s))\,ds$ est continue pour d_S

Preuve : Soit $x_n \xrightarrow{\mathbb{D}} x$, et $\lambda_n \in \Lambda$ tq $x_n \circ \lambda_n \xrightarrow{cvu} x$ et $\lambda_n \xrightarrow{cvu} Id$.

1) On a

$$\big|\|x_n\|_\infty - \|x\|_\infty\big| = \big|\|x_n \circ \lambda_n\|_\infty - \|x\|_\infty\big| \le \|x_n \circ \lambda_n - x\|_\infty \longrightarrow 0$$

2) On a $|\Delta x(t)| = |x(t) - x(t-)| \le 2\|x\|_\infty$, et puisque $\sup_{0 \le t \le 1} |\Delta x_n(t)| = \sup_{0 \le t \le 1} |\Delta x_n \circ \lambda_n(t)|$

$$\Big| \sup_{0 \le t \le 1} |\Delta x_n(t)| - \sup_{t \in [0,1]} |\Delta x(t)| \Big| \le \sup_{t \in [0,1]} |\Delta(x_n \circ \lambda_n - x)| \le 2\|x_n \circ \lambda_n - x\|_\infty \longrightarrow 0.$$

3) Ceci provient du fait que pour tout $\lambda \in \Lambda$ on a $\lambda(0) = 0$ et $\lambda(1) = 1$

4) On écrit

$$|x_n(t) - x(t)| \le \|x_n - x \circ \lambda_n^{-1}\|_\infty + |x \circ \lambda_n^{-1}(t) - x(t)| \xrightarrow[n \to \infty]{} 0$$

par continuité de x en t.

5) Soit $x_n \xrightarrow{\mathbb{D}} x$. Comme $\sup \|x_n\|_\infty \vee \|x\|_\infty < \infty$, on peut supposer f bornée.

Posons $D_x = \{t \in [0,1], \Delta x(t) \neq 0\}$, dénombrable. Alors

$$\int_a^b f(x_n(t))\,dt = \int_a^b \underbrace{f(x_n(t))\,\mathbb{1}_{t \notin D_x}}_{\xrightarrow[n\to\infty]{cvs} f(x(t))\,\mathbb{1}_{t \notin D_x}}\,dt.$$ On conclut par convergence dominée

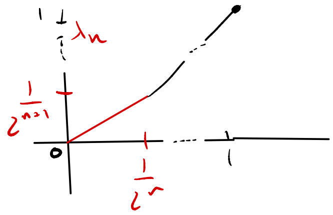
$\sim$

Remarques En général les fonctions $f_1 : x \mapsto x(t)$, $f_2 : x \mapsto w'(x,\delta)$ et $f_3 : x \mapsto \sup\limits_{a \le t \le b} |\Delta x(t)|$ pour $0 \le a \le b \le 1$ ne sont pas continues (bien que $x \mapsto w(x,\delta)$ est continu pour $x \in \mathcal{C}([0,1])$).

Par exemple, si $x_n = \mathbb{1}_{[0,\delta+\frac{1}{2^n}[}$ et $x = \mathbb{1}_{[0,\delta[}$, $x_n \xrightarrow{\mathbb{D}} x$ mais $x_n(\delta) = 1 \not\to x(\delta) = 0$, $w'(x_n,\delta) = 0 \not\to w'(x,\delta) = 1$ et $x_n(\delta) - x_n(\delta-) = 0 \not\to x(\delta) - x(\delta-) = 1$

On peut cependant montrer que f_2 est semi-continue inférieurement et que f_3 est semi-continue supérieurement.

Exemple Soit $x_n = \mathbb{1}_{[0,\frac{1}{2^n}]}$. Si on considère λ_n :



On voit que $d_s(x_n, x_{n+1}) \le \frac{1}{2^n}$.

En particulier, (x_n) est de Cauchy mais ne converge pas (la seule limite possible est la fonction nulle). Ainsi, $(\mathbb{D}, d_s)$ n'est pas complet.

Cependant :

Théorème Il existe une distance d_s' sur $\mathbb{D}$ telle que les topologies engendrées par d_s et d_s' sont les mêmes, et $(\mathbb{D}, d_s')$ est complet.

Cf Billingsley, Theorem 12.2.

3) Convergence étroite dans $\mathbb{D}$

<u>Proposition</u> La tribu produit sur $\mathbb{D}$ (plus petite tribu rendant les applications $\pi_t : x \mapsto x(t)$ mesurables) est la tribu borélienne de $(\mathbb{D}, d_S)$

Le fait que π_t soit mesurable provient du fait que $\pi_t^p : x \mapsto p\int_t^{t+1/p} x(s)\,ds$ est continue, donc mesurable, puis que $\pi_t = \lim_{p\to\infty} \pi_t^p$ par continuité à droite

Pour montrer que la tribu borélienne de $(\mathbb{D}, d_S)$ est incluse dans la tribu produit, on procède un peu comme dans le cas continu

<u>Remarque</u> La tribu produit est aussi la plus petite tribu rendant mesurables les applications $(\pi_t)_{t\in D}$ où $D \subset [0,1]$ dense contenant 1.

En effet, $\pi_t = \lim_{\substack{s\in D \\ s \downarrow t}} \pi_s$ (ponctuellement)

Ainsi, les fidi caractérisent les mesures de $M_1(\mathbb{D})$. Cependant :

⚠ La cv des fidi n'est pas impliquée par la cv en loi (les π_t ne sont pas continues)

<u>Définition</u> Soit X v.a dans $\mathbb{D}$. On dit que $t \in [0,1]$ est un point de discontinuité fixe de X si $\mathbb{P}(|\Delta X_t|>0)>0$. On note D_X l'ensemble de ces points.

<u>Prop</u> Si X v.a dans $\mathbb{D}$, D_X est au plus dénombrable

<u>Idée de preuve</u> : montrer que $\forall \varepsilon, \delta > 0$, $D_X^{\varepsilon,\delta} = \{t\in[0,1] : \mathbb{P}(|\Delta X_t|>\varepsilon)\geq \delta\}$ est fini.

Théorème Soit $X^n, X \in \mathbb{D}$ des v.a. Alors $X^n \xrightarrow{loi} X$ ssi

(i) $X^n \xrightarrow{fidi} X$ en dehors de $D_X \setminus \{1\}$, i.e $\forall t_1, \dots, t_k \in ([0,1] \setminus D_X) \cup \{1\}$

$$(X^n_{t_1}, \dots, X^n_{t_k}) \xrightarrow{loi} (X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$$

(ii) (X^n) est tendue dans $\mathcal{M}_1(\mathbb{D})$

Preuve : $\boxed{\Rightarrow}$ (ii) provient du thm de Prokhorov

Pour (i), on remarque que si $t \notin D_X$, alors $\mathbb{P}_X(dx)$ ps, π_t est continu en x.

$\boxed{\Leftarrow}$ Par le thm de Prokhorov, il suffit de mq si $X^{\varphi(n)} \xrightarrow{loi} Y$,

alors $X \overset{loi}{=} Y$.

Pour cela, par (i), on a que X et Y ont les fidi sur $([0,1] / D_X \cup D_Y) \cup \{1\}$

et ont donc même loi

4) Critères de tension

L'analogue du théorème d'Arzela-Ascoli dans $\mathbb{D}$ est :

<u>Théorème</u> Une famille $\mathcal{F} \subset \mathbb{D}$ est relativement compacte ssi

(1) $\sup_{x \in \mathcal{F}} \|x\|_\infty < \infty$

(2) $\forall \varepsilon > 0, \exists \delta > 0, \quad \sup_{x \in \mathcal{F}} w'(x, \delta) \leq \varepsilon$

Comme pour les fonctions continues, on en déduit

<u>Théorème</u> Soit $(X^n)_{n \geq 1}$ de v.a de $\mathbb{D}$ est tendue ssi

(1) $(\|X^n\|_\infty)_{n \geq 1}$ est tendue dans $\mathbb{R}$

(2) $\forall \varepsilon, \eta > 0, \exists \delta > 0, \quad \limsup_{n \to \infty} \mathbb{P}(w'(X^n, \delta) > \eta) \leq \varepsilon$

<u>Remarque</u> : On ne peut pas remplacer (1) par "$(x_n(0))_{n \geq 1}$ est tendu" comme dans $\mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}^d)$, prendre par exemple $X^n = n \mathbb{1}_{[U, 1]}$ avec U uniforme sur $[0,1]$.

On peut cependant démontrer que lorsque (2) est vérifié, (1) $\Leftrightarrow$ (1') $\Leftrightarrow$ (1'') avec (1') et (1'') définis par :

(1') $\exists T \subset [0,1]$ dense contenant 1 tq $\forall t \in T$, $(X^n(t))_{n \geq 1}$ est tendu

(1'') $(X^n(0))_{n \geq 1}$ et $\left(\sup_{0 \leq t \leq 1} |\Delta X^n(t)| \right)_{n \geq 1}$ sont tendues.

(cf Billingsley p140)

<u>Application</u> : Soit $(U_i)_{i \geq 1}$ des va iid uniformes sur $[0,1]$ et $\lambda > 0$. On pose pour $t \leq 1$

$X_t^{(n)} = \sum_{k=1}^{\lfloor nt \rfloor} \mathbb{1}_{U_k \leq \frac{\lambda}{n}}$. Alors $(X_t^{(n)})_{0 \leq t \leq 1} \xrightarrow{\text{loi}} (N_t^\lambda)_{0 \leq t \leq 1}$, où N^λ est un processus de Poisson d'intensité λ

Idée de preuve : • fidi (N^λ n'a pas de discontinuités fixes). Soit $0 < t_1 < \cdots < t_k \leq 1$.

Alors les $(X^{(n)}_{t_{i+1}} - X^{(n)}_{t_i})$ sont ⫫ à n fixé, de loi $\mathrm{Bin}(\lfloor n t_{i+1} \rfloor - \lfloor n t_i \rfloor, \frac{\lambda}{n}) \xrightarrow{\text{loi}} \mathrm{Poi}(\lambda(t_{i+1} - t_i))$.

• tension * $\| X^{(n)} \|_\infty \overset{\text{loi}}{=} \mathrm{Bin}(n, \frac{\lambda}{n})$ converge en loi, donc est tendue

* contrôle de $w'(X^n, \delta)$.

On mq $\limsup_{n \to \infty} \mathbb{P}(\underbrace{\exists \text{ deux sauts de } X^n \text{ espacés d'au plus de } \delta}_{A_n(\delta)}) \xrightarrow[\delta \to 0]{} 0$, ce qui suffit car $\{ w'(X_n, \delta) > \eta \} \subset A_n(\delta)$.

Pour cela on regarde $\mathbb{P}(A_n(\delta) \mid X^n_1 = k)$.

Sachant $X^n_1 = k$, les sauts de X^n sont un ss-ensemble uniforme à k éléments de $\{ \frac{1}{n}, \frac{2}{n}, \ldots, \frac{n}{n} \}$.

Si on a deux sauts espacés de moins de δ, on peut retirer un tel saut qui est le plus à droite, et marquer le saut à distance $\leq \delta$ le plus proche.

Cela permet de voir que

choix de k-1 sauts / choix du saut marqué / ajout d'un saut à distance $\leq \delta$ à sa droite

$$\mathbb{P}(A_n(\delta) \mid X^n_1 = k) \leq \frac{\binom{n}{k-1} (k-1)(\delta n)}{\binom{n}{k}}$$

$$\leq \delta k^3 \quad \text{(après calculs)}.$$

Ainsi, $\mathbb{P}(A_n(\delta)) \leq \delta \sum_{k \geq 0} k^3 \, \mathbb{P}(\mathrm{Bin}(n, \frac{\lambda}{n}) = k) \leq C \delta$, d'où le résultat.

~

On conclut par plusieurs autres critères de tension. Le premier est un équivalent du critère de Kolmogorov (cf Billingsley, Theorem 13.5)

Théorème (critère de Billingsley) Soit $(X^n)_{n \geq 1}$ une suite de v.a. dans $\mathbb{D}$. On suppose que :

(1) $(\| X^n \|_\infty)_{n \geq 1}$ est tendue

(2) Il existe $a, b > 0$ et une fonction croissante $F : [0,1] \to \mathbb{R}_+$ telle que
$$\forall n \geq 1, \ \forall r \leq s \leq t, \ \mathbb{E}\left[|X^n(t) - X^n(s)|^a \, |X^n(s) - X^n(r)|^a \right] \leq (F(t) - F(r))^{1+b}$$

(3) $\forall \varepsilon > 0$,
$$\lim_{\delta \to 0} \limsup_{n \to \infty} \Big(\mathbb{P}(|X^n(\delta) - X^n(0)| \geq \varepsilon) + \mathbb{P}(|X^n(1) - X^n(1-\delta)| \geq \varepsilon) \Big) = 0$$

Remarques : • La condition (3) est nécessaire : prendre par exemple $X^n = \mathbb{1}_{[0, \frac{1}{n}[}$

• La condition (3) est satisfaite si pour un certain $X \in \mathbb{D}$, $X_n \xrightarrow{\text{fidi}} X$ au sens des fidi sur $[0,1] \setminus D_X$ et si X est ps continu en 1.

On conclut par le critère d'Aldous, particulièrement utile pour des marches aléatoires ou plus généralement des martingales.

Pour $X^n \in \mathbb{D}$, on note $(\mathcal{F}^n_t)_{0 \leq t \leq 1}$ sa filtration naturelle. On note $\mathcal{T}^n = \{$ temps d'arrêt pour $\mathcal{F}^n$ qui sont $\leq 1 \}$

Théorème (Aldous) On suppose que

(1) $(\|X^n\|_\infty)_{n \geq 1}$ est tendue

(2) $\forall$ suite $h_n \searrow 0$, $\forall$ suite $(\tau_n) \in \mathcal{T}^n$, $\left| X^n_{(\tau_n + h_n) \wedge 1} - X^n_{\tau_n} \right| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$.

Alors $(X^n)_{n \geq 1}$ est tendue

Cf par exemple Kallenberg, Theorem 16.11 pour une preuve.

Ce théorème permet par exemple de démontrer le résultat spectaculaire suivant :

Théorème Soit $(X^n_i)_{i,n\geq 1}$ des v.a tq $\forall n\geq 1$, $(X^n_i)_{i\geq 1}$ sont i.i.d. On pose $S^n_k = X^n_1 + \cdots + X^n_k$ et on suppose qu'il existe une suite $m_n \to \infty$ d'entiers tq $S^n_{m_n}$ converge en loi vers une limite notée X.
Alors il existe $(X_t)_{0\leq t\leq 1} \in \mathbb{D}$ à accroissements stationnaires et indépendants (i.e un processus de Lévy) tel que $X_1 \overset{loi}{=} X$ et $\left(S^n_{\lfloor m_n t\rfloor} : 0\leq t\leq 1\right) \xrightarrow{loi} (X_t)_{0\leq t\leq 1}$

(cf Kallenberg, Theorem 16.14)

Si $(X_i)_{i\geq 1}$ sont i.i.d centrés de variance finie, en prenant $X^n_i = \frac{X_i}{\sqrt{n}}$ et $m_n = n$, c'est essentiellement le théorème de Donsker.

5) Compléments facultatifs

a) $\mathbb{D}(\mathbb{R}_+, \mathbb{R})$

On note $\mathbb{D}_m = \mathbb{D}([0,m], \mathbb{R}^d)$, $m>0$ et d_m la distance de Skorokhod naturellement définie dessus.

Soit $\mathbb{D}_\infty = \mathbb{D}([0,\infty[, \mathbb{R}^d)$.

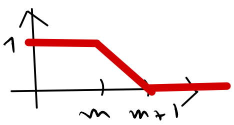
Déf On dit que $x_n \xrightarrow{\mathbb{D}_\infty} x$ si $\forall n \geq 1$, $\exists \lambda_n \in \Lambda_\infty = \{$homéomorphismes croissants de $\mathbb{R}_+$ dans $\mathbb{R}_+\}$ tq

1) $\|\lambda_n - Id\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

2) $\forall m \geq 1$, $\|(x_n \circ \lambda_n - x)\mathbb{1}_{[0,m]}\|_\infty \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$

$\mathbb{D}_\infty \longrightarrow \mathbb{D}_m$, $x \longmapsto x\mathbb{1}_{[0,m]}$ n'est pas continue dans $\mathbb{D}_\infty$ (si x a un saut en m)

Pour définir une distance d_∞ tq $d_\infty(x_n, x) \to 0$ ssi $x_n \xrightarrow{\mathbb{D}_\infty} x$, on introduit $\forall m \geq 1$ la fonction $g_m(t)$:



et on pose pour $x,y \in \mathbb{D}_\infty$:

$$d_\infty(x,y) = \sum_{m \geq 0} \frac{d_m(g_m x, g_m y) \wedge 1}{2^m}$$

et on vérifie que $(\mathbb{D}_\infty, d_\infty)$ est polonais.

Critères de tension : on remplace w' par des w'_m, $m \geq 1$

où $w'_m(x,\delta) = \inf_{\substack{0=t_0<t_1<\dots<t_r=m \\ |t_{i+1}-t_i|>\delta \\ \text{pour } 0 \leq i \leq r-1}} w(x, [t_i, t_{i+1}[)$

[Cf Billingsley, Section 16]

b) C-tension

On remarque que $\mathcal{C} = \mathcal{C}([0,1], \mathbb{R}^d)$ est un fermé de $\mathbb{D}$, car c'est

$\{x \in \mathbb{D} : \sup_{0 \leq t \leq 1} |\Delta x(t)| = 0\}$.

Définition Une suite (X^n) de v.a de $\mathbb{D}$ est dite C-tendue si elle est tendue dans $\mathbb{D}$ ($\mathbb{D}$-tendue) et si toute valeur d'adhérence est portée par $\mathcal{C}$. (i.e si $X^{\varphi(n)} \xrightarrow{loi} X$, alors $\mathbb{P}(X \in \mathcal{C}) = 1$)

Proposition Soit X^n, X des v.a dans $\mathbb{D}$ tq $X^n \xrightarrow{loi} X$. On suppose que $\sup_{0 \leq t \leq 1} |\Delta X^n(t)| \xrightarrow{\mathbb{P}} 0$. Alors $\mathbb{P}(X \in \mathcal{C}) = 1$

cf Billingsley, theorem 13.4 p 142

Théorème Soit (X^n) une suite de v.a de $\mathbb{D}$. Elle est $\mathcal{C}$-tendue ssi

(1) $(X^n_0)_{n \geq 1}$ est tendu dans $\mathbb{R}$

(2) $\forall \varepsilon, \eta > 0$, $\exists \delta > 0$, $\limsup_{n \to \infty} \mathbb{P}(w(X^n, \delta) > \eta) \leq \varepsilon$

cf Billingsley, Corollary p 142

On en déduit aisément une version càdlàg du théorème de Donsker :

Si $(X_i)_{i \geq 1}$ sont iid, centrés, de variance $\sigma^2 \in]0, \infty[$, en notant $S_n = X_1 + \dots + X_n$, on a

$$\left(\frac{S_{\lfloor nt \rfloor}}{\sigma \sqrt{n}} : 0 \leq t \leq 1 \right) \xrightarrow{loi} (B_t : 0 \leq t \leq 1),$$

où la convergence a lieu en loi dans $\mathbb{D}$.

c) Processus ponctuels

Dans le cas des processus ponctuels, la convergence des fidi implique la convergence en loi

Théorème On note D_c l'ensemble des fonctions de comptage sur $[0,1]$, i.e des fonctions càdlàg, à valeurs dans $\mathbb{Z}$, croissantes, dont les sauts valent 1 aux points de discontinuités. Soit X^n, X v.a à valeurs dans D_c.

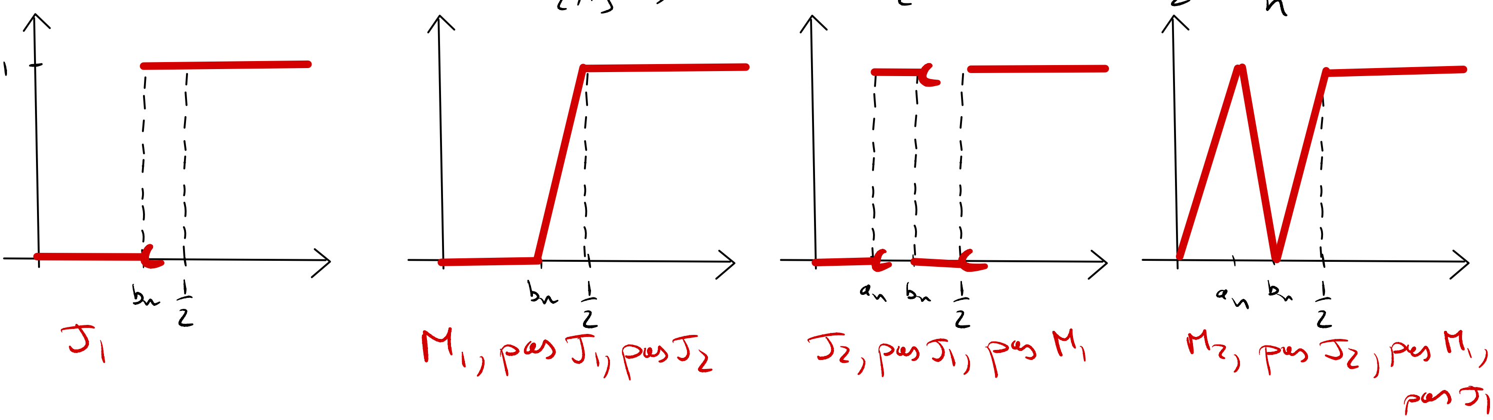
Alors $X^n \xrightarrow{loi} X$ ssi $\exists\, T \subset [0,1]$ dénombrable dense tq

$$\forall t_1, \dots, t_k \in T, \quad (X^n_{t_1}, \dots, X^n_{t_k}) \xrightarrow{loi} (X_{t_1}, \dots, X_{t_k})$$

(cf Billingsley, thm 12.6)

d) Autres topologies

Nous avons considéré la topologie de Skorokhod J_1 sur $\mathbb{D}([0,1],\mathbb{R})$, mais il en existe trois autres (J_2, M_1, M_2) pour lesquels les convergences suivantes ont lieu, avec $x = \mathbb{1}_{[\frac{1}{2},1]}$, $a_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{2n}$, $b_n = \frac{1}{2} - \frac{1}{n}$:



cf W. Whitt, Stochastic process limits, Chap 11.5