

Cours 9: Mesures aléatoires de Poisson, 1/2

Un des objectifs est de définir une notion de "pluie" dans un espace assez général, où les gouttes arrivent indépendamment et rarement selon une répartition décrite par une mesure μ . Lorsque μ est infinie, l'expression "un point choisi au hasard selon μ " n'a pas vraiment de sens. Mais on va pouvoir donner un sens à "une infinité de points choisis selon μ " à travers les mesures aléatoires de Poisson (on verra que les lois de Poisson apparaissent naturellement).

- Plan:
- 1) Rappels sur les lois de Poisson
 - 2) Mesures aléatoires de Poisson
 - 3) Points multiples

Références: • Kingman, Poisson processes
• Last, Penrose, Lectures on the Poisson process

1) Rappels sur les lois de Poisson

Pour $\lambda \in [0, \infty]$, on dit qu'une v.a. X suit une loi de Poisson de paramètre λ , et on note $X \sim P(\lambda)$ si

- Pour $\lambda = 0$, $X = 0$ p.s
- Pour $\lambda = \infty$, $X = \infty$ p.s
- Pour $0 < \lambda < \infty$, $P(X = k) = e^{-\lambda} \frac{\lambda^k}{k!}$ pour $k \geq 0$

On a $E[e^{-uX}] = \exp(-\lambda(1 - e^{-u}))$ pour $u > 0$ (avec la convention $0 \times \infty = 0$)

Les deux propriétés suivantes seraient très utiles

Proposition

• [Superposition] Si $(\lambda_i)_{i \in I}$ est une famille au plus dénombrable de $[0, \infty]$ et $(X_i)_{i \in I}$ des v.a. indépendantes avec $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda_i)$, alors $\sum_{i \in I} X_i \sim \mathcal{P}(\sum_{i \in I} \lambda_i)$

• [Caractérisation] Soit $X \sim \mathcal{P}(\lambda)$ avec $\lambda \in [0, \infty]$. Soit $(U_k)_{k \geq 1}$ des v.a. i.i.d. à valeurs dans \mathbb{N} indépendantes de X avec $\mathbb{P}(U_k = i) = p_i$ pour $i \geq 1$. Alors les v.a. $X_i = \sum_{k=1}^X \mathbb{1}_{U_k = i}$ pour $i \geq 1$ sont indépendantes et $X_i \sim \mathcal{P}(\lambda p_i)$ (avec $0 \times \infty = 0$)

La preuve, prouvée être faite en utilisant les fonctions caractéristiques est laissée en exercice.

2) Mesures aléatoires de Poisson

On se place dans le cadre assez général d'un espace mesuré (E, \mathcal{E}) .

Def On note $\mathcal{M}_s(E)$ l'ensemble des mesures μ sur E pouvant être écrites sous la forme $\mu = \sum_{i \in I} \mu_i$ avec I dénombrable et μ_i mesure finie.

Les éléments de $\mathcal{M}_s(E)$ sont appelés mesures s-finites

Ex Une mesure σ -finie est s-finie, mais la réciproque est fautive

(prendre $\mu = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_x$). L'avantage de travailler avec $\mathcal{M}_s(E)$ est la stabilité par somme dénombrable (pas le cas des mesures σ -finies)

Remarque On peut vérifier que les théorèmes de Fubini s'appliquent pour des mesures s-finites en utilisant le théorème de convergence monotone (cf Theorem A.3 dans Lest d'Poursoe)

Def On note $\mathcal{M}_{\text{atom}}(E)$ l'ensemble des sommes dénombrables d'atomes de la forme $\sum_{i \in I} \delta_{x_i}$ avec I dénombrable et $(x_i)_{i \in I} \in E^{\pm}$

On munit $\mathcal{M}_{\text{atom}}(E)$ de la plus petite tribu rendant mesurables les applications

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_{\text{atom}}(E) &\rightarrow \mathbb{N} \cup \{\infty\} & \text{pour tout } A \in \mathcal{E} \\ \mu &\mapsto \mu(A) \end{aligned}$$

Exemples 1) $N: \Omega \rightarrow \mathcal{M}_{\text{atom}}(E)$ est une va si $\forall A \in \mathcal{E}, \forall k \geq 0, \{\sum N(A) = k\}$ est mesurable

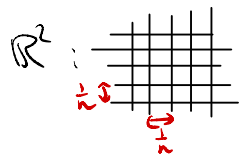
$$\left(\text{car } \{\sum N(A) = \infty\} = \left(\bigcup_{k=1}^{\infty} \{\sum N(A) = k\} \right)^c \right)$$

2) Pour $x \in E$, $\mathcal{E} \rightarrow \mathcal{M}_{\text{atom}}(E)$ est mesurable
 $x \mapsto \delta_x$

3) Pour $A \in \mathcal{E}$, $\mathcal{M}_{\text{atom}}(E) \rightarrow \mathcal{M}_{\text{atom}}(E)$ est mesurable, si μ_{1A} est défini par $\mu_{1A}(B) = \mu(A \cap B)$ pour $B \in \mathcal{E}$

Avant de donner la définition de mesure aléatoire de Poisson, une motivation.

si on veut définir une pluie "uniforme" sur \mathbb{R}^2 , il est naturel de discrétiser



et de choisir un point dans chaque cellule indépendamment avec probabilité $\frac{1}{n^2}$.

Alors le nombre de points qui tombent dans une région A est $\sim \text{Bin}(n^2 \text{Aire}(A), \frac{1}{n^2})$

qui cv en loi vers $\mathcal{P}(\text{Aire}(A))$, et le nombre de points qui tombent dans des régions

disjointes sont indépendants

Définition Soit (E, \mathcal{E}) espace mesuré et μ s. finie sur E . Une mesure aléatoire de Poisson

(ou nuage poissonien) d'intensité μ est une variable aléatoire N à valeurs

dans $\mathcal{M}_{\text{atom}}(E)$ telle que

① $\forall A \in \mathcal{B}(E), N(A) \sim \mathcal{P}(\mu(A))$

② Si $(A_i)_{1 \leq i \leq k}$ est une famille de parties mesurables disjointes de E , alors les va $(N(A_i))_{1 \leq i \leq k}$ sont indépendantes.

Remarques: Presque sûrement, $N(A) = \infty \Leftrightarrow \mu(A) = \infty$

- si les singletons sont mesurables dans E , si $\mu(\{x\}) > 0$, $\mathbb{P}(N(\{x\}) \geq 2) > 0$.
- $\mathbb{E}[e^{-\lambda N(A)}] = e^{-\mu(A)(1-e^{-\lambda})}$

Théorème Pour toute mesure $\mu \in \mathcal{M}_s(E)$, il existe un nuage poissonien d'intensité μ , unique en loi dans $\mathcal{M}_{atom}(E)$.

Pour démontrer ce théorème, on a recours au lemme utile suivant

Lemme (Stabilité par somme)

Soit $(N_i)_{i \geq 1}$ une famille dénombrable de nuages poissoniens indépendants d'intensités μ_i . Alors $N = \sum_{i \geq 1} N_i$ est un nuage poissonien d'intensité

$$\mu = \sum_{i \geq 1} \mu_i$$

Preuve: • Soit $A \in \mathcal{E}$. Par principe de superposition des lois de Poisson,

$$N(A) \sim \mathcal{P}\left(\sum_{i \in \mathbb{I}} \mu_i(A)\right) = \mathcal{P}(\mu(A))$$

• Si $(A_j)_{1 \leq j \leq k}$ sont des parties mesurables disjointes, les v.a.

$(N_i(A_j))_{i \geq 1, 1 \leq j \leq k}$ sont indépendantes. Par regroupement (en paquets), on en déduit que $(\sum_{i=1}^{\infty} N_i(A_j))_{1 \leq j \leq k}$ sont indépendants

Preuve de l'existence des nuages poissoniens: d'après le lemme

précédent, il suffit de traiter le cas où μ est une mesure finie.

Soit $L \sim \mathcal{P}(\mu(E))$ et $(X_i)_{i \geq 1}$ des v.a. iid de loi $\frac{\mu(\cdot)}{\mu(E)}$ indépendantes de L

On pose $M = \sum_{i=1}^L \delta_{X_i}$

Vérifions que M convient. C'est bien une v.a. (cf exemple 2 page 3)

Soit $(A_j)_{1 \leq j \leq k}$ des parties mesurables disjointes

de E et posons $B = (\bigcup_{j=1}^k A_j)^c$. On définit pour $i \geq 1$

$$U_i = \begin{cases} j & \text{si } X_i \in A_j \\ 0 & \text{si } X_i \in B \end{cases}$$

Les variables aléatoires $(U_i)_{i \geq 1}$ sont i.i.d., donc d'après le principe de réflexion pour les lois de Poisson, les v.a

$$N(A_j) = \sum_{i=1}^L \mathbb{1}_{X_i \in A_j} = \sum_{i=1}^L \mathbb{1}_{U_i = j}$$

sont indépendantes et $N(A_j) \sim \mathcal{P}(\mu(E) \cdot \frac{\mu(A_j)}{\mu(E)}) = \mathcal{P}(\mu(A_j))$.

~

Preuve de l'unicité en loi des nuages poissonniens

Les parties de la forme $\{\mu \in \mathcal{M}_{\text{atom}}(E) : \mu(A_1) = k_1, \dots, \mu(A_e) = k_e\}$

avec A_i mesurable et $k_i \geq 0$ forment un π -système générateur de $\mathcal{M}_{\text{atom}}(E)$.

Or une telle partie s'écrit comme réunion finie disjointe de parties de la

forme $\{\mu \in \mathcal{M}_{\text{atom}}(E) : \mu(B_1) = j_1, \dots, \mu(B_n) = j_n\}$ (*)

avec (B_i) mesurables disjoints et $j_i \geq 0$. Ainsi une mesure de probabilité

sur E est caractérisée par ses valeurs sur les ensembles de la forme (**).

Dans le cas d'un nuage poissonnien, si deux nuages poissonniens vérifient

① et ②, leurs lois sont égales sur les ensembles de la forme (**), donc sont les mêmes

~

Remarque La preuve précédente montre que si μ est s-finie, il existe des variables aléatoires $(X_i)_{i \geq 1}$ à valeurs dans E et K à valeurs dans $\mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ toutes indépendantes telles que

$$M = \sum_{i=1}^K \delta_{X_i} \quad (*)$$

et un nuage poissonien d'intensité μ . (avec $K = \infty$ ps si $\mu(E) = \infty$)

⚠ Les X_i n'ont en général pas la même loi

⚠ Si M est un nuage poissonien, en général il ne s'écrit pas sous la forme $(*)$

(en général, on ne peut pas énumérer les atomes de manière mesurable).

Toutefois:

Conséquence importante Si on souhaite démontrer une propriété qui ne dépend que de la loi de M , alors on peut supposer sans perte de généralité que M est de la forme $(*)$ ci-dessus, construite comme dans la preuve de l'existence de nuages poissoniens.

Exemple (un processus de Poisson est un nuage poissonien)

Soit $\lambda > 0$ et $(X_i)_{i \geq 1}$ des v.a iid $\text{Exp}(\lambda)$. On pose $M = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{X_1 + \dots + X_k}$. Alors M est un nuage poissonien d'intensité $\lambda \mathbb{1}_{x > 0}$ dx.

Preuve: D'après la propriété de sans mémoire de la loi exponentielle,

les v.a $(M_{]t, \infty[})_{t \geq 0}$ sont iid. Il suffit donc de vérifier que

$M_{]0, t]} \stackrel{ps}{=} M_{]0, 1]}$ est un nuage poissonien d'intensité $\lambda \mathbb{1}_{]0, 1]}(x)$ dx.

On sait qu'un tel nuage a la loi de $\sum_{i=1}^L \delta_{U_i}$ avec $L \sim \text{Poi}(\lambda)$

et $(U_i)_{i \geq 1}$ iid sur $]0, 1]$. Vérifions que $M_{]0, 1]}$ est de cette forme.

Posons $S_n = X_1 + \dots + X_n$. Alors

$$\mathbb{P}(M([0,1])=n) = \mathbb{P}(S_n \leq 1, S_{n+1} > 1)$$

$$= \int_{\{x_i > 0\}} \prod_{i=1}^{n+1} (\lambda e^{-\lambda x_i} dx_i) \mathbb{1}_{\{x_1 + \dots + x_n \leq 1 < x_1 + \dots + x_{n+1}\}}$$

$$\stackrel{[Y_i = x_1 + \dots + x_i]}{=} \int_{\{0 \leq Y_1 \leq \dots \leq Y_n \leq 1\}} \lambda^{n+1} e^{-\lambda Y_{n+1}} \mathbb{1}_{\{Y_n \leq 1 < Y_{n+1}\}} dY_1 dY_2 \dots dY_{n+1}$$

$$= \lambda^n \int_{\{0 \leq Y_1 \leq \dots \leq Y_n \leq 1\}} dY_1 \dots dY_n e^{-\lambda}$$

$$= \frac{\lambda^n}{n!} \int_{0 \leq Y_1, \dots, Y_n \leq 1} dY_1 \dots dY_n e^{-\lambda}$$

$$= \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda}$$

Donc $M([0,1]) \sim \mathcal{P}(\lambda)$.

Déterminons la loi de (S_1, \dots, S_n) sachant $M([0,1])=n$:

$$\mathbb{E}[g(S_1, \dots, S_n) | M([0,1])=n] = \int_{\{x_i > 0\}} \prod_{i=1}^{n+1} (\lambda e^{-\lambda x_i} dx_i) g(x_1, x_1+x_2, \dots, x_1+x_2+\dots+x_n) \mathbb{1}_{\{x_1+\dots+x_n \leq 1 < x_1+\dots+x_{n+1}\}}$$

même type
de calculs
que juste avant

$$= \frac{\lambda^n}{n!} e^{-\lambda} \int_{0 \leq Y_1 < \dots < Y_n \leq 1} dY_1 \dots dY_n g(Y_1, \dots, Y_n)$$

Ainsi, (S_1, \dots, S_n) sachant $M([0,1])=n$ a la loi des statistiques d'ordre de n v.a. uniformes iid sur $[0,1]$, ce qui conduit.

Proposition (Stabilité par restriction) Soit M nuage poissonien d'intensité μ . Soit $(A_i)_{i \in I}$ des parties disjointes de E . Alors $(M|_{A_i})_{i \in I}$ sont des nuages poissoniens \perp et $M|_{A_i}$ est d'intensité $\mu|_{A_i}$.

C'est une conséquence immédiate de la définition.

On en déduit le résultat suivant, important en pratique pour se ramener au cas d'une mesure d'intensité finie

Corollaire Soit M une mesure aléatoire de Poisson d'intensité μ supposée σ -finie. Alors on peut écrire $M = \sum_{i=1}^{\infty} M_i$ avec $(M_i)_{i \geq 1}$ des mesures aléatoires de Poisson indépendantes d'intensités finies

Preuve: On écrit $E = \bigcup_{i=1}^{\infty} A_i$ avec $(A_i)_{i \geq 1}$ éléments disjoints de E de μ -mesure finie.

Alors $M = \sum_{i=1}^{\infty} M|_{A_i}$, avec $(M|_{A_i})_{i \geq 1}$ des mesures aléatoires de Poisson indépendantes avec $M|_{A_i}$ d'intensité $\mu|_{A_i}$, finie.

∞

Remarque Si μ est σ -finie, ce n'est pas clair qu'on peut décomposer M de manière "memorable" $M = \sum_{i=1}^{\infty} M_i$ avec $(M_i)_{i \geq 1}$ mesures aléatoires de Poisson indépendantes d'intensités finies. Mais lorsque μ est σ -finie, on vient de voir que c'est possible.

3) Points multiples

On suppose que $\exists x \in E \quad \forall x \in E$.

Les atomes d'une mesure $\sum_{i \in I} \delta_{x_i} \in \mathcal{M}_{\text{atom}}(E)$ ne sont pas forcément distincts.

Si M est un nuage poissonien d'intensité μ , $M(\{x\}) \sim \mathcal{P}(\mu(\{x\}))$.

Donc $\forall x \in E$, $\mu(\{x\}) = 0 \Leftrightarrow \forall x \in E$, $\mathbb{P}(M(\{x\}) \in \{0, 1\}) = 1$. On va en

fait mq $\forall x \in E$, $\mu(\{x\}) = 0 \Leftrightarrow \mathbb{P}(\forall x \in E, M(\{x\}) \in \{0, 1\}) = 1$ sous de bonnes hypothèses garantissant la mesurabilité de l'événement.

Definition On note

$$\mathcal{M}_{\text{atom}}^{\text{simple}}(E) = \left\{ \mu = \sum_{i \in I} \delta_{x_i} \in \mathcal{M}_{\text{atom}}(E) : x_i \neq x_j \text{ pour } i \neq j \right\}$$

Rappelons que $\mathcal{M}_{\text{atom}}(E)$ est muni de la plus petite tribu pour laquelle les $\mathcal{M}_{\text{atom}}(E) \rightarrow \mathbb{N} \cup \{+\infty\}$ sont mesurables pour tout $A \in E$.

$$\mu \mapsto \mu(A)$$

⚠ En général, $\mathcal{M}_{\text{atom}}^{\text{simple}}(E)$ n'est pas une partie mesurable de $\mathcal{M}_{\text{atom}}(E)$.

En effet, soit $(X_n)_{n \geq 1}$ des v.a iid uniformes sur $[0, 1] = E$. Posons

$$M_1 = \sum_{n \geq 1} \delta_{X_n} \text{ et } M_2 = \sum_{n \geq 1} 2 \delta_{X_n}. \text{ Alors } M_1 \text{ et } M_2 \text{ sont deux mesures aléatoires}$$

de Poisson d'intensité s-finie μ donnée par $\mu(A) = \begin{cases} 0 & \text{si } \lambda(A) = 0 \\ \infty & \text{si } \lambda(A) = \infty \end{cases}$ avec

λ la mesure de Lebesgue sur $[0, 1]$. (μ est s-finie car $\mu = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda$).

M_1 et M_2 ont même loi, $M_1 \in \mathcal{M}_{\text{atom}}^{\text{simple}}(E)$ et $M_2 \notin \mathcal{M}_{\text{atom}}^{\text{simple}}(E)$, donc $\mathcal{M}_{\text{atom}}^{\text{simple}}(E)$

n'est pas mesurable

Une hypothèse de finitude et de mesurabilité sont nécessaires:

Lemme On suppose que $D = \{(z, z) : z \in E\} \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$

Alors $\mathcal{M}_{\text{atom}}^{\text{simple, f}}(E) = \{\mu \in \mathcal{M}_{\text{atom}}^{\text{simple}}(E) : \mu(E) < \infty\}$ est mesurable dans $\mathcal{M}_{\text{atom}}(E)$.

Preuve: Posons $\mathcal{M}_{\text{atom}}^{\text{f}}(E) = \{\mu \in \mathcal{M}_{\text{atom}}(E) : \mu(E) < \infty\}$, partie mesurable de $\mathcal{M}_{\text{atom}}(E)$

et $\Phi : \mathcal{M}_{\text{atom}}^{\text{f}}(E) \rightarrow \mathcal{M}_{\text{atom}}^{\text{f}}(E \times E)$.

$$\sum_{i=1}^m \delta_{x_i} \mapsto \sum_{\substack{i,j=1 \\ i \neq j}}^m \delta_{(x_i, x_j)}$$

Puisque $\mathcal{M}_{\text{atom}}^{\text{simple, f}}(E) = \{\mu \in \mathcal{M}_{\text{atom}}^{\text{f}}(E) : \Phi(\mu)(D) = 0\}$, il suffit de

vérifier que $\mu \mapsto \Phi(\mu)(D)$ est mesurable. Pour cela, considérons

$$\mathfrak{b} = \left\{ C \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{E} : \left\{ \mu \in \mathcal{M}_{\text{atom}}^{\text{f}}(E) \rightarrow \mathbb{R} \right. \right. \\ \left. \left. \mu \mapsto \Phi(\mu)(C) \text{ est mesurable} \right\} \right\}$$

Puisque pour μ finie et $A, B \in \mathcal{E}$, on a $\Phi(\mu)(A \times B) = \mu(A)\mu(B) - \mu(A \cap B)$.

On vérifie que \mathfrak{b} est une classe monotone, contenant les paires mesurables.

Ceci conclut. (N.B. On peut de même montrer que Φ est mesurable)

~

Proposition On suppose que μ est σ -finie et que $D = \{(z, z) : z \in E\} \in \mathcal{E} \otimes \mathcal{E}$

Soit \mathbb{P} un nuage poissonien d'intensité μ . Alors

$\forall x \in E \mu(\{x\}) = 0 \Leftrightarrow$ p.s $M \in \mathcal{M}_{\text{atom}}^{\text{simple}}(E)$ (c'est-à-dire qu'il existe un événement A tq $\mathbb{P}(A) = 1$ et $\omega \in A \Rightarrow M(\omega) \in \mathcal{M}_{\text{atom}}^{\text{simple}}(E)$)

Si \mathbb{P} est complète (càd que tout sous-ensemble d'un événement de proba nulle est mesurable),

c'est donc $\Leftrightarrow \mathbb{P}(M \in \mathcal{M}_{\text{atom}}^{\text{simple}}(E)) = 1$

Se cas échéant, on dit que M est sans point multiple

Δ On rappelle qu'en général $\mathcal{M}_{\text{atom}}^{\text{simple}}(E)$ n'est pas mesurable dans \mathcal{E} .

Preuve: \Rightarrow Supposons que $\mu(\{x\}) = c > 0$ pour un $x \in E$. Alors

$$\mathbb{P}(M(\{x\}) \geq 2) = 1 - e^{-c} - e^{-c} > 0, \text{ donc } \mathbb{P}(M \notin \mathcal{M}_{\text{atom}}^{\text{simple}}(E)) > 0,$$

absurde

\Rightarrow • Traitons d'abord le cas μ fini. Alors d'après le lemme $\mathbb{P}(M \in \mathcal{M}_{\text{atom}}^{\text{simple}, f}(E))$

ne dépend que de la loi de M . Ainsi, on peut supposer que M est construite

à partir de variables aléatoires comme dans la preuve de l'existence des

nuages poissonniens: $M = \sum_{i=1}^L \delta_{x_i}$ avec $L \sim \mathcal{P}(\mu(E))$ et $(x_i)_{i \geq 1}$ iid de

loi $\frac{\mu(\cdot)}{\mu(E)}$, \perp de L .

$$\text{Alors pour } 1 \leq i \neq j, \mathbb{P}(X_i = X_j) = \frac{1}{\mu(E)^2} \iint_E \mathbb{1}_{x=y} \mu(dx) \mu(dy) = 0.$$

$$\text{Donc } \mathbb{P}(M \in \mathcal{M}_{\text{atom}}^{\text{simple}, f}(E)) = 1.$$

• Dans le cas général σ -finie $\bigcup_{i=1}^{\infty} A_i = E$ avec $(A_i)_{i \geq 1}$ disjoints et $\mu(A_i) < \infty \forall i \geq 1$,

on a vu que $M = \sum_{i=1}^{\infty} M|_{A_i}$, où $(M|_{A_i})_{i \geq 1}$ sont des nuages poissonniens indépendants d'intensités respectives $\mu|_{A_i}$ (et donc finies).

$$\text{Soit alors } \mathcal{A} = \bigcap_{\substack{i, j \geq 1 \\ i \neq j}} \{ M|_{A_i} + M|_{A_j} \in \mathcal{M}_{\text{atom}}^{\text{simple}, f}(E) \}$$

Pour $i, j \geq 1, i \neq j$, $M|_{A_i} + M|_{A_j}$ est un nuage poissonnien d'intensité finie $\mu|_{A_i} + \mu|_{A_j}$,

ce qui d'après le cas μ fini on a $\mathbb{P}(\mathcal{A}) = 1$.

De plus $\omega \in \mathcal{A} \Rightarrow M(\omega) \in \mathcal{M}_{\text{atom}}^{\text{simple}}(E)$.

~